EL FINAL DE LA MATEMÁTICA HELENÍSTICA: DIOFANTO

Mariano Martínez Pérez
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense. Madrid

Desde finales del siglo II, con la muerte del gran Ptolomeo (ca. 180), hasta el año 529, en el que podemos considerar, siguiendo a Boyer, que se cierra el maravilloso milenio de matemática y filosofía griegas (véase al final), hay un intervalo de tres siglos y medio.

A este período vamos a dedicar estas dos charlas. No vamos, sin embargo, a tratarlo todo él con el mismo detalle por falta de tiempo para ello, pese a que presenta un gran interés. Se trata, en líneas generales, de un período de prolongada decadencia desde el punto de vista de la creación matemática, excluyendo desde ya a las dos figuras centrales (pero sólo a estas dos) que son Diofanto y Pappus de Alejandría, y ya se sabe que tales períodos de decadencia presentan siempre un peculiar y melancólico atractivo.

Me he decidido a dedicar una atención especial, que siempre resultará insuficiente, a la figura de Diofanto, por ser a la vez una de las más originales (lo que no significa de las más importantes ni de las más geniales) y de las menos conocidas de toda la historia de la matemática griega. De la obra de Pappus haremos unos comentarios mucho más breves, lo cual evidentemente no le hace justicia, pero esperamos que sea estudiado de manera especial en otra ocasión en este mismo Seminario.

I. Diofanto de Alejandría

De Diofanto sólo sabemos que vivió en Alejandría hacia el año 250, y que murió a los 84 años, si hemos de creer en la fidelidad de un conocido epigrama de la «Antología Griega» en forma de problema que hace referencia a él.

I.1. La Aritmética

Se trata de la más importante de las dos obras de Diofanto que nos han llegado, aunque sólo fragmentariamente. La *Aritmética* constaba originalmente de trece libros, de los que nos han llegado únicamente los seis primeros (un presunto séptimo libro de algunas ediciones resulta de dividir en siete partes el material de los seis mencionados). Los siete libros perdidos de la *Aritmética* lo fueron sin duda ya en la antigüedad. Según Tannery, la causa principal de esta pérdida fue que Hypatia sólo escribió comentarios de los seis primeros libros, con lo que los siete restantes primero cayeron en el olvido y finalmente se perdieron. Y concretamente no tenemos evidencia alguna de que los árabes conocieran ya más que los seis libros que nos han llegado.

Antes de entrar en el contenido de la *Aritmética* se impone de manera natural el problema de estimar la importancia de la pérdida de esos siete libros. Según Nesselmann, después de minuciosos estudios de la obra, podemos consolarnos con el hecho de que muy probablemente la pérdida es mucho menor que lo que podría indicar la relación de siete libros perdidos frente a seis conservados, y la razón principal que exhibe es la de que los libros perdidos no son los últimos de la obra, sino que la mayor parte caería casi con seguridad entre los libros 1 y 2 supervivientes (véase Heath, 3, vol. II, p. 450). Nos congratula que el códice más antiguo y a la vez el mejor de todos es el «Matritensis 48» (llamado A por Tannery), de la Biblioteca Real de Madrid, que data del siglo XIII. Por desgracia parece estar sensiblemente estropeado por algún desaprensivo que se dedicó a hacer correcciones sobre él, principalmente en los libros 1 y 2.

La *Aritmética* fue traducida al árabe por Qustá ibn Lúgá a mediados de la segunda mitad del siglo IX. De las ediciones modernas, una de las más famosas fue la de Bachet (1621) que publicó por primera vez el texto griego con traducción latina y notas; ésta fue la famosa edición utilizada por Fermat para dejar en ella anunciada su misteriosa «demostración» de su teorema o conjetura, como veremos más adelante. La edición standard hoy día de las obras de Diofanto es la de Tannery en dos volúmenes (Teubner, 1893, 1895). De las ediciones modernas, hemos utilizado las 2, 6, 7 y 8.

La originalidad de Diofanto en esta obra tiene un doble aspecto. El primero consiste en que se trata del único matemático griego (excluyendo quizás a los primeros pitagóricos) que no es un «geómetra», sino un «aritmético» en estado puro. Los problemas son todos de «teoría de números», incluso los que están disfrazados por un lenguaje aparentemente geométrico («Hallar un triángulo, rectángulo tal que...»). Como es bien sabido, a partir del descubrimiento de los segmentos inconmensurables, con la consecuencia de que los números no podían dar cuenta del continuo, la geometría pura se independizó de la aritmética y se convirtió en la auténtica reina de la matemática griega, dominándola prácticamente toda. Otra de las novedades importantes que introduce Diofanto es la siguiente. Los objetos propios de la artmética griega eran los números naturales y sus razones, que *no eran* números sino relaciones entre números («en cuanto al tamaño», nos dirá Euclides). Diofanto considera por primera vez a los números fraccionarios (positivos solamente, por supuesto) como auténticos números. Hay que recordar que la «manipulación» por parte de los egipcios y mesopotamios de los «números fraccionarios» en un sentido puramente «partitivo» (que sin duda es el mejor método de introducirlos a los niños), no tiene nada que ver con la matemática pura griega. Por otra parte, el reconocimiento pleno de los números racionales con su independencia «ontológica», hubo de esperar hasta el siglo XVII.

El punto de vista en el que se sitúa Diofanto le permite en primer lugar librarse de las limitaciones dimensionales de la geometría, donde sólo se podían «multiplicar» tres magnitudes, puesto que tres es la dimensión del espacio. Diofanto admite sin ningún problema productos y potencias hasta seis factores y sus inversos.

El segundo aspecto innovador de Diofanto, tan importante al menos como el primero, fue su introducción del primer simbolismo propiamente matemático. La matemática griega había carecido de cualquier tipo de simbolismo especial: era una matemática «retórica». Diofanto introduce un simbolismo adaptado al cálculo algebraico y muy flexible. Esta notación diofántica recibió el nombre de notación «sincopada» y, pese a sus indudables ventajas «algebraicas», se perdió inmediatamente después de Diofanto, al parecer, y ya ni siquiera la recuperaría la matemática árabe. Sólo durante el Renacimiento, desde finales del siglo XV hasta bien entrado el XVII, se volverá a introducir, lenta y trabajosamente la nueva notación algebraica, que culminará en 1637 con la de Descartes, que es ya la nuestra. Es muy educativo repasar algunos de los muchísimos intentos fallidos de construir una notación flexible para el cálculo algebraico. Se trata de un hecho que tuvo una enorme importancia en la evolución de toda la matemática posterior al siglo XVII, en lo que suele llamarse el proceso de «algebrización» de la matemática.

Los seis libros de la Aritmética conservados contienen unos 130 problemas resueltos, que resultan de muy difícil clasificación, exceptuado el principio general de que la resolución de los problemas anteriones suele facilitar la de los posteriores. Utilizando un criterio estricto podemos clasificar todos estos problemas en unos ¡50 tipos distintos!

El libro I contiene únicamente ecuaciones algebraicas determinadas. Los libros II al V están constituidos en su mayor parte por problemas indeterminados, en los que expresiones de primero o de segundo grado en dos o más incógnitas han de ser cuadrados o cubos. Por último, el libro VI se ocupa de triángulos rectángulos tratados de manera puramente aritmética, en los que alguna función lineal o cuadrática de los lados ha de ser igual a un cuadrado o a un cubo.

Los métodos de resolución de problemas de Diofanto

Los distintos métodos de Diofanto los podemos clasificar, siguiendo a Heath, de acuerdo con el tipo de ecuación o ecuaciones a que conducen, en dos grandes apartados: (A) Ecuaciones determinadas, y (B) Ecuaciones indeterminadas, y en cada caso según los grados de dichas ecuaciones.

(A) Ecuaciones determinadas

Obviamente Diofanto no tenía ninguna dificultad en resolver ecuaciones individuales de primero y de segundo grado, siempre que tuvieran raíces racionales positivas y fueran determinadas. Sólo hay un caso de ecuación cúbica en toda la *Aritmética*.

Un tipo especialmente sencillo de ecuaciones determinadas es el que se reduce, después de hacer operaciones a la fórmula

$$AX^n = B$$

o sea, a una «ecuación pura». Esta ecuación sólo es resoluble, evidentemente, si $\frac{B}{A}$ es una potencia n-ésima positiva.

En general, en un problema se presentan varias incógnitas, pero Diofanto las reduce hábilmente a una sola.

En los casos de ecuaciones cuadráticas Diofanto nos da sumariamente la raíz, o sin demasiadas explicaciones.

Vale la pena detenerse un momento a estudiar el caso de la cúbica. El problema 17 del Libro VI conduce a la ecuación

$$X^2+2x+3= X^3+3x - 3x^2 - 1$$

de la que Diofanto nos dice lacónicamente: «La solución es x=4». ¿De dónde la obtiene? Es fácil ver que la ecuación anterior se reduce a la

$$X^3+X= 4x^2+4$$

es decir

$$x(x^2+1)=4(x^2+1)$$

luego x = 4, puesto que las otras dos raíces, $x=\pm$ i no son de recibo.

(B) Ecuaciones indeterminadas

Se trata de unos cuantos casos particulares del caso general, que respondería a la forma

$$P_n(x,y)=0$$

donde P_n es un polinomio de grado n en las indeterminadas x e y con coeficientes racionales (o lo que es lo mismo, enteros).

Diofanto no estudia ningún caso de ecuación indeterminada lineal (n=1). (Los problemas del libro I que podrían haber conducido a ecuaciones indeterminadas lineales se ven convertidos en ecuaciones determinadas al suponer un valor arbitrario, pero fijo, para una de las dos incógnitas. Como es natural, el sentido que tiene resolver una ecuación indeterminada lineal

$$Ax+By=C$$

es la búsqueda de sus posibles soluciones *enteras,* puesto que para cada valor racional de x habrá trivialmente otro de y tal que (x,y) sea solución de la ecuación. Desde el punto de vista de Diofanto este caso no tiene interés alguno.

Ecuaciones indeterminadas de segundo grado

Todos los problemas se reducen a hallar valores de x que hagan el trinomio cuadrático Ax^2+Bx+C (o un caso particular con A o B o C nulos) un cuadrado perfecto, es decir a resolver la ecuación $Ax^2+Bx+C=y^2$ o bien a un sistema de dos ecuaciones simultáneas (nunca más de dos) de este tipo.

I Una sola ecuación

Hay varios subcasos:

1. Ecuaciones que siempre admiten soluciones racionales, como:

a) A=C=0, es decir, $Bx=y^2$. Diofanto se limita a tomar como y un cuadrado concreto, $y^2=m^2$, y se tiene simplemente $x=\frac{m^2}{B}$

b) $A=0$, es decir, $Bx+C=y^2$. Análogo al anterior.

c) $C=0$, es decir, $Ax^2+Bx=y^2$. Tomando $y=\frac{m}{n}x$ se tiene

$$Ax^2+Bx=x=\frac{m^2}{n^2}x^2 \qquad \text{luego } Ax+B=\frac{m^2}{n^2}x$$

(prescindiendo sin más de la raíz $x=0$), de donde,

$$x=\frac{Bn^2}{m^2-An^2}$$

2. Ecuaciones solubles racionalmente sólo bajo ciertas condiciones sobre los coeficientes:

Caso en que $B=0$, es decir, $Ax^2+C=y^2$

a) A es un cuadrado positivo a^2. Tomando $y=ax\pm m$
(el signo a elegir lo determinará el que el resultado final en x sea positivo), claramente

$$x=\frac{C-m^2}{\pm 2am}$$

al eliminarse astutamente el término cuadrático.

b) C es un cuadrado positivo C^2. Tomando $y=mx\pm c$ se tiene

$$x=\frac{\pm 2cm}{A-m^2}$$

c) Diofanto hace notar expresamente (en dos de los escasos pasajes «semiteóricos» de la *Aritmética*) en el Lema II al problema VI-12 y en el Lema al problema VI-15, dos situaciones en las que hay infinitas soluciones en x.

En el Lema a VI-15 dice que en el caso $Ax^2+C=y^2$, si se tiene una solución x_0, entonces se puede obtener otra mayor. Sea $Ax_0^2-C=q^2$; entonces tenemos $x=x_0+\xi$ e $y=q-k\xi$, con k entero. de $A(x_0+\xi)^2-C = (q-k\xi)^2$ se obtiene que

$$\xi=\frac{2(Ax_0+kq)}{k^2-A}$$

donde se requiere obviamente que $k^2>A$.

En el Lema a VI-12 hace lo mismo para el caso $Ax^2+C=y^2$, con tal de que $x=1$ sea una raíz, es decir, que $A+C$ sea un cuadrado perfecto, $A+C=q^2$. El proceso que sigue se basa en hacer $x=1+\xi$, y todo lo demás como en el caso anterior.

Dos observaciones al respecto de estos dos lemas, que no dejan muy bien parado el prestigio de Diofanto. La primera es la de que, en los problemas III-10 y III-11, ante las ecuaciones respectivas $52x^2+12=y^2$ y $266x^2-10=y^2$ Diofanto las declara «imposibles», pese a que $x=1$ es clara solución de ambas, y caen de lleno bajo el Lema a VI-12 (que, bien es cierto, es bastante posterior, pero ¡hay que repasar las cosas!). La segunda, quizás más grave que el «lapsus» anterior, consiste en la observación de que el procedimiento que se aplica en los dos Lemas a VI-15 y a VI-12 vale también para el caso general

$$Ax^2+Bx+C=y^2$$

sin *ninguna* restricción sobre los coeficientes, como puede comprobar trivialmente el lector.

En este mismo contexto, resulta en cambio notable la observación de Diofanto al problema VI-14, en el sentido de que la ecuación $Ax^2 - C^2=y^2$ es imposible, *salvo que* A *sea suma de dos cuadrados*, cosa de comprobación inmediata.

Consideremos de nuevo la ecuación general

$$Ax^2+Bx+C=y^2$$

sabemos que se puede eliminar siempre el término de primer grado mediante un simple cambio de variable $x=z+h$, pero Diofanto aplica directamente a la ecuación completa la estrategia de los casos anteriores para $B=0$

a) $A=$ cuadrado positivo (problemas II-20, 21, etc.)
b) $C=$ cuadrado positivo (problemas IV-8, 9, etc.), y un tercero nuevo
c) cuando $B^2 - 4AC$ = cuadrado positivo (problema IV-31, sin mencionarlo).

II Sistemas de dos ecuaciones

Se trata de hallar valores de x que hagan simultáneamente cuadrados perfectos a dos expresiones en x lineales o cuadráticas.

Sistemas de dos ecuaciones de primer grado

Diofanto aplica un método más o menos general para resolver un sistema de la forma

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x+a=u^2\\ \beta x+b=w^2\end{array}\right\}$$

según los coeficientes. Se basa en la identidad, muy útil para él,

$$u^2 - v^2=(u+v)(u - v)$$

Si es posible factorizar la diferencia $u^2 - v^2$
es decir, $u^2 - v^2=(u+v)(u - v)=pq$, entonces podemos escribir

$$\left.\begin{array}{l}u+v=p\\ u-v=q\end{array}\right\}$$

luego

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{1}{2}\,(p+q) \\ v&=\frac{1}{2}\,(p-q) \end{aligned}\right\}$$

es decir,

$$u^2=\alpha x+a=\frac{1}{4}(p+q)^2$$

de donde resulta, haciendo cuentas

$$(\alpha-\beta)^2x^2+2[(\alpha-\beta)(a-b+p^2)-2p^2\alpha]x+[p^4-2p^2(a+b)+(a-b)^2]=0$$

Hay dos casos en los que esta ecuación se reduce de grado:

i) $\alpha=\beta$

ii) $p^4-2p^2(a+b)+(a-b)^2=0$

o bien $[p^2-(a+b)]^2=4ab$

luego *ab* debe ser un cuadrado; es decir, o bien *a* y *b* son cuadrados, o la razón de *a* a *b* es la de un cuadrado a otro,

$$\frac{a}{b}=\frac{\gamma^2}{s^2}$$

Es interesante que al caso i) se reduce el de que $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{m^2}{n^2}$ puesto que, en vista de que $\alpha n^2=\beta m^2$ nos queda nuestro sistema en la forma

$$\left.\begin{aligned} \alpha n^2x+a'&=u'^2 \\ \beta m^2x+b'&=w'^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

y la ecuación anterior es ahora lineal.

En el caso ii), si $a=c^2$ y $b=d^2$ nos queda

$$\left.\begin{aligned} \alpha x+c^2&=u^2 \\ \beta x+d^2&=w^2 \end{aligned}\right\}$$

o, equivalentemente

$$\left.\begin{aligned} \alpha d^2x+c^2d^2&=u'^2 \\ \beta c^2x+c^2d^2&=w'^2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

La manera de resolver el sistema (1) es ahora claro; restando

$$u'^2-w'^2=a'-b'=p.q$$

luego

$$\left.\begin{array}{l} u'+w'=p \\ u'-w'=q \end{array}\right\}$$

de donde

$$u'^2=\frac{1}{4}(p+q)^2$$

es decir

$$\alpha n^2x+a'=\frac{1}{4}(p+q)^2$$

$$x=\frac{\frac{1}{4}(p^2+q^2)-\frac{1}{2}(a'+b')}{\alpha n}$$

pudiéndose elegir los factores p y q de cualquier manera, con tal que x sea positivo. Como ejemplo puede servir el problema IV-32, que conduce a las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 65-6x=u^2 \\ 65-24x=w^2 \end{array}\right\}$$

En el caso ii) podemos pasar del sistema

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x+c^2=u^2 \\ \beta x+d^2=w^2 \end{array}\right\}$$

al

$$\left.\begin{array}{l} \alpha d^2x+c^2d^2=u'^2 \\ \beta c^2x+c^2d^2=w'^2 \end{array}\right\}$$

Supongamos que u' es el mayor. La diferencia es $=(\alpha d^2-\beta c^2)x$

Sean los factores px y q Es decir

$$\left.\begin{array}{l} u'^2=\frac{1}{4}(px+q)^2 \\ w'^2=\frac{1}{4}(px-q)^2 \end{array}\right\}$$

y x se calcula de la ecuación

$$\alpha d^2x+c^2d^2=\frac{1}{4}(px+q)^2$$

que da

$$p^2x^2+2x(pq-2\alpha d^2)+q^2-4c^2d^2=0$$

es decir, dado que $pq=(\alpha d^2-\beta c^2)$

$$p^2x^2-2x(\alpha d^2+\beta c^2)+q^2-4c^2d^2=0$$

y para que se reduzca a una ecuación sencilla, Diofanto exige que se anule el término independiente, o lo que es lo mismo, que $q^2=4c^2d^2$ o $q=2cd$

Así, nuestro método nos da sólo *una solución* del sistema, al restringirse *q* al valor 2cd, solución que es

$$x=\frac{2(\alpha d^2+\beta c^2)}{p^2} = \frac{8c^2d^2(\alpha d^2+\beta c^2)}{(\alpha d^2-\beta c^2)^2}$$

Este método lo usa Diofanto una sola vez en un caso particular (problema IV-39) con $c^2 = d^2$, y las ecuaciones son

$$\left.\begin{array}{l} 8x+4=u^2 \\ 6x+4=w^2 \end{array}\right\}$$

Otra posibilidad para la forma original de ii)

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x+c^2=u^2 \\ \beta x+d^2=w^2 \end{array}\right\}$$

es la de tomar directamente

$$u^2-w^2=(\alpha-\beta)x+(c^2-d^2)=pq$$

con,

$$p=c\pm d$$

es decir,

$$q=\frac{\alpha-\beta}{c\pm d}x+c\mp d$$

y

$$u^2=\alpha x+c^2=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha-\beta}{c\pm d}x+2c\right)^2$$

luego

$$\left(\frac{\alpha-\beta}{c\pm d}\right)^2 x+4\left(\frac{c(\alpha-\beta)}{c\pm d}-\alpha\right)=0$$

lo que puede dar dos soluciones en x si $c>d$. Como ejemplo nos vale el problema III-15, con el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 10x+9=u^2 \\ 5x+4=w^2 \end{array}\right\}$$

Como hemos dicho ya, q Diofanto no parece preocuparle el obtener otras soluciones a partir de una dada $x=a$, excepto en algunos casos de ecuaciones simples, pero *no* en sistemas. Según Heath, Fermat fue el primero en darse cuenta de que siempre se podía hacerlo también en este caso, sustituyendo x por $a+\xi$ en las dos ecuaciones, pudiendo llegarse así a una raíz positiva incluso si a fuese negativa. Diofanto usa un proceso alternativo en un único caso, el problema IV-39, para evitar las dificultades que plantearía el método usual. El sistema es el

$$\left.\begin{array}{r} hx+n^2=u^2 \\ (h+f)x+n^2=w^2 \end{array}\right\}$$

Se trata de un sistema de la forma

$$\left.\begin{array}{r} 6x+4=u^2 \\ 8x+4=w^2 \end{array}\right\}$$

Llamemos

$$A=(h+f)x+n^2, \qquad B=hx+n^2, \qquad C=n^2$$

entonces, supongamos

$$B=hx+n^2=(y+n)^2$$
$$hx=y^2+2ny$$

y

$$A=\frac{f}{h}(y^2+2ny)+(y+n)^2$$

a la que hay que obligar a ser un cuadrado (B ya lo es por hipótesis).

Supongamos que sea

$$\left(1+\frac{f}{h}\right)y^2+2n\left(\frac{f}{h}+1\right)y+n^2=(py-n)^2$$

ecuación lineal en y. Variando p podemos obtener diferentes valores de y, y por lo tanto de x.

Sistemas de dos ecuaciones de segundo grado

De la forma general

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2+Bx+C=u^2 \\ A'x^2+B'x+C'=w^2 \end{array}\right\}$$

sólo estudia Diofanto tres tipos muy particulares, para los que se pueden generalizar fácilmente los procedimientos que también funcionaban en el caso de los sistemas lineales.

Primer tipo:

$$\left.\begin{array}{r}\varphi^2x^2+\alpha x+a+u^2\\ \varphi^2x^2+\beta x+b=w^2\end{array}\right\}$$

entonces

$$u^2-w^2=(\alpha+\beta)x+(a-b)=p.q$$

poniendo

$$\left.\begin{array}{l}p=a-b\\[2ex] q=\dfrac{\alpha-\beta}{a-b}x+1\end{array}\right\}$$

luego

$$u^2=\varphi^2x^2+\alpha x+a=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha-\beta}{a-b}\;x+1+a-b\right)^2$$

y para asegurar la racionalidad de x impone Diofanto que sea

$$\varphi=\frac{1}{2}\;\frac{\alpha-\beta}{a-b}$$

en el único problema de este tipo en que $a\neq b$, que es el problema III-13.

En todos los demás casos se tiene que $a=b$, con lo que la diferencia de los cuadrados se reduce a

$$u^2-w^2=(\alpha-\beta)x=p.q$$

con

$$\left.\begin{array}{l}p=\dfrac{\alpha-\beta}{2\varphi}\\[2ex] q=2\varphi x\end{array}\right\}$$

luego

$$u^2=\varphi^2x^2+\alpha x+a=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha-\beta}{2\varphi}+2\varphi x\right)^2$$

es decir

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\;x-\left(\frac{\alpha-\beta}{4\varphi}\right)^2+a=0$$

Un buen ejemplo es el problema VI-8, que conduce al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x^2+14x+1=u^2 \\ x^2+1=w^2 \end{array}\right\}$$

Segundo tipo:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+\alpha x+a=u^2 \\ \beta x+a=w^2 \end{array}\right\}$$

Es decir, una de las ecuaciones es lineal y $a=b$. Entonces

$$u^2 - w^2=x^2+(\alpha - \beta)x=p.q$$

con

$$\left.\begin{array}{l} p=x \\ q=x+(\alpha - \beta) \end{array}\right\}$$

y ahora

$$w^2=\beta x+a=\frac{1}{4}(\alpha - \beta)^2$$

que nos da x inmediatamente. Ejemplo puede ser el problema VI-22, con el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x^2 - 6144x+1048576=u^2 \\ x+64=w^2 \end{array}\right\}$$

Tercer tipo:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x^2+ax=u^2 \\ \beta x^2+bx=w^2 \end{array}\right\}$$

que no puede resolverse como los casos anteriores, y para el cual Diofanto inventa un camino distinto que funciona bien en algunos casos particulares.

Consideremos que

$$u^2=m^2x^2$$

cosa que siempre será posible tomando

$$m=\frac{u^2}{x^2}$$

entonces, de la primera ecuación

$$x=\frac{a}{m^2 - \alpha}$$

y sustituyendo en la segunda

$$\beta\left(\frac{a}{m^2-\alpha}\right)^2+\frac{ba}{m^2-\alpha}=w^2$$

$$\frac{\alpha^2\beta+ba(m^2-\alpha)}{(m^2-\alpha)^2}=w^2$$

para lo cual basta que el numerador sea un cuadrado

$$abm^2+a(a\beta-\alpha b)=y^2$$

ecuación en *m* que podrá resolverse o no. Casos favorables son aquellos en que $\frac{\alpha\beta-ab}{a}$ o $\frac{a}{b}$ sean cuadrados. un ejemplo puede ser el problema VI-14

$$\left.\begin{array}{l}6x^2-5x=u^2\\6x^2-3x=w^2\end{array}\right\}$$

Ecuaciones indeterminadas de grado mayor que dos

a) Ecuaciones individuales

Hay en la *Aritmética* dos clases de problemas que conducen a ecuaciones individuales de grado mayor que dos.

Primera clase:

$$Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Kx+L=y^2$$

con $2<n\leqslant 6$ De ella podemos encontrar seis tipos distintos.

Tipo 1: Ecuación

$$Ax^3+Bx^2+Cx+d^2=y^2$$

Podemos hacer $y=mx+d$ y hallar *m* de manera que el coeficiente de *x* en la ecuación resultante se anule, lo cual implica que

$$m=\frac{c}{2d}$$

con lo que Diofanto se sitúa ingeniosamente en la ecuación

$$Ax+B=\frac{c^2}{4d^2}$$

luego

$$x=\frac{c^2-4d^2B}{4d^2A}$$

Un buen ejemplo lo tenemos en el problema VI-18

$$X^3 - 3x^2+3x+1=y^2$$

Diofanto podría haber mejorado la jugada tomando

$$y=m^2x^2+nx+d$$

para eliminar los términos en x de grados 1 y 2, pero no lo hace.

Tipo 2: Ecuación

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=y^2$$

Los únicos casos que estudia Diofanto son los de la forma particular

$$a^2x^4+Bx^3+Cx^2+Dx+e^2=y^2$$

en la que, haciendo

$$y=ax^2+kx+e$$

se puede calcular k para que desaparezca el término de grado 1 o de grado 3 en x, lo que reduce de nuevo la ecuación. Un ejemplo puede ser el problema IV-28, con la ecuación

$$9x^4 - 4x^3+6x^2 - 12x+1=y^2$$

Tipo 3: Ecuación bicuadrada

$$Ax^4 - Cx^2+E=y^2$$

Se trata, con el tipo 4 siguiente, de dos casos particularmente difíciles, incluso si A o E o ambas son cuadrados perfectos.

Los casos concretos que aparecen obedecen, de hecho, a la forma

$$a^2x^4 - c^2x^2+e^2=y^2$$

que Diofanto transforma con ingenio en la

$$a^2x^2 - c^2+\frac{e^2}{x^2} = y'^2$$

haciendo entonces $y'=ax$ o bien $y'=\frac{e}{x}$ resultan raícez racionales. Un ejemplo lo tenemos en el problema V-28:

$$\frac{25}{4}x^2 - 25+\frac{25}{4x^2} =y^2$$

donde Diofanto supone

$$y^2=\frac{25}{4}x^2$$

Tipo 4: Ecuación

$$Ax^4+E=y^2$$

Pese al aparente aspecto sencillo, esta ecuación se le resiste a Diofanto hasta el punto de que en el problema V-29 se enfrenta con el caso $x^4+97=y^2$, haciendo $y=x^2-10$ lo que le lleva a

$$x^2=\frac{3}{20}$$

que naturalmente no es ninguna solución racional. En vez de intentar otra sustitución, abandona esa ecuación por otra, la $x^4+337=y^2$ en la que haciendo $y=x^2-25$ obtiene con éxito

$$x=\frac{12}{5}$$

A esta especie de «regula falsi» la llamó Nesselman «cálculo hacia atrás»

Tipo 5: Ecuación de la forma

$$x^6-Ax^3+Bx+C^2=y^2$$

Basta hacer $y=x^3+c$ con lo que queda

$$-Ax^2+B=2cx^2$$

es decir

$$x^2=\frac{B}{A+2c}$$

que da una solución racional sólo si $\frac{B}{A+2c}$ es un cuadrado perfecto, claro.

Tipo 6: Ecuación

$$x^6-Ax^3+Bx+C^2=y^2$$

con $\frac{B}{A+2C} \neq$ un cuadrado. Se da el caso en el problema IV-18 con la ecuación

$$x^6-16x^3+x+64=y^2$$

Ante las dificultades Diofanto, en un «cálculo hacia atrás», consigue sustituir esa ecuación por la

$$x^6-128x^3+x+4096=y^2$$

que ya es del tipo 5, y haciendo $y=x^3+64$ resulta $x=\frac{1}{16}$

Segunda clase

Se trata de ecuaciones de la forma

$$Ax^n+Bx^{n-1}+.......+Kx+L=y^3$$

Excepto casos tan sencillos como $Ax^2=y^3$, $Ax^4=y^3$ donde lo único que hay que hacer es suponer $y=mx$, los demás que aparecen en Diofanto son de una de las dos formas:

$$Ax^2+Bx+C=y^3$$
$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=y^3$$

1. Ecuación

$$Ax^2+Bx+C=y^3$$

Sólo se encuentra en los problemas VI-1 y VI-17, y los datos parecen claramente preparados «ad-hoc» para la sencillez del resultado.

2. Ecuación

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=y^3$$

Si *A* o *D* son cubos, la solución es sencilla. En efecto, si $A=a^3$ basta con poner

$$y=ax+\frac{B}{3a^2}$$

para simplificar. Si $D=d^3$ ponemos

$$y=\frac{C}{3d^2}\ x+d$$

y ocurre lo mismo.

Si ocurren las dos cosas al mismo tiempo, podemos hacer cualquiera de los dos cambios anteiores o mejor hacer simplemente $y=ax+d$ para simplificar. Parece ser que Diofanto sólo conocía este último caso, porque en el problema IV-27 rechaza como imposible la ecuación

$$8x^3 - x^2+8x - 1=y^2$$

porque al hacer $y=2x - 1$ da el valor negativo

$$x= -\frac{2}{11}$$

mientras que cualquiera de los dos primeros métodos nos da una raíz racional positiva.

b) Sistemas de dos ecuaciones

Hay unos pocos ejemplos en los que, de dos funciones de *x*, una hay que hacerla un cuadrado y la otra un cubo, para el mismo valor racional de *x*. La mayoría de los casos son muy sencillos por ejemplo, en el problema VI-19 hay que resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r}4x+2=y^3\\2x+1=y^2\end{array}\right\}$$

y obviamente

$$y^3=2z^2 \quad y \quad z=2$$

Más complicado es el caso de VI-21, que nos conduce al sistema

$$2x^2+2x=y^2$$
$$x^3+2x^2+x=z^3$$

Diofanto supone que $y=mx$, luego $x=\dfrac{2}{m^2-2}$ y se tiene

$$\left(\frac{2}{m^2-2}\right)^3+2\left(\frac{2}{m^2-2}\right)^2+\frac{2}{m^2-2}=z^3$$

o

$$\frac{2m^4}{(m^2-2)^3}=z^3$$

y para hacer $2m^4$ un cubo, tenemos que hacerlo a $2m$ poniendo, por ejemplo, $m=4$, lo que da

$$x=\frac{1}{4}$$

Los casos más generales resultarían, evidentemente, demasiado difíciles.

II. Unas breves palabras sobre Pappus

Tal como hemos mencionado al comienzo, los cuatro o cinco últimos siglos de la matemática helenística significan un descenso notable en el nivel teórico, si los comparamos con la época gloriosa de Euclides, Arquímedes y Apolonio.

No obstante, dos figuras destacan míticamente del nivel general. De la primera, Diofanto, hemos hablado con detalle en las páginas anteriores. La segunda es Pappus de Alejandría, que debió vivir en torno al año 350 d.c.

La obra principal de Pappus es su *Synagoge* o *Colección Matemática*, una obra en 8 libros (de los que se han perdido el primero y buena parte del segundo).

Los seis libros restantes son un tratado de geometría de un tipo más enciclopédico que sistemático, en el que se tratan temas muy variados, sin pretender unidad alguna.

A parte de los resultados concretos incluidos por Pappus en su obra, ésta tiene una gran importancia como recopilación «histórica» de problemas como los tres clásicos, así como la recuperación de partes de obras que se han perdido (especialmente en el famoso libro 7).

Pappus es así el último de los grandes matemáticos griegos.

Después de él se producirá una verdadera avalancha de enciclopedistas, comentaristas, etc. de los clásicos (Proclo, Simplicio, Teón, Hypatia), que significará el auténtico final de más de un milenio de la maravillosa matemática y filosofía griega, lo cual ocurrirá a lo largo del siglo V de nuestra era.

BIBLIOGRAFÍA

BASMAKOVA, I.G. «Diophant und diophantische Gleichungen», col. UTB, n.º 360 (Birkhäuser, Basel, 1974).

HEATH, T.L «Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra» (Dover, New York, 1964).

HEATH, T.L. «A History of Greek Mathematics: vol. II: From Aristarchus to Diophantus» (Dover, New York, 1981).

MIDONICK, H. «The Treasury of Mathematics» (Peter Owen, Londres, 1965).

MORDELL, L.J. «Diophantine Equations», col. Pure and Applied Mathematics, n.º 30 (Academic Press, New York, 1969).

RASHED, R. «Diophante: Les Arithmétiques», tome III, Livre IV; tome IV, Livres V, VI, VII, col. des Universités de France (Les Belles Lettres, Paris, 1984).

SESIANO, J. «Books IV to VII of Diophantus» Aritmetica in the arabic translation attributed to Qusta ibn Luga», col. Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences, n.º 3 (Springer Verlag, New York, 1982).

VER EECKE, P. «Diophante d'Alexandrie: Les six Livres Arithmétiques et le Livre des Nombres Polygones» (Albert Blanchard, Paris, 1959).

LA MATEMÁTICA ÁRABE DURANTE LA EDAD MEDIA

Juan Tarrés Freixenet
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

1. Origen y expansión del Islam

Desde mediados del siglo VII, el Islam ha constituído uno de los fenómenos más sorprendentes y significativos de la Historia. Su concepción religiosa varió el destino de muchos pueblos, no solamente en el aspecto espiritual sino también en lo que se refiere a cuestiones políticas, económicas, culturales e intelectuales.

Como es sabido, la cuna del Islam está en Arabia, país situado en la Península Arábiga; ésta se muestra como una fortaleza doblemente fortificada, formada en su mayor parte de grandes extensiones desérticas y protegida del Mar Rojo y del Mar de Omán por sendas cadenas montañosas. Solamente los valles que se sitúan en la vertiente del Golfo Pérsico son tierras algo más hospitalarias.

Con esta disposición geográfica, la Península Arábiga apenas sufrió invasiones que modificaran sus estructuras sociales y políticas mientras que, por el contrario, sus habitantes invadían los territorios limítrofes cada vez que los regímenes políticos de éstos se debilitaban.

En los siglos V y VI tiene lugar una profunda crisis política y económica en Arabia. Es entonces cuando surge la figura de Mahoma, que comienza a predicar una nueva doctrina monoteísta entre los años 610-614 con una idea básica: la constitución de una comunidad de creyentes con criterios de igualdad y solidaridad entre los hombres. Esta idea impulsa la unidad de las diferentes tribus de la Península Arábiga y favorece la conversión de sus componentes a la nueva religión. Esta se implanta en primer lugar en las clases sociales más bajas, en contraposición al politeísmo de los sectores dominantes.

El año 622, perseguido, Mahoma huye de La Meca a Medina, donde funda una coalición de tribus árabes que se habían adherido al Islam. Comienza entonces lo que se ha llamado la era de la Hégira. El propio Mahoma es reconocido como Profeta de Alá y el año 622 queda declarado como año 1 del nuevo calendario musulmán. El año 630, Mahoma entra vencedor en La Meca y allí fallece dos años más tarde.

Los sucesores del Profeta se convierten en Califas y emprenden la llamada Guerra Santa. Se obtienen las primeras victorias bélicas debidas, en parte, a la debilidad de los imperios Bizantino y Sasánido. Ya en el año 637 reinaban en Siria e Irán; el 642, en Egipto, el 711, cruzan Gibraltar y el 712, conquistan Kharezm y el Pendjab. A mediados del siglo VIII, sus dominios comprendían la Península Ibérica (excepto el Reino de los Astures), los territorios africanos del Mediterráneo, el Próximo Oriente, gran parte de Asia Menor, el Cáucaso, el Asia Central y parte del valle del Indo.

Los primeros califas pertenecían a la tribu de los Omeyas, que fueron los que fundaron el Imperio Arabe, con capital en Damasco. A la caída de los Omeyas, el poder pasó a los Abasís; el segundo Califa de esta dinastía, al-Mansur, fundó la ciudad de Bagdad el año 722 y trasladó allí la capital del Imperio.

A medida que éste se ampliaba, la mayoría de la población conquistada se iba convirtiendo a la nueva religión, lo que facilitó la implantación de la lengua árabe (la única permitida en la liturgia del Islam) de manera generalizada.

En los países conquistados, los árabes encontraron culturas que, en general, eran superiores a la suya, pero que asimilaron muy rápidamente, para emprender más tarde la consolidación de una nueva cultura propia de características bien definidas.

El pragmatismo imperante en la filosofía islámica indujo a sus pensadores a recoger la herencia cultural del mundo antiguo, en especial de Grecia. Por otra parte, el comercio favoreció intercambios con las tradiciones culturales de la India, China, Bizancio, Rusia y todos los países del Mediterráneo.

2. La ciencia árabe. La escuela matemática de Bagdad

El año 718, el Califa Omar II (717-720) ordena el cierre del Museo de Alejandría y manda a sus sabios que se instalen en Antioquía. Ya en la época de los Abasís, las escuelas sirias se trasladan a Harran, para instalarse más tarde en Bagdad. De esta manera, a finales del siglo VIII y comienzos del IX se habían agrupado en esta ciudad gran cantidad de sabios y traductores.

Los Califas al-Mansur (754-775) y Harun al-Rasid (786-809), los héroes de «Las Mil y Una Noches», fomentaron el desarrollo de las Ciencias Naturales y las Matemáticas. Bajo el reinado de este último se fundó una importante biblioteca en Bagdad con manuscritos procedentes de Bizancio.

Al-Ma'mun (813-833) agrupó los sabios de Bagdad en una especie de Academia: LA CASA DE LA SABIDURIA que, además de la Biblioteca, disponía de un Observatorio muy bien equipado. Así, Bagdad se convirtió en el primer centro científico del Califato.

En la Casa de la Sabiduría se constituyó una escuela matemática que desplegó su actividad durante unos dos siglos. Fue entonces cuando se tradujeron al árabe las obras más importantes de Euclides, Arquímedes, Herón, Ptolomeo y Diofanto, que se convirtieron en manuales de uso cotidiano.

La diferencia entre la Matemática árabe y la de otras escuelas viene marcada por la influencia de Grecia, que lleva a los matemáticos islámicos a dar formulaciones rigurosas de los distintos temas, presentar demostraciones de los enunciados, clasificar de manera sistemática las diferentes cuestiones y desarrollar exposiciones completas de cada tema abordado.

El primer sabio eminente de la Escuela Matemática de Bagdad fue Muhammad al-Huwarizmi, considerado el autor clásico de las Matemáticas Islámicas y al que nos referiremos en diferentes ocasiones. Desplegó su actividad científica durante el reinado del Califa al-Ma'mun y falleció el año 833.

De la misma época son al-Haggag, primer traductor de los Elementos, y al-Gauhari, que publicó diversos comentarios sobre dicha obra. Otros sabios importantes de los siglos IX y X son los tres hermanos banu-Musa, Thabit-ibn-Qurra, Abu-al-Wafá, al-Kuhi y al-Karagi.

3. La aritmética islámica

3.1. El sistema de numeración decimal

Los musulmanes fueron los primeros en escribir los números tal como lo hacemos ahora. Se puede afirmar que si bien nos podemos considerar herederos de los griegos en lo que concierne a la Geometría, podemos decir que nuestra Aritmética es, en buena parte, un legado de los árabes.

El sistema de numeración decimal se había usado ya en la India: se sabe que no lo utilzaba el astrónomo Aryabhta, nacido el año 476, pero sí lo utilizó su discípulo Bhaskara I ya en el año 520.

Ya en el mundo árabe, al-Huwarizmi es el primero que presta una atención especial al sistema de numeración decimal y las operaciones efectuadas haciendo uso del mismo. En su obra «Libro de la Adición y la Sustracción a partir del cálculo de los hindús», escribe:

> «... hemos decidido exponer aquí la forma de contar de los hindús con la ayuda de nueve caracteres y enseñar como, gracias a su simplicidad y concisión, estos caracteres permiten expresar todos los números».

En dicha obra se describen con detalle las diferentes operaciones del cálculo comenzando con la adición y la sustracción, incluyendo en esta última el caso en que el sustraendo tiene algunas cifras mayores que las correspondientes del minuendo. En la traducción latina de esta obra conservada en Cambridge no aparece ningún ejemplo de este último caso, aunque en los comentarios a la obra del autor español Juan de Sevilla si pueden encontrarse ejemplos de la situación descrita, lo que puede hacer pensar que se trata de algún añadido posterior a la obra original de al-Huwarizmi. Se describen con detalle los algoritmos que permiten multiplicar o dividir un número por otro con el nuevo sistema de numeración, y se ponen ejemplos de los mismos.

La numeración de posición se fue imponiendo con gran lentitud. Una gran parte de la población seguía utilizando el sistema estrictamente literal: así están escritos los números en el «Libro de la Aritmética necesaria a Escribas y Comerciantes», escrito por Abú-l-Wafá entre los años 961 al 976, y otro tanto ocurre con el célebre libro de Aritmética de al-Karagi, «Libro que resulta suficiente para la ciencia de la Aritmética» escrito a finales del siglo X y comienzos del XI.

Unos 150 años después de que al-Huwarizmi escribiera su libro de Aritmética nació, en la región situada al Sur del Mar Caspio, Kusiar ibn Labban al-Gili. Pese a que fue un renombrado astrónomo, apenas si se conoce algún dato de su vida, pero su obra tuvo una cierta influencia y su tratado de Aritmética «Principios del Cálculo de los Hindús» se convirtió en uno de los libros de Aritmética más importantes en el mundo islámico.

Este libro es una breve pero excelente introducción a la Aritmética. Está dividido en dos partes: la primera contiene nueve secciones referidas a la aritmética decimal, comenzando por «la comprensión de la forma de los nueve dígitos», que designa con los signos siguientes:

Fig. 1

y explica el sistema decimal de numeración. Introduce también el cero como el símbolo que debe colocarse en el lugar en el que «no aparece ningún número» y pasa a las restantes secciones de esta primera parte, dedicadas a las distintas operaciones aritméticas.

Las dieciseis secciones de la segunda parte contienen una exposición de la aritmética sexagesimal, que era la utilizada en astronomía y el libro concluye con una sección en la que se indica cómo extraer la raíz cúbica de un número en el sistema decimal de numeración.

3.2. Las fracciones decimales

En el mundo islámico era habitual representar el resultado de la fracción restante de una división mediante el uso de fracciones sexagesimales. No obstante, de manera progresiva se fueron introciendo las fracciones decimales, una novedad exclusiva de los matemáticos del Islam. Los primeros indicios acerca de la definición y establecimiento de tales fracciones lo podemos encontrar en el «Tratado de Aritmética Hindú» de al-Uqlidisi, escrito en Damasco durante los años 952-953. El nombre de al-Uqlidisi indica que el autor se dedicaba a copiar manuscritos de Euclides, pero aparte de este detalle, no se conoce nada más de su vida, pese a que parece ser el primer hombre que utilizó las fracciones decimales con la ayuda de un punto (o una coma) y, por lo tanto, fue pionero en la escritura de dichos números tal como lo hacemos en la actualidad.

Hagamos notar, sin embargo, que el propio al-Uqlidisi dice explícitamente en el prólogo de su obra que había recopilado los mejores métodos de los autores que le precedieron. Esto induce a poner en duda su paternidad en lo que concierne a las fracciones decimales, pero lo que está fuera de cualquier discusión es que las fracciones decimales son un descubrimiento de las Matemáticas del mundo Islámico.

Las fracciones decimales aparecen en la segunda parte del libro de al-Uqlidisi:

> «... dividir uno por la mitad en cualquier posición es cinco en la posición anterior y esto hace necesario que cuando se calcula la mitad de un número impar se halle la mitad de la unidad en la posición anterior, para lo que colocamos una señal sobre dicha unidad para distinguir la posición. En consecuencia, el valor de la posición de la unidad es diez veces la posición que la precede. Ahora, el cinco puede partirse en dos, exactamente igual que los demás números y el valor de la posición de la unidad en la segunda mitad es cien veces la posición de esta última, y esto puede continuar indefinidamente».

Como ejemplo de lo expuesto, calcula cinco veces la mitad de 19, con lo que obtiene 0,59375 y dice que «la posición de la unidad es cien mil veces la que está más a la izquierda (derecha en nuestro sistema de escritura)».

Las fracciones decimales que aparecen en la obra de al-Uqlididsi no están enmarcadas dentro de una teoría sistemática y se utilizan exclusivamente para dar sentido a determinados cálculos. Esta sistematización puede encontrarse dos siglos más tarde en los escritos de al-Samaw'al, quien en su tratado de Algebra de 1172 introduce las fracciones decimales como parte de un método general de aproximación de números con la precisión que se desee y dentro del contexto de la división y la extracción de raíces cuadradas. Es decir, utiliza las fracciones decimales como parte de una teoría y no como un mero instrumento auxiliar de cálculo.

3.3. El cálculo de raíces

Ya hemos visto que los árabes fueron perfeccionando los distintos métodos de cálculo para las cuatro operaciones fundamentales de la Aritmética. Nos referiremos ahora a la extración de raíces.

En su libro, al-Gili dedica un capítulo a la extracción de raíces cuadradas; an-Nasawi, fallecido el año 1029 ó 1030, en su «Libro que contiene todos los conocimientos de la Aritmética Hindú» dio por primera vez un procedimiento para el cálculo de raíces cúbicas, análogo al empleado en la China antigua.

Abu-l-Wafà escribió el «Libro sobre la determinación de los lados de un cubo, del cuadrado y lo relacionado con ellos» en el que se dan métodos para la extracción de raíces cúbicas, cuartas y séptimas. Asimismo, al-Biruni, que vivió entre los años 973 y 1048, tenía un tratado, que no ha llegado a nuestros días, sobre el cálculo de raíces cúbicas y otras de orden superior.

El poeta y matemático Omar al-Khayyam, nacido en 1123, describe un procedimiento general que permite el cálculo de raíces de índice arbitrario de los números enteros en la obra «Las dificultades de la Aritmética», y en su «Algebra» dice haber encontrado una demostración aritmética del método hindú de extracción de raíces cuadradas y cúbicas, procedimiento que se apoya en la fórmula del cuadrado y el cubo de un binomio y que el propio al-Khayyam extiende a exponentes enteros arbitrarios.

Ya en el siglo XV, al-Kasí escribió el libro «La clave de la Aritmética». Se trata de un compendio de Matemáticas elementales que incluye Aritmética, Algebra y Geometría Métrica y que contiene un detallado estudio de las fracciones decimales, una tabla de los coeficientes de las potencias de un binomio y algoritmos para la extracción de raíces de orden superior con aproximaciones realmente notables.

4. La geometría

La Geometría islámica recibe la influencia de la Grecia clásica por tres caminos distintos:

1. Los Elementos de Euclides que, como ya hemos dichos, fueron traducidos en Bagdad en el siglo VIII bajo el mecenazgo de los Califas Harum al-Rashid y al-Ma'mun.

2. Arquímedes y su tratado «Sobre la Esfera y el Cilindro». En el prólogo de este libro menciona, sin entrar en detalles, su descubrimiento sobre el cálculo del área de un segmento de parábola. Esto estimuló a Thabit ibn Qurra y su nieto Ibrahim ben Sinan a buscar con éxito demostraciones de dicho resultado.

Otro problema propuesto por Arquímedes en la segunda parte de su obra es el de dividir una esfera en dos segmentos cuyas áreas guarden entre sí una relación dada. Esta cuestión dio lugar a profundas investigaciones tanto en el campo del Algebra como en el estudio de las Secciones Cónicas.

Un segundo libro atribuído a Arquímedes según fuentes árabes pero desconocido en griego es «El Heptágono y el Círculo»; traducido al árabe por Thabit ibn Qurra, estudia la construcción del polígono regular de siete lados, que no había sido abordada por Euclides.

3. «Las Cónicas», de Apolonio de Perga, que consta de ocho libros, escrito alrededor del año 200 a.C. Se trata de una obra difícil de la que sólo se conservan en griego los cuatro primeros libros, pero en árabe sobreviven siete de ellos. Esta obra constituyó la base de muchas investigaciones avanzadas en Optica y Geometría.

4.1. Las Secciones Cónicas

Como acabamos de señalar, Apolonio y su obra «Las Cónicas» influyeron de manera decisiva en el estudio de dichas curvas en el mundo islámico. Para los árabes, el estudio de las secciones cónicas va más allá de la Geometría pura: la hipérbola es esencial para la construcción de relojes de Sol, mientras que la parábola se utilizaba para el diseño y realización de espejos incendiarios.

Existían métodos prácticos para el trazado de tales secciones, utilizados por los artesanos. Asimismo, se escribieron diversos tratados acerca de esta cuestión, uno de los más importantes es el libro «Sobre el trazado de las tres secciones cónicas», de Ibrahim ben Sinan, nacido el año 909 y fallecido el 947, nieto de Thabit Ibn Qurra, como ya hemos dicho. En esta obra se puede encontrar una discusión completa y rigurosa, con demostraciones, de procedimientos para el trazado de la parábola y la elipse, así como tres métodos para el dibujo de la hipérbola. Por otra parte, en sus trabajos sobre los relojes de Sol, estudia el diseño de todos los tipos posibles de los mismos mediante un método unificado.

Veamos, a modo de ilustración, el procedimiento utilizado para el trazado de la parábola (Fig. 2):

Sobre una recta AG se sitúa un punto arbitrario B y se traza la recta BE, perpendicular a AG

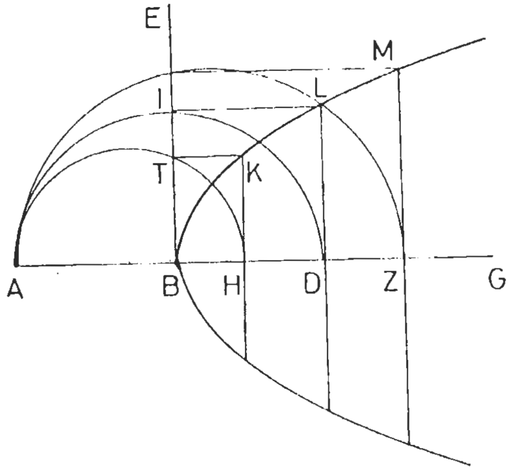


Fig. 2

En el segmento BG se marcan puntos arbitrarios H,D,Z,... Las semicircunferencias de diámetros AH, AF, AZ,... determinan, respectivamente, los puntos T, I, E,... de la recta BE. Los puntos K, L, M,... de la figura pertenecen a la parábola de vértice B, eje AG y parámetro AB.

4.2. Construcción del heptágono regular

Era ésta una construcción geométrica que permanecía oscura y sin una justificación satisfactoria desde la época griega. Como ya se ha dicho, Arquímedes había dado un método de construcción que no había justificado suficientemente (Fig. 3):

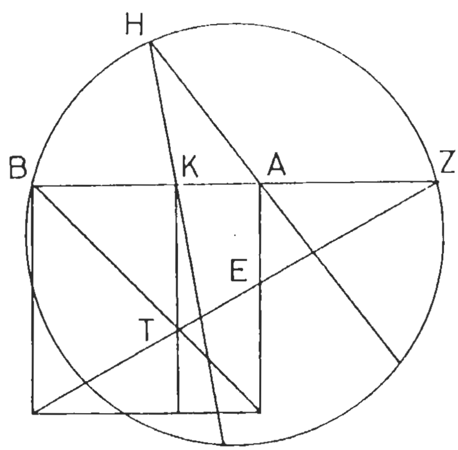


Fig. 3

Se traza el cuadrado ABDG y su diagonal BG. Se dibuja la línea recta DTEZ de manera que el área del triángulo AEZ coincida con la del triángulo ETG. Se traza el segmento KTL, paralelo al lado AG y se prueba:

$$BA \cdot BK = ZA^2 \qquad KZ \cdot KA = KB^2$$

Finalmente, dado el triángulo KHA tal que KH = KB y AH = AZ, Arquímedes prueba que el arco BH es la séptima parte de la circunferencia que determinan B,H y Z.

A la vista de este método, el matemático musulmán del siglo X, Abú-l-Jud plantea algunas consideraciones acerca del mismo:

Si la recta DZ se aproxima al punto A, el triángulo AEZ se hace tan pequeño como se quiera, mientras que el triángulo DTG se aproxima a la cuarta parte del cuadrado. Por otra parte, si la misma recta DZ se acerca a G, el triángulo AEZ se hace cada vez mayor, y DTG, arbitrariamente pequeño. Por lo tanto, existe una posición intermedia para la cual los dos triángulos mencionados tienen áreas iguales.

En opinión de Abu-l-Jud, el procedimiento de Arquímedes es una demostración de existencia para la construcción del heptágono regular, pero no una construcción propiamente dicha.

Tal construcción fue abordada durante la segunda mitad del siglo X, fundamentalmente por Abu Sahl al-Kuhi, científico originario de la región de las montañas situadas al sur del Mar Caspio. Obtuvo una solución satisfactoria mediante el empleo del método de Análisis y Síntesis, que consiste en suponer el problema resuelto y razonar a través de reducciones sucesivas.

Veamos, siquiera de manera esquemática, el procedimiento usado por al-Kuhi:

I. Del heptágono al triángulo

Supongamos que en la circunferencia ABG (Fig. 4) se ha inscrito un heptágono regular, uno de cuyos lados es el segmento BG. Tomemos un punto A de la circunferencia tal que AB = 2·BG

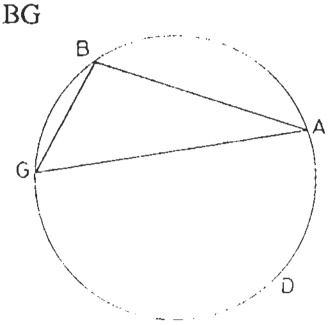


Fig. 4

Se tiene entonces: $A\hat{B}G = 3 \cdot BG$, $A\hat{D}G = 4 \cdot BG$, con lo que $\hat{B} = 4 \cdot \hat{A}$ y $\hat{G} = 2 \cdot \hat{A}$. El problema se reduce, pues a la construcción de un triángulo cuyos lados estén en la relación 4:2:1.

II. Del triángulo a la división del segmento

Sea ABG un triángulo tal que $\hat{B} = 2 \cdot \hat{G} = 4 \cdot \hat{A}$ (Fig. 5)

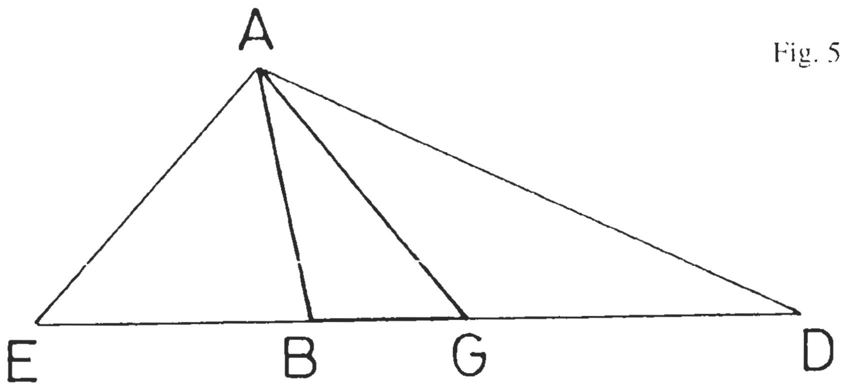


Fig. 5

Se prolonga el segmento BG hasta los puntos D y E de manera que DG = GA y EB = BA. Hay que probar que los ángulos BAG y ADG son iguales, así como los ángulos BAE y BGA, con lo que se tienen los triángulos semejantes ABG y DBA por un lado, y AEB y GEA, por otro.

La semejanza de los triángulos anteriores conlleva:

$$AB^2 = BD \cdot BG \qquad EA^2 = EG \cdot EB$$

y como AB = BE y además, $\hat{E} = B\hat{A}E = \hat{G}$, se cumple la igualdad de los segmentos AE = AG = DG, con lo que:

$$DG^2 = EB \cdot EG \qquad BE^2 = BD \cdot BG$$

Así, la construcción del heptágono regular conlleva la división de un segmento ED por dos puntos B y G, de forma que se cumplan las dos últimas relaciones.

III. Del segmento dividido a las secciones cónicas

Consideremos ahora un segmento lineal ED dividido por dos puntos B y G (Fig. 6) de manera que se verifiquen las dos relaciones indicadas:

$$DG^2 = EB \cdot EG \qquad BE^2 = BD \cdot BG$$

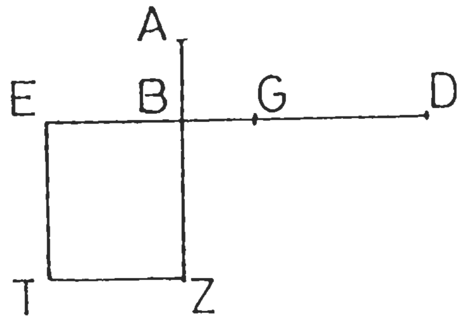


Fig. 6

Construimos el segmento ABZ, perpendicular a ED, de tal forma que es AB = BG y BZ = GD, y completamos el rectángulo BZET.

Se demuestra entonces que el punto T pertenece a la parábola de vértice A y parámetro BG. Asimismo, el punto T pertenece también a la hipérbola de vértice B y lado transverso y parámetro iguales a BG.

IV. Construcción

El análisis anterior conduce a la construcción de dos cónicas (una parábola y una hipérbola) determinadas por la división del segmento ED por los puntos B y G.

El punto T, intersección de las dos cónicas, determina las longitudes ET y TZ, que producen los segmentos restantes DG = ET y BE = TZ.

Luego, dado BG, lado del heptágono que se desea construir, podemos fijar el segmento EBGD y el triángulo ABG con lo que, finalmente, podremos trazar el heptágono. Una vez construído éste en alguna circunferencia, podemos trasladarlo a cualquier otra mediante una semejanza.

4.3. La Geometría de los artesanos

La elaboración de diseños geométricos sofisticados para ser ejecutados en madera, azulejos o mosaicos constituyen una característica de la civilización islámica. Una tradición artesana de este tipo exige el conocimiento de una cantidad considerable de cuestiones geométricas, la transmisión de las cuales se hacía, unas veces, por vía oral, de maestros a aprendices, y otras, a través de los propios geómetras, que intentan dar nuevas construcciones geométricas o la justificación de métodos ya existentes.

Así, la versión árabe del libro VIII de la «Colección Matemática» de Pappus de Alejandría contiene una sección muy interesante referida a construcciones geométricas con el uso de la regla y el compás de abertura fija. El libro fue copiado de nuevo en el siglo X por al-Sijzi a partir de una copia del siglo IX y que pertenecía a los mecenas de Thabit ibn Qurra, lo que hace presuponer que fue este último el primer traductor de dicha obra. El resto del libro VIII de Pappus está dedicado a instrumentos y máquinas, lo que indica que va dirigido, sin ningún género de dudas, a resolver problemas planteados por los artesanos.

También en el siglo X, Abú Nasr al-Farabí escribió otro tratado sobre construcciones geométricas en las que se introducen restricciones en los instrumentos utilizados. Su título es: «Un libro de oficios espirituales y secretos naturales de los detalles de las figuras geométricas». Más tarde, Abú-l-Wafâ incorporó los trabajos de al-Farabí en el libro «Sobre la Geometría que necesitan los artesanos» en el que se resuelven problemas tales como:

1. Construir una perpendicular a un segmento AB sobre su extremo A sin prolongar AB.
2. Dividir un segmento en cualquier número de partes iguales.
3. Trazar la bisectriz de un ángulo.
4. Hallar el centro de una circunferencia.
5. Inscribir un cuadrado en una circunferencia.
6. Inscribir un pentágono regular en una circunferencia cuyo radio es igual a la abertura del compás.

Se dan también construcciones exactas de los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, y 10 lados, y construcciones aproximadas de los de 7 y 9 lados.

Veamos, por ejemplo, como resuelve el segundo de los problemas anteriores de dividir un segmento en partes iguales (Fig. 7):

Supongamos que se quiere dividir el segmento AB en tres partes iguales AG = GD = DB.

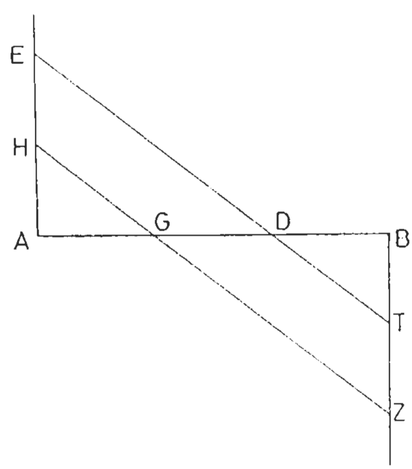


Fig. 7

Se trazan perpendiculares AE y BZ al segmento, en sentidos opuestos. En cada una de estas líneas se toman segmentos iguales AH = HE = BT = TZ. Las rectas HZ y ET cortan al segmento AB en los puntos buscados G y D respectivamente.

5. El álgebra

5.1. El álgebra de al-Huwarizmi

Una de las obras escritas por al-Huwarizmi es el libro titulado «Breve tratado sobre el cálculo del al-jabr y la al-muqàbalà». La propia palabra «Algebra» proviene de la expresión contenida en el título de esta obra: «al-jabr», y que, textualmente, significa «reemplazar»; al-Huwarizmi la usa en el sentido actual de «cambiar de miembro». Habitualmente, la expresión «al-jabr» iba acompañada por «al-mu-qàbalà», que bien podríamos traducir por «simplificar» o «reducir términos semejantes».

El libro citado de al-Huwarizmi se compone de tres partes diferentes:

1. Una parte propiamente algebraica que precede a un corto capítulo sobre contratos comerciales efectuados con la ayuda de una regla de tres simple como la que se utilizaba en la India.
2. Un capítulo de geometría bastante resumido, sobre medidas y el uso del Algebra.
3. Una última parte que trata cuestiones relativas a testamentos y herencias.

Parece que al-Huwarizmi tenía la intención de escribir un manual de utilidad para la resolución de problemas de la vida cotidiana. En la exposición no se utilizan símbolos y las explicaciones son ciertamente prolijas.

Al principio de la obra, al-Huwarizmi presenta seis formas canónicas de ecuaciones de primer y segundo grados e indica los métodos de resolución. En estas formas canónicas, todos los términos deben aparecer como magnitudes aditivas y, además, considera solamente las soluciones positivas de las ecuaciones.

Estas seis formas canónicas son:

I. Los cuadrados son iguales a las raíces: $a \cdot x^2 = b \cdot x$
II. Los cuadrados son iguales a un número: $a \cdot x^2 = c$
III. Las raíces son iguales a un número: $a \cdot x = c$
IV. Los cuadrados y las raíces son iguales a un número: $a \cdot x^2 + b \cdot x = c$
V. Los cuadrados y los números son iguales a las raíces: $a \cdot x^2 + c = b \cdot x$
VI. Las raíces y los números son iguales a los cuadrados: $b \cdot x + c = a \cdot x^2$

Cualquier otra ecuación se resuelve tras reducirla a alguna de esta formas canónicas.

Por ejemplo, una ecuación que se plantea como:

$$x^2 + (10-x)^2 = 58$$

se reduce al caso $x^2 + 21 = 10 \cdot x$, que es del tipo V.

Veamos la discusión que hace al-Huwarizmi de esta ecuación:

> «Dividamos por dos el número de raíces: es 5. Multipliquemos este número por sí mismo, con lo que se obtiene 25. Se resta ahora 21 de esta cantidad y el resto que queda es 4. Extraigamos su raíz cuadrada, que es igual a 2 y restemos este número de la mitad del número de raíces, 5; el resultado es igual a 3. Esta es la raíz que se busca, y su cuadrado es 9. De manera alternativa, se puede añadir la raíz cuadrada a la mitad del número de raíces, y la suma es igual a 7. Esta es también la raíz buscada, y su cuadrado es 49».

Una lectura atenta de este razonamiento nos muestra que ha resuelto la ecuación dada conforme a la conocida fórmula de resolución de ecuaciones de segundo grado cuando el coeficiente del término lineal («raíz») es un número par.

5.2. Thabit ibn Qurra y el Algebra

Una de las características que distingue a al-Huwarizmi y sus sucesores de los escritores que le precedieron es el hecho de dar demostraciones de los métodos empleados. Sin embargo, al-Huwarizmi presenta sus demostraciones en casos particulares. En cambio, en sus trabajos, Thabit ibn Qurra da demostraciones del caso general.

Veremos solamente el caso $x^2 + b \cdot x = c$. La demostración que se da es exclusivamente geométrica y para llevarla a cabo se utiliza una proposición de los Elementos de Euclides:

Libro II. Proposición 6. Si se corta un segmento BH en un punto W y se traza un segmento BA, prolongación del anterior, el rectángulo de lados AH y AB más el cuadrado de lado BW es igual al cuadrado de lado AW. (Fig. 8)

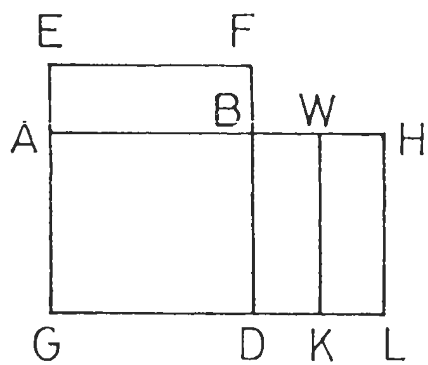


Fig. 8

Para la demostración del cálculo de las raíces de la ecuación dada, consideremos la figura 9, en la que el cuadrado ABDG representa el cuadrado y, en consecuencia, el lado AB es una raíz, y supongamos que hemos elegido una unidad de medida lineal de manera que BH represente el número de raíces, b

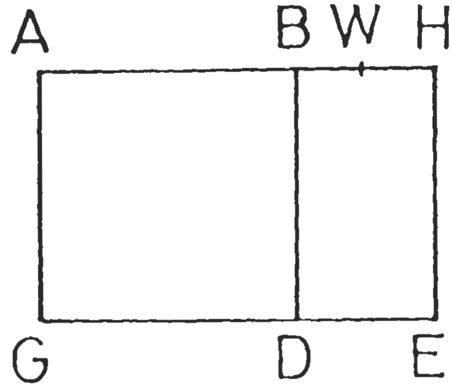


Fig. 9

El área DEHB corresponde al término «raíces», por lo que GEHA es igual al cuadrado más las raíces. Conforme a la proposición de Euclides, GEHA más BW^2 es igual a AW^2. Pero como «cuadrado más raíces» es igual al número, y BW^2 es también un dato conocido, pues BW es la mitad del número de raíces, tanto AW^2 como, por tanto, AW, pueden calcularse. Como x = AB = AW - BW, y se ha obtenido el valor de la raíz x de la ecuación.

Algebraicamente, el razonamiento geométrico consiste en añadir el término $(b/2)^2$ a cada uno de los dos miembros de la ecuación:

$$x^2 + b \cdot x + (b/2)^2 = c + (b/2)^2$$

y con la interpretación geométrica como áreas dada a cada uno de los términos se puede aplicar la proposición de Euclides al miembro de la izquierda y se obtiene:

$$[x + (b/2)]^2 = c + (b/2)^2$$

y x queda determinada conforme a la fórmula:

$$x = \sqrt{c + (b/2)^2} - (b/2)$$

5.3. El álgebra de Abù Kàmil

Un escritor que se encontraba en plena actividad a la muerte de Thabit ibn Qurra, el año 901, fue Abù Kàmil, cuyo apelativo era «el calculista egipcio». Su libro

«Algebra» era, en realidad, un comentario del libro de al-Huwarizmi y gozó de una gran popularidad.

Como cabe esperar, las analogías entre los libros de los dos autores son muchas. La clasificación de las ecuaciones es idéntica en ambos y también en el caso de Abù Kàmil, las demostraciones se dan basándose en casos particulares concretos.

Pese a ello, Abù Kàmil va más allá que al-Huwarizmi. Demuestra métodos de manipulación de expresiones algebraicas, como por ejemplo:

I. $(a \pm px).(b \pm qx) = ab \pm bpx \pm aqx + pqx^2$

II. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ y $\sqrt{a/b} = \sqrt{a} / \sqrt{b}$

III. $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2 \cdot \sqrt{ab}}$

Demuestra también con gran rigor reglas tales como $ax \cdot bx = ab \cdot x^2$ o bien $a \cdot (bx) = (ab) \cdot x$ así como también la conocida «regla de los signos» para la multiplicación.

La obra de Abù Kàmil incluye hasta 69 problemas diferentes. Uno de los más interesantes, el número 41, es como sigue:

> «Se divide 10 en tres partes de manera que si la menor de ellas se multiplica por sí misma y se suma a la intermedia, multipicada también por ella misma, el resultado es la mayor multiplicada de nuevo por ella, y cuando se multiplica la mayor por la menor, se obtiene la intermedia multiplicada por sí misma».

El problema se resuelve en el libro con métodos ciertamente laboriosos, no exentos de ingenio, obteniendo finalmente el resultado aproximado: x=2,57, y=3,26 y z=4,17.

5.4. La aritmetización del álgebra de al-Karagi

Tanto Thabit ibn Qurra como Abù Kàmil aplican la Geometría al Algebra, si bien podemos detectar que ya el último autor presenta una cierta tendencia a aplicar la Aritmética a determinadas cuestiones. Así, podemos encontrar una prueba de la identidad:

$$(10 - x) \cdot (10 - x) = 100 + x^2 - 20 \cdot x$$

en la que aplica solamente la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y la regla de los signos, y lo mismo ocurre en la resolución de los problemas.

Esta tendencia hacia una aritmetización del algebra se observa claramente en uno de los científicos musulmanes más notables, que trabajó en Bagdad alrededor del año 1000 y en la primera década del siglo XI dedicó un libro de Algebra al visir Fakr al-Mulk, emigrando más tarde a regiones montañosas. Este personaje era Abù Bakr al-Karagi y, en realidad se desconocen casi por completo los detalles de su vida.

Fue él quien empleó por primera vez potencias arbitrariamente grandes de la indeterminada y desarrolló el álgebra de expresiones que contenían dichas potencias. Su punto de vista consiste en contemplar las cantidades desconocidas como números o magnitudes geométricas, y pueden ser una «raíz», «lado» o «cosa» (correspondiente a nuestra «x»), o pueden ser cuadrados (x^2), cubos (x^3), cuadrados de cuadrados (x^4), etc. A estas distintas clases de cantidades las denomina «órdenes», y junto a cada orden (x^n) está su «parte» ($1/x^n$), de manera que cualquier orden, multiplicado por su parte, da un resultado igual a 1.

Con todo esto, al-Karagi desarrolla su programa considerando expresiones tales como «un cuadrado de un cuadrado y cuatro cubos menos seis unidades» ($x^4 + 4x^3 - 6$) mediante reglas obtenidas a partir de las reglas ordinarias de la Aritmética concernientes a la suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas.

Digamos que al-Karagi fue pionero en la aritmetización del Algebra y si su éxito fue solamente parcial, ello es debido, no a su falta de ingenio, sino a la dificultad de introducir los números negativos en su teoría. Este aspecto lo podemos encontrar en los escritos de un médico llamado al-Samawa'l, nacido en Bagdad unos 70 años después de la muerte de al-Karagi. En su obra «El maravilloso libro del Cálculo», escrito cuando contaba 19 años, establece la existencia de los números negativos y todas las reglas de los signos.

5.5. Las ecuaciones cúbicas

De alguna manera, el estudio de las ecuaciones de tercer grado surge en el mundo islámico al considerar la ya citada cuestión propuesta por Arquímedes de cortar una esfera por un plano de manera que los volúmenes de los dos segmentos resultantes guarden entre sí una razón predeterminada. El propio Arquímedes había probado que el problema tiene solución si es posible dividir un segmento lineal de longitud a, en dos partes b y c, de manera que «c es a una longitud dada l como un área prefijada m^2 es a b^2». Haciendo entonces $b=x$, con lo que $c=a-x$, se obtiene $ax^2 - x^3 = m^2 \cdot l$, que da lugar a una ecuación del tipo:

$$x^3 + p = a \cdot x^2$$

Realmente, fue Omar al-Khayyam (1048-1131) quien impulsó el estudio de las ecuaciones cúbicas, y el tratamiento de las mismas se puede encontrar en su libro titulado «Algebra».

En el prólogo dice que ninguno de los tratamientos algebraicos de los problemas que se van a discutir proceden de los clásicos, pero que entre los autores modernos, Abù Abdallah al-Mahani (825-828) escribió un análisis de tipo algebraico del problema de Arquímedes, pero que ni éste ni Thabit ibn Qurra consiguieron resolver la ecuación. Un matemático de la generación siguiente a estos últimos, Abù Ja'far al-Khazin (fallecido entre los años 961 y 971) resolvió dicha ecuación mediante la intersección de cónicas (Fig. 10):

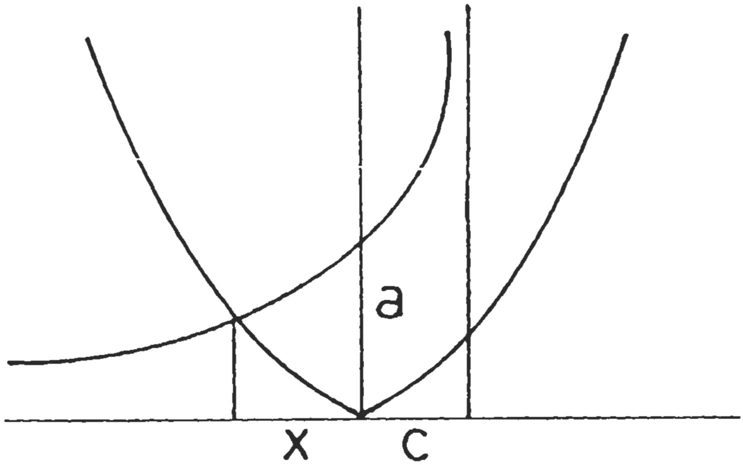


Fig. 10

$$x^3 + l \cdot m^2 = a \cdot x^2$$

$$x^2 = (m^2/c) \cdot y \quad \text{(parábola)}$$

$$y \cdot (a - x) = l \cdot c \quad \text{(hipérbola)}$$

A patir de entonces, varios matemáticos intentaron resolver diversos tipos especiales de ecuaciones cúbicas, pero ninguno intentó dar una clasificación de las mismas, ni métos de resolución. Esto es lo que hizo al-Khayyam:

Su idea inicial es la de estudiar las ecuaciones de tercer grado conforme al número de términos de las mismas. En las ecuaciones que propone al-Khayyam, todos los términos aparecen con coeficientes positivos, con lo que llega a considerar 25 tipos distintos de ellas al tiempo que prueba como se resuelve cada una (11, con métodos euclídeos, y 14, con secciones cónicas).

Veamos alguno de los problemas planteados y resueltos por al-Khayyam:

Problema. Un cubo, algunos lados y números son iguales a algunos cuadrados: $x^3 + b^2 \cdot x + a^3 = c \cdot x^2$

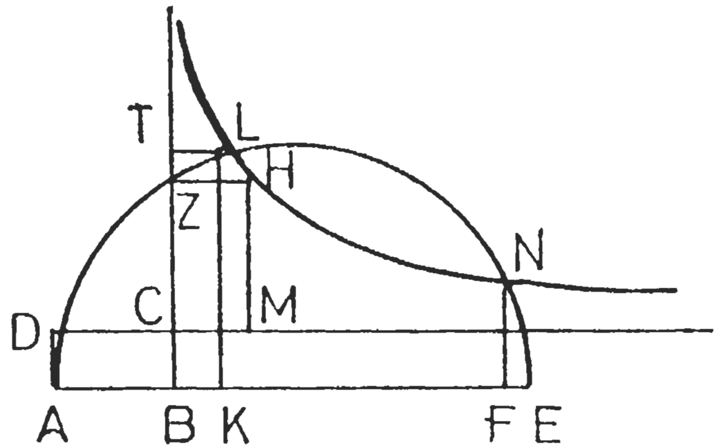


Fig. 11

Sean BE = c, BC = b, BA = a^3/b^2. Construyamos una circunferencia de diámetro AE, y sea Z, la intersección de ésta con el segmento BC prolongado. Se tiene:

$$BZ = (a/b)\cdot\sqrt{a\cdot b}$$

Tomemos el punto H de manera que:

$$HZ\cdot ZC = CB\cdot BA = a^3/b$$

y tracemos una hipérbola equilátera de asíntotas CB y CD que pase por el punto H. Esta hipérbola corta la circunferencia en los puntos L y N. Se prueba que tanto L (BK) como N (BF) representan dos soluciones de la ecuación. Si H queda fuera del círculo, los dos puntos representan soluciones imaginarias; al-Khayyam prescinde asimismo de las posibles soluciones negativas.

6. Áreas y volúmenes

A partir de los siglos X y XI, diversos sabios del mundo islámico se interesaron por los problemas de cuadratura de segmentos de secciones cónicas (principalmente, la parábola) así como del cubicaje de cuerpos de revolución generados por la rotación de secciones cónicas alrededor de un eje, con especial atención a los paraboloides y diferentes tipos de cúpulas obtenidas a partir de la parábola.

Igual que en otras cuestiones, también en éstas, la influencia de los griegos clásicos fue decisiva, destacando, por supuesto los trabajos de Arquímedes, con su obra

«La esfera y el cilindro», así como Apolonio y su tratado sobre «Las cónicas». Por otra parte, en casi todos los casos se utiliza el llamado «método de exhausción», enunciado por Eudoxo de Cnidos en el siglo IV a.C. y cuya formulación podemos expresar como sigue:

> «Si a una magnitud se le quita su mitad, y a la parte restante se quita nuevamente su mitad, y así sucesivamente, se obtiene una cantidad menor que cualquier otra dada».

Consideraremos en primer lugar la obra de Thabit ibn Qurra titulada «Libro sobre la medida de la sección cónica llamada parábola». En él, la parábola considerada viene dada por una propiedad que, en lenguaje actual, podemos enunciar a través de la ecuación $y^2 = p \cdot x$, por lo que la cuadratura equivale al cálculo de la integral:

$$\int_0^a \sqrt{p.x} \quad dx$$

El cálculo de esta integral se obtiene como límite de sumas integrales mediante un curioso artificio: Si se divide el intervalo [0,a] en partes iguales, habría que calcular la suma de la serie:

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}$$

que resultaba sumamente difícil en aquella época.

La manera de eludir la cuestión consiste en dividir el segmento [0,a] en partes desiguales, proporcionales a $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$, con lo que las ordenadas correspondientes serán proporcionales a 1, 2, 3,... La solución de ibn Qurra está basada en una serie de quince proposiciones aritméticas, que se ocupa de justificar, de las que podemos destacar:

I. La proposición 4 sobre la suma de los n primeros números impares:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

II. La proposición 10, que da la suma de los cuadrados de los n primeros números impares:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 + (n/3) = (2/3) \cdot [\sum_{k=1}^{n} (2k-1)] \cdot 2n$$

El autor procede a la cuadratura de un segmento de parábola cortado por la cuerda conjugada de un diámetro cualquiera. Para simplificar, nos limitaremos al caso en que la cuerda es perpendicular al eje de la parábola (Fig. 12):

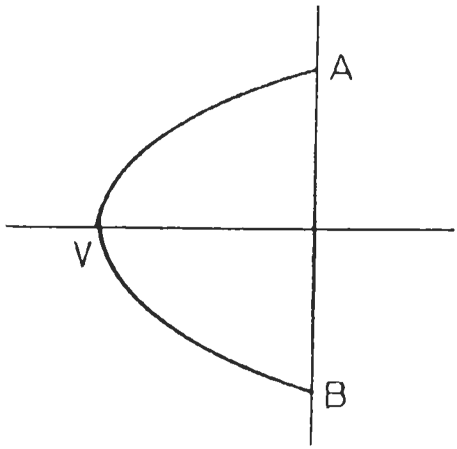


Fig. 12

Thabit ibn Qurra demuestra la proposición siguiente:

> «Si se divide un segmento del eje de una parábola en n partes proporcionales a 1, 3, 5, ..., 2n-1, las cuerdas correspondientes que pasan por los puntos de subdivisión son proporcionales a los números pares 2, 4, 6,..., 2n».

A continuación (Fig. 13), traza una línea poligonal cuyos vértices son el de la parábola y los extremos de las cuerdas correspondientes a las distintas subdivisiones. El polígono resultante S_n está formado, por tanto, de un triángulo, σ_n y diversos trapecios.

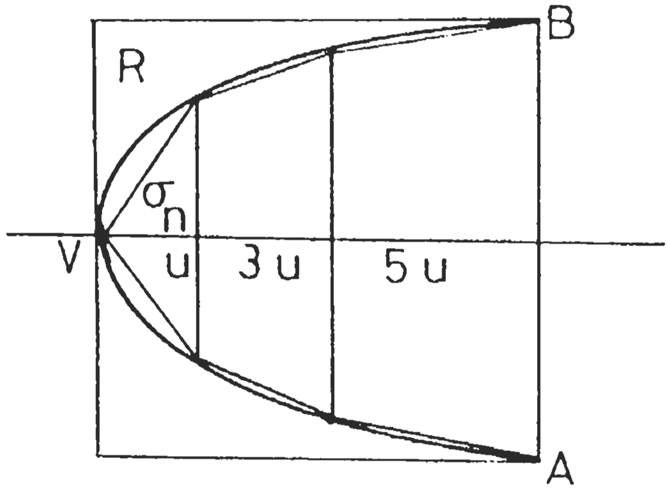


Fig. 13

Si designamos por R el triángulo circunscrito al segmento de parábola considerado, se verifica:

$$(1) \qquad (2/3)\cdot R - S_n < (n/3)\cdot\sigma_n$$

Ahora, si el segmento de eje correspondiente al segmento de parábola tiene longitud a, las longitudes de las distintas subdivisiones serán u, 3u, 5u,..., (2n-1)u, donde $u=a/n^2$, y, en consecuencia, las cuerdas correspondientes son iguales a $2\cdot\sqrt{pu}$, $4\cdot\sqrt{pu}$,..., $2n\cdot\sqrt{pu}$. Así, el área del polígono inscrito es:

$$S_n = (u/2)\cdot 2\sqrt{pu}+(3u/2)\cdot[2\sqrt{pu}+4\sqrt{pu}]+ \ldots +$$
$$+ \ldots + [(2n-1)u/2]\cdot[(2n-2)\sqrt{pu}+2n\sqrt{pu}]$$

y como el área del triángulo circunscrito R es:

$$R = [\ u + 3u + \ldots + (2n-1)u\ ]\cdot 2n\sqrt{pu}$$

la desigualdad (1) se obtiene inmediatamente a partir de la proposición 10.

Más adelante, ibn Qurra pone de manifiesto que si se toma n suficientemente grande, la diferencia $(2/3)\cdot R\text{-}S_n$ llega a ser tan pequeña como se quiera, de donde concluye que el área del segmento parabólico es:

$$S = (2/3)\cdot R$$

Otro tratado de ibn Qurra es el libro titulado «Sobre el cálculo de los paraboloides», en el que se estudian los paraboloides de revolución generados por la rotación de segmentos parabólicos, alrededor, bien de una cuerda, bien de un diámetro.

Clasifica los paraboloides de revolución en dos apartados:

I. Cúpulas parabólicas (Fig. 14):
1. Con vértice redondeado, cuando la sección gira alrededor del eje de la parábola.
2. Con vértice puntiagudo, si el segmento que da vueltas no contiene el eje de la parábola.
3. Con vértice hundido, si el segmento en rotación contiene el eje de la parábola.

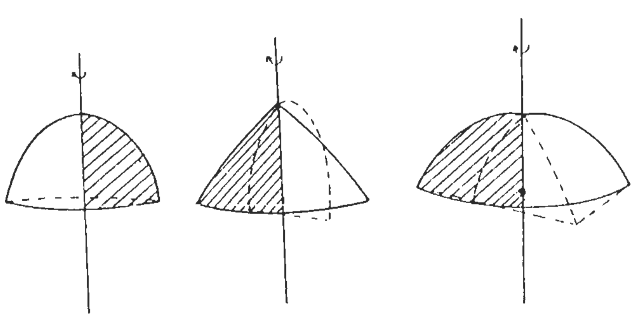


Fig. 14

II. Cúpulas esféricas (Fig. 15).
1. En forma de calabaza, si la figura gira alrededor de una cuerda conjugada del eje.
2. Ovoides, si la figura gira alrededor de una cuerda conjugada de un diámetro distinto del eje.

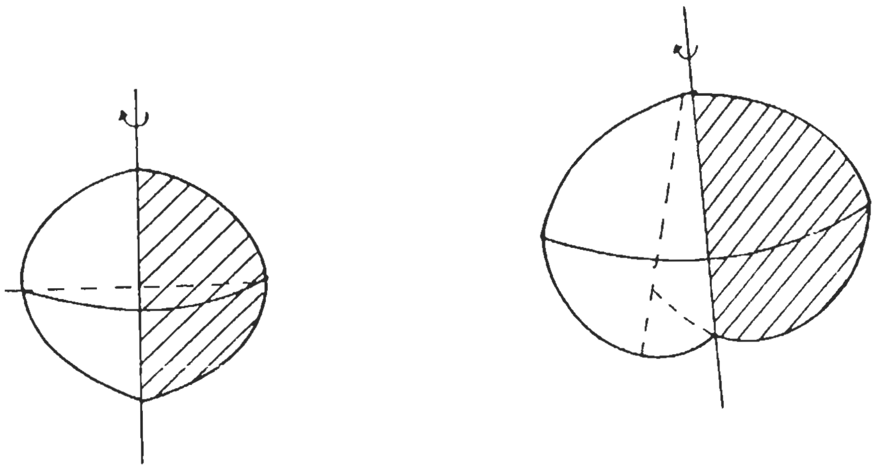


Fig. 15

Calcula entonces el volumen de las cúpulas de vértice redondeado por un método similar al anterior, para lo que necesita nada menos que 36 lemas aritméticos.

Los trabajos de ibn Qurra espolearon a otros sabios, en especial a su nieto Ibrahim ben Sinan y a al-Kuhi. Ambos dieron métodos que simplificaban notablemente los procedimientos de ibn Qurra; en concreto, al-Kuhi reduce la cuadratura del segmento parabólico a sólo tres proposiciones.

Entre los años 965 y 1041 vivió en El Cairo el matemático al-Haytam. En su «Tratado sobre la medida de un sólido parabólico» calcula el volumen de un cuerpo de revolución generado por la rotación de un segmento parabólico alrededor de un eje arbitrario y, en particular, el de las esferas parabólicas consideradas por ibn Qurra con métodos de cálculo semejantes a los de este último.

6. *Conclusión*

Las ideas anteriores no son sino unas breves pinceladas de lo que fue la actividad matemática en el mundo islámico durante los siglos VIII al XV. Las limitaciones de tiempo nos impiden tratar con más profundidad los temas presentados y, naturalmente, abordar otros que se quedan en el tintero. No hemos hablado de aspectos tan importantes como la Astronomía y, subsidiariamente a ésta, la Trigonometría, que florecieron entre los musulmanes durante esta época de la Historia.

Quede patente, no obstante, que durante la época medieval, el Imperio Islámico no fue solamente una entidad política y militar que dominó una parte muy amplia del mundo conocido, sino que también florecieron en él actividades culturales de todo tipo. No fueron ajenas a esta preocupación las Matemáticas, y de ello hemos pretendido dar aquí una minúscula prueba.

Bibliografía

BERGGREN, J. L. «Episodes in the Mathematics of Medieval Islam». Springer Verlag. New York. 1986.

HOGENDIJK, J. P. «Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon». Archiv for History of Exact Sciences. 30(1984), 197-330.

TOUSHKEVITCH, A. P. «Les Mathématiques Arabes». Librairie Philosophique J. Vrin. Paris. 1976.

EL INFINITO EN SANTO TOMÁS DE AQUINO *[1]

«et tamen adhuc non est demonstratum quod Deus non possit facere ut sint infinita actu».

Hermenegildo Delgado Reyes
Seminario de Griego
I.B. Villalba Hervás

Pretendo exponer, de un modo necesariamente sumario, la doctrina de Santo Tomás de Aquino sobre el infinito —cómo lo entiende, y en qué supuestos, o con qué argumentos, lo admite o rechaza— haciendo especial hincapié en lo que más concierne al tema de este Seminario: las posibilidades del infinito que afecta al accidente de la cantidad en su duración, multiplicación y crecimiento.

En aras de la brevedad he aligerado las referencias históricas, renunciando a decir en cada argumento de quién depende Santo Tomás o a quién se opone —sean

* Quiero en esta primera nota expresar mi agradecimiento a los que han facilitado el acceso a una Bibliografía imposible de reunir aquí: mi antiguo compañero José Hernández, con su inexhaurible Biblioteca; mis ex alumnos Segundo Díaz, del Centro Teológico de Las Palmas y Fr. Jesús Mendoza O. P., Prior de su convento en Candelaria, que me hicieron llegar algunos libros; y Fr. Ramón Hernández, O. P., encargado de la Biblioteca del de San Esteban, en Salamanca, que se tomó la molestia de abrírmela medio verano, por que pudiese consultar las obras de Santo Tomás en sus ediciones más monumentales, y numerosos libros y revistas. ¡Gracias, amigos!: *ut piis ejus precibus juvemur omne per aevum!*

1. Las abreviaturas de las obras de Santo Tomás van con los títulos completos, en la Bibliografía final.

Aristóteles [2], Platón o San Agustín, el Maestro de las Sentencias, Alejandro de Hales, San Alberto Magno o San Buenaventura; o ya dentro de las otras Escolásticas, Maimónides, Averroes, Avicena o Algazel—; y mucho menos señalaré los puntos en que se le adhieren o enfrentan los filósofos posteriores, escolásticos o no, como Escoto o Suárez, o bien Descartes, Spinoza, Leibniz o Kant.

El orden que me ha parecido más adecuado es el de exponer primero unas imprescindibles nociones, pasar luego una breve revista a los infinitos que el Santo discute, y mirar a continuación con algo más de detalle sus elucubraciones sobre el infinito actual en la cantidad.

I) Cómo entiende Santo Tomás el infinito

A) Nociones y distinciones [3]

Comenzando, pues, por cómo lo entiende, diré que Santo Tomás parte de la noción nominal: infinito no es, en principio, sino lo ilimitado; y puesto esto en relación con la teoría hilemórfica, entiende que será infinita una forma sin límite material o una materia sin límite formal. Esto le permite explicar que el infinito unas veces supone perfección, cuando se refiere a una forma que puede subsistir sin la materia —por esto precisamente, no por carecer de ella [4]— y otras imperfección, cuando se

2. Como es frecuente oír, incluso a personas que hablan con un cierto magisterio, que Santo Tomás en la cuestión del infinito, como en otras muchas, no hace más que seguir la doctrina aristotélica, parece oportuno reunir aquí los puntos en que se aparta: a) en que explota el concepto de infinito formal, que implica perfección, y así puede llamar infinito a Dios, y a las sustancias separadas, o sea, a los ángeles. Verdad es que Aristóteles llama a Dios con el término equivalente de «óptimo y eterno» (XIIMet8) y reconoce que «Dios mueve el mundo perpetuamente» (VIIIPhys10, lo que Sto. Tomás apostilla en su comentario diciendo que si no fuera infinito no podría). b) que en los Comentarios no da por válidas sus razones para negar la posibilidad del infinito actual en multitud y magnitud, aunque sí las había usado antes en la *Summa*. c) que aunque de acuerdo con la idea de que el mundo pudo ser, a la vez, creado y coeterno con Dios, desaprueba la seguridad con que Aristóteles la enseña, pues dice que en realidad no demuestra sino que el mundo no comenzó por generación, como suponían Anaxágoras y Empédocles; y que Aristóteles, además, sabe que sus argumentos no son apodícticos, pues da la cuestión por dialéctica (Top11). Por otra parte cree que Aristóteles llegó a tener consciencia de la radical contingencia del mundo, y que sus ideas de causa 1ª etc. implicaban la idea de una creación libre, y por tanto compatible con un principio temporal, si Dios así lo quería (todo lo cual se discutía ya mucho entonces y aún se continúa discutiendo. Cfr. resumen en Manser, p. 612ss). Véanse Fraile (269, 323), Copleston (410ss), Aubert (116), Gilson: Tomismo (165ss). d) que acerca de la acumulación de las almas inmortales, Aristóteles debió sacar alguna consecuencia, puesto que creía en el mundo eterno y en la inmortalidad (De Un§104).

3. Iq7a1, IIIq10a3ad3; QdXq2a1ad2; ISentD43q1ad1. Véase apartado sobre el Infinito en las Metafísicas citadas de Iturrioz, Gredt y Mercier; arts. sobre el «Infinito» de Lalande, Farrater, Selvaggi y Rast.

4. Porque no es la negación como tal lo que implica perfección, sino el fundamento de la misma: que no requiere estar unido a la materia. Los seres que necesitan la materia se perfeccionan por ella, pero si no la necesitaran, serían más perfectos (Así lo explica el Card. Cayetano, Fr. Tomás de Vio, O. P. ad Iq7a2).

aplica a una materia que es incapaz de forma, o bien que está a la espera de tenerla. A éste último, como carente de algo debido, lo llama también privativo; y a los demás, negativos. Ulteriores divisiones nacen de que la infinitud afecte al sujeto plenamente o en parte (=*simpliciter, secundum quid*), en acto o en potencia, en un accidente o en su propia esencia.

B) Cómo puede ser conocido [5]

Cualquier infinito es perfectamente comprensible para la mente divina, que no lo conoce recorriéndolo, sino en su misma esencia y verdad; en cambio el entendimiento creado no lo podrá conocer sino por ciertos rodeos: del Infinito Supremo sólo podrá tener un conocimiento indirecto —y ello incluso con la ayuda sobrenatural que esperamos en la gloria para verlo cara a cara—, y del material uno genérico o universal, cuando los elementos tengan algo en común; o de conjunto, cuando formen un todo.

C) Cómo puede venir un infinito creado a la existencia [6]

Para examinar con rigor la cuestión de si una criatura, infinita o no, puede existir en la realidad, es necesario tener claro en qué orden están los seres posibles frente al Poder, la Ciencia y la Voluntad libre de Dios. Santo Tomás dice que «los posibles con potencia absoluta» no son sino los infinitos modos en que la Esencia divina es imitable fuera de Él, y se basan intrínsecamente en la determinada verdad —o digamos coherencia, o inmunidad de contradicción— que Dios descubre en cada uno como reflejo de su Verdad suprema; y extrínsecamente en su infinito Poder para hacer que vengan a la realidad. Pero como es libre y no busca —¡pues tampoco lo hay, sino el que Él ponga!— ningún bien fuera de Sí mismo, sino dar gratuitamente a participar el que tiene, no hará venir sino a los que quiera y como quiera, ordenándolos todos entre sí y hacia Sí mismo; y estos serán los «posibles con potencia orde-

5. Iqq12a4 y 7, 14a12 y 56a3; IIIq10a3ad2; ISentD39q1a3; ICG69; QdIIIq2a1; Verq2a2a1. En Iq14a12 lo ilustra con un célebre pasaje de S. Agustín (Civ. Dei XII. 18): «*Quamvis infinitorum numerorum nullus sit numerus, non est tamen incomprehensibilis Ei Cuius scientiae non est numerus*» (=«Aunque el número de los números infinitos no es ningún número, no es incomprensible, sin embargo, para Aquel cuya ciencia no tiene número»).

6. Iqq19a3, 20a6, 25a1-6, 44a4 y 47a3. Véanse los apartados sobre Libertad de Dios, Omnipotencia, Posibilidad y Optimismo en las Teodiceas y Teologías citadas de Boyer, Brugger, Dalmau, Gredt, Hellín, Hontheim, Rast, Sagüés, y Sertillanges; Gilson: Tomismo (213ss); la Historia de Copleston (356-362), el libro (272ss) y el artículo (c.884ss) de Garrigou-Lagrange; los artículos de Rozwadowsky, Rast y Brugger.

nada», quedándose los demás en meros posibles, que nunca serán, aunque pudieron haber sido. Con esto quedan excluidos los diferentes necesitarismos, que suponen en la divinidad un impulso ciego, o una irrenunciable inclinación a «lo mejor» (atomistas, Platón, Avicena, Averroes, Pedro Abelardo), y el voluntarismo de los que fundan los posibles en una pura arbitrariedad de Dios (aseríes, Algazel, etc.). No tiene sentido pensar que Dios haya de hacer «lo mejor», puesto que ninguna creación concreta puede agotar su Infinitud, ni ser por tanto «la mejor»; sino que elija lo que elija siempre será bueno, e incluso esencialmente inmejorable para un determinado orden de cosas —pero que siempre hubiera podido ser mejor [7]—.

II) Qué infinitos estudia Santo Tomás

Con lo dicho ya podemos pasar revista a los infinitos que estudia Santo Tomás, que son los siguientes:

A) Con infinitud formal y perfecta, negativa, esencial y actual [8]

El primer Infinito es Dios N. S. por ser su propio ser subsistente. Lo es plenamente y en toda linea, y no es posible que El haga otro ser infinito de igual plenitud, porque sería contradictorio, pues ya sólo por ser creado tendría una existencia limitada. Lo que sí puede haber es un ser parcialmente infinito, y esa es la infinitud que, en virtud de su inmaterialidad, acepta para los ángeles.

B) Con infinitud material, imperfecta, privativa o negativa [9]

Esto por lo que hace a los infinitos formales. En el orden material reconoce una infinitud privativa por esencia a la materia, claro que sólo parcialmente y en potencia: la materia prima en potencia puramente lógica, puesto que fue concreada a la vez que las formas elementales y nunca existió sin forma; la materia segunda en potencia subjetiva, en relación con las nuevas formas que puede ir recibiendo sucesivamente. Por ejemplo, la cera fundida que es ahora una determinada figurilla está en potencia para ser sin fin otra, y otra y otra.

7. Formulación bien lejana de los llamados «optimismos» que dan el orden óptimo no ya por posible, sino por necesario; y a este mundo en consecuencia como el mejor posible, donde hasta los males morales serían necesarios para el bien: Sto. Tomás dice expresamente que el mal moral puede ser ocasión de bien, pero jamás causa (Iq19a9ad1, y sobre todo ISentD46q1a3ad6).

8. Iqq7a1 y 50a1.

9. Iqq7aa2-4 y 46a2.

Y como accidental, y en potencia al menos —ya veremos luego si también en acto—, a la cantidad en cuanto que puede crecer, dividirse o durar sin fin, dando lugar a los cuerpos de todo tamaño, los números naturales, y las duraciones.

E igualmente accidental, y material e imperfecta, pero negativa [10], por su incapacidad para tener forma en alguna o en todas sus dimensiones (respectivamente superficie, línea, y punto, instante, unidad), es la que puede atribuirse a los indivisibles —que no «tienen» límite, sino que lo «son»; y no pueden ser atravesados porque no tienen por donde—. Ésta es actual o potencial según lo sean las divisiones en las que se considere: el punto, por ejemplo, es potencial en una línea infinita o en una circunferencia, pero actual en un vértice o una intersección lineal; y los demás lo mismo.

C) Otros infinitos [11]

En otro orden de cosas reconoce que pueden multiplicarse hasta el infinito las relaciones inteligibles y las jerarquías lógicas. Por ejemplo, que cuando entendemos algo, también entendemos que entendemos, y luego también esto; o que cuando hay una proposición que es verdadera también habrá otra que diga que lo es esta primera, y otra sobre esta segunda, etc.

III) El infinito actual dinámico y estático

Veamos ahora qué posibilidades investiga Santo Tomás, tanto para la infinitud dinámica del movimiento y el tiempo (=actual imperfecto), y secundariamente para un regreso causal infinito en el tiempo, como para el estático de la magnitud y la multitud (=actual sin más).

A) El infinito en duración [12]

Santo Tomás pondera todos los argumentos que se esgrimían de una y otra parte, sea para exigir una coexistencia del mundo con la eternidad de Dios, admitiendo

10. Iq85a8ad2, InIIIMetL13§509; InICoel6L12; QdXq2a1ad2.

11. Iqq28a4aad2 y 87a3ad2; InVMet9L11§912; InIVMet8L17§745.

12. Iq46a1s; IISentD1q1a5; IICG31-38 y 80-81; ICoel3L6-8; QdIIIq14a2; QdXIIq6a1; IDe Cau1; Potq3a13-17; De Act (todo). Véanse los apartados sobre la Creación en las Teodiceas y Teologías, u. s. y las Cosmologías de Boyer, Donat, Gredt, Hellín y Philips; las monografías de Esser y Gierens; los libros de Maréchal (555ss), Copleston (354-359), Fraile (327ss) y Gilson: Historia (497), Tomismo (275-283); los artículos de Boyer, Garrigou-Lagrange (c.887), Gillon y Pinard.

por tanto el infinito actual dinámico del movimiento y el tiempo, sea por el contrario la necesidad de un primer instante. Y llega a la conclusión de que ninguno es apodíctico, y es por tanto imposible decidir la cuestión; y que de nada serviría tampoco analizar la naturaleza de la criatura, de por sí intemporal, o la del Creador, que actúa libremente y de un modo inescrutable para nosotros. Ello no empece para que el mundo en todo caso haya de ser creado, ni que podamos averiguar por revelación que lo fue al principio de los tiempos.

a) Argumentos para exigir la infinitud

Entre los argumentos que se aducían para probar la eternidad del mundo ya desde Aristóteles y la Escolástica musulmana, los había de corte necesitarista: que la Acción de Dios es idéntica a su Esencia y que, siendo eterna, es inconcebible que algo le pueda impedir de actuar. Otros nacían de una abusiva equiparación de la Acción divina con la de las causas que actúan con movimiento: si Dios no actuaba desde siempre, decían, sería porque estaba esperando a que algo cambiara en Sí mismo, pues fuera no había qué; y además de que es absurdo un cambio en Dios, como cambio es movimiento, tendríamos movimiento y tiempo antes del tiempo. Otros más pretendían probar que a un mundo no eterno le había de preceder la potencia, que a su vez, como no puede existir sin alguna materia y forma, supondría que hay mundo antes del mundo. Para otros lo que había de precederlo era el vacío, igualmente absurdo, o la parte «anterior» del primer instante, pues cada uno tiene un antes y un después. Y algún otro deducía la eternidad del mundo de la supuesta incorruptibilidad de la quintaesencia.

De todos ellos da Santo Tomás cumplida cuenta: la Acción divina es eterna ciertamente, pero el efecto no se produce sino como y cuando quiera Él, y puede haber tenido una buena razón para querer que tuviera un principio, por ejemplo, para que manifestara mejor su radical contingencia...Dios no actúa por movimiento, ni obra en el tiempo ni en el espacio, ni sobre algo precedente, así que no tuvo porque haber ni siquiera vacío [13], ni potencia, como no sea puramente lógica; sino que de una vez pudo crear el mundo con su movimiento, dando así lugar al espacio y al tiempo, precedidos tan sólo por la eternidad... y si de verdad hubo un instante primero, es vicioso suponerle un antes... y de que la quintaesencia sea incorruptible lo más que se sigue es que no se corromperá, no que no haya sido creada.

13. La realidad que atribuimos al espacio, ocupado o vacío, se funda —o se confunde (?)— con las relaciones de contacto o distancia de los cuerpos entre sí; que si uno aplica directamente sus dimensiones a las de otro se dice que está en él (QdIa4); y si entre algunos cuerpos en contacto caben otros y no están, se dice que hay vacío. Así pues, un espacio o un vacío previos a los cuerpos serán puramente imaginarios. Cfr. precisiones sobre el espacio y el vacío en las Cosmologías citadas, especialmente las de Hoenen y Nys.

b) Argumentos para excluirla

Se argüía que la causa eficiente ha de preceder a su efecto, y el ser necesario al contingente; a lo que respondía el Santo que eso no es preciso sino en las causas que actúan con movimiento, pero a Dios le basta una prioridad de naturaleza. Otros temían que la coeternidad creada se igualara con la del Creador, pero esto es imposible, que ésta es «toda a la vez» —según la expresión boeciana— y aquélla sucesiva. y a los que urgían la fórmula bíblica para concluir que el mundo hubo de recibir el ser después de la nada les replicaba que «hecho de la nada» no significa sino que «no fue hecho de algo», que recibió el ser sin tener para ello exigencia alguna, que fue pudiendo no haber sido.

Otro argumento partía precisamente de la imposibilidad de atravesar el infinito, pues ¿cómo podía el mundo llegar desde su nacimiento infinitamente lejano hasta el momento presente? La respuesta es que, puesta así la dificultad, se está buscando un infinito entre dos topes, cuando lo que se postula es que no hubo tal nacimiento, sino un pretérito infinito sin principio, que sólo Dios puede comprender en toda su realidad, ya que lo contempla sin recorrerlo; pero nosotros le hemos de superponer el infinito potencial de nuestra medida, contando hacia atrás sin fin.

c) La cuestión del proceso causal infinito

Una cuestión especial, admitida la coeternidad para el mundo, es la de si cabe admitirla también para las generaciones, que es decir si es posible un regreso causal infinito. Aún más especial, dentro de ésta, y admitida además la inmortalidad individual de las almas y excluida su reencarnación, es la que plantearía la infinita multitud de almas acumulada por toda esa eternidad.

En la de las generaciones no ve Santo Tomás dificultad alguna, pues no se trataría de causas ordenadas propiamente (=*per se*), sino accidentalmente (=*per accidens*). Las causas se dicen propiamente ordenadas cuando cada una es puesta en acto por la anterior: el clavo que atraviesa el madero ha sido puesto en acto por el martillo, éste por el brazo y éste a su vez por el nervio, etc.: si hubiera que dar infinitos pasos, no habría un primero, y todos quedarían en potencia, sin causas intermedias ni efecto [14]. La ordenación accidental, en cambio, se da entre causas que no dependen una de otra como tales causas: para que una vela pueda prender en otra basta con que esté encendida, y da igual que lo haya sido a su vez de otra, o directamente por el farolero. Y para que un hombre pueda engendrar a otro es igualmente indiferente que él mismo lo haya sido a su vez por su padre, o creado directamente por

14. Esta es precisamente la base de los argumentos para probar la existencia de Dios en Iq2a3, etc.

Dios. Así que el proceso puede remontarse hasta el infinito, sin perjuicio, claro está, de que todos deban el ser a Dios, que en ello consiste el ser creados.

Falta por ver qué sería de las almas, pero como éste sería un infinito actual en multitud, lo veremos en el siguiente apartado.

B) El infinito en multitud y magnitud [15]

Aquí estudia también los pros y los contras, pero no se expresa tan resueltamente a lo largo de toda su obra: en la *Summa* y en los *Quodlibeta* IX y XII lo da por imposible, en los comentarios aristotélicos pone en duda algunos de sus propios argumentos, y en el opúsculo *de Aeternitate mundi* —en el texto que he puesto como lema— niega que esté probada la imposibilidad del infinito actual.

No es seguro si estas diferencias responden a un cambio de opinión, como sugiere el P. Hontheim (p.713); si lo concede *à contrecoeur*, como supone el P. Viganò; o si es únicamente que en unos textos se acoge a la potencia ordenada y en otros a la absoluta, que dicen los PP. Pinard de la Boullaie (c. 2177) y Pégues (ad Iq7aa3, 4). En la duda habrá que decir que lo admite por lo menos en ésta, es decir, que lo da por no contradictorio; pero dejando un resquicio para la ordenada, con la que sería posible en la realidad, a pesar de sus anteriores argumentos en contra.

a) Argumentos a favor de su posibilidad o conveniencia.

1) En general.

Uno *a fortiori* es que si el hombre lo puede concebir, también lo podrá Dios hacer. Responde el Santo que el hombre sólo podrá imaginarlo, como también puede imaginar las contradicciones, pero no comprenderlo, así que esto no prueba nada.

A los que argüían *a priori*, por el Poder infinito de Dios, supuestamente frustrado si no hiciera todo lo que puede, les respondía que no se frustra sino lo que no llega a su fin, y el fin del Poder de Dios es Dios mismo, así que es imposible que se frustre.

2) En multitud.

Se argumenta a partir de la infinita divisibilidad del continuo, que porqué no va Dios a poder ponerla en acto. Responde que no puede porque se trata de una potencia

15. Iq7a3-4, InIIIPhys5L8n352; In XIMetL10§2359; ICoel5ssL9ss; Verq2a10; QdIXq1a1, XIIq2a2; De Act (fin). Véanse Teodiceas, Teologías y Metafísicas citadas, especialmente la del Cardenal Mercier, así como su artículo.

esencialmente sucesiva [16], igual que tampoco puede hacer simultáneas todas las horas del día.

Otro similar es que hay géneros con infinitas especies, como por ejemplo los polígonos, con número creciente de caras, luego también deberían existir las especies. Se responde que son infinitas, pero potencialmente, como los números naturales.

3) En magnitud.

Que entre la infinita divisibilidad del continuo y la infinita aposición de la magnitud debe haber una simetría, por eso de que los contrarios afectan a unos mismos sujetos: si dividiendo proporcionalmente se puede trascender cualquier pequeñez dada, igual se podrá acrecentando hasta cualquier grandeza, es decir, hasta el infinito. Aquí responde que no hay paridad, pues se puede probar con suma facilidad que «si lo que vamos quitando de una magnitud de 10 codos, tomando siempre la mitad, se lo vamos añadiendo a otra igual, no llegará jamás a los 20 codos, pues siempre le faltará tanto a una como reste de la otra» (como si dijera que sumando proporcionalmente 1/2+ 1/4+ 1/8... no se llega nunca a completar la unidad). Y dice que la disparidad se debe a que al dividir se va destruyendo la forma, y aproximándose por tanto al infinito de la materia; en cambio al sumar no se destruye nada, sino que nos vamos acercando a una forma precisa. Otro argumento pretende forzar la relatividad del movimiento y del tiempo con su referente local: si puede ser eterno aquél, que no es concebible sino en relación con la magnitud sobre la que discurre, ¿por qué no la magnitud misma? La respuesta es que tampoco aquí hay paridad: la infinitud del movimiento es sucesiva, y ésta sería simultánea.

b) Argumentos para excluirlo.

1) En general.

Se decía que el infinito creado igualaría al Creador; pero claro está que no, pues sería un infinito parcial y no pleno. O también que limitaría la potencia del Creador, ya que una vez hecho uno no podría hacer otro mayor. Se responde que, siendo esta infinitud un accidente, y cada sujeto un orden distinto, no podría hacer uno mayor en un orden, pero sí en otro: así, si tomamos por separado las especies de los números pares, y por otro las de los impares, serán infinitas ambas, pero sumadas serán más.

16. IGen2L4-5; InIIIPhys5L10; In IXMet6L5§1830; No cabe imaginar acabada la división, ni el continuo reducido a infinitos puntos, porque éstos no son partes de la línea, como tampoco ésta lo es de la superficie ni ésta a su vez del cuerpo (InVIIIPhys8L17n7; IIICoel1L3n2). Cfr. Cosmologías antecitadas y además la de Hoenen, el artículo de Masi y la tesis de Álvarez Laso (c. 4.º).

2) En multitud.

En el *Quodlibetum* IX argumenta él mismo en contra diciendo que las especies de multitudes son «los números», y pues no hay números infinitos, pues cada uno se especifica por su última unidad, tampoco habrá multitudes infinitas. En la *Summa* aún argumenta en contra, pero ya no dice sino que las especies de las multitudes son «como las de los números» —diferencia que hacen notar el Ferrariense (ad IICG80-81) y Cayetano (ad Iq7a3)—. Pero en los Comentarios aristotélicos [17] rechaza la analogía y distingue entre multitud numérica y trascendental. Ésta, según explica en otros lugares [18], no se basa en la división esencialmente inacabable del continuo, sino en la diferencia de formas (así que no es la «multitud mensurable por la unidad», sino un mero «agregado de unidades)»; y por eso es la única aplicable a los seres espirituales, pero acaso lo sea también a los materiales.

Otro argumento se toma del principio de finalidad: Todos los seres, dice, están ordenados entre sí y con Dios en un orden único, y puesto que no lo podrían estar siendo infinitos, por fuerza han de ser finitos. Y excluye las dos clases de orden que vimos hablando de las causas: el propio, porque se haría imposible la causalidad, y el accidental porque implicaría una indiferencia del efecto hacia sus causas, contra el principio de que el Creador sabio no hace nada en vano. Y por este preciso motivo excluye en Iq46a2ad8 la hipótesis de la multitud infinita de almas acumuladas, que estarían ordenadas accidentalmente —lo cual se debería, aunque Santo Tomás no lo especifique, a la relación trascendental con los cuerpos que en su día han informado (Cfr. Ferrariense, ad IICG80-81)—. Algo similar había dicho en el *Quodlibetum* IX, y en el XII añadía que no repugna contra la potencia, sino contra el modo inteligente como Dios crea, dando forma a todo con su Palabra. Pero algo más adelante en la

17. He aquí sus palabras (traducidas por mí): «*Pero es de notar que estas razones* —las aducidas por Aristóteles, que son las mismas que Sto. Tomás aduce en la *Summa— son probables y procedentes de lo que suele decirse comúnmente, pues no concluyen de necesidad. Porque el que supusiera que un cuerpo era infinito no concedería que fuera esencial para un cuerpo el tener superficie exterior, como no fuese en potencia, por más probable y repetido que esto sea. Y de un modo semejante, el que piense que una multitud es infinita, no reconocerá que sea un número, ni que tenga número. Porque el número añade a la multitud la idea de medida, ya que el número es una multitud medida por la unidad, como se dice en el X de la Metafísica. Y por eso el número es una especie de cantidad discreta, en cambio la multitud no es sino de los trascendentes* (InIIIPhysL8n352)». E igualmente «*Pero estas razones no son naturales, puesto que no están sacadas de principios naturales, sino de principios comunes y probables. Pues el que supusiera infinito un cuerpo no lo supondría acabado en superficie, porque esto pertenece a la esencia del cuerpo finito; y el que supusiera infinita una multitud no la supondría número, porque el número es una multitud medida por la unidad, como se dijo en el X, y nada que se mida es infinito* (InXIMetL10§2359)».

18. Iq30a3.

misma *Summa* dice que una multitud infinita estaría determinada y medida por la Ciencia de Dios [19], y la última obra que escribió sobre el tema, acaba con las palabras ya citadas, que «aún no está probado que Dios no pueda hacer que haya infinitos seres en acto». Y es de notar que, aunque ha estado hablando de la repetida multitud de almas, el aserto no se restringe a ellas, ni a una determinada clase de seres, pues no dice sino «*infinita*» (=infinitas cosas, una infinidad).

Y es también el argumento del orden único el que esgrime contra la posibilidad de que haya más de un mundo, no ya infinitos [20]: no es que la hipótesis vaya contra la Omnipotencia de Dios, sino que ésta no tiende a la multiplicidad numérica, que por su propia indefinición se opone al concepto de fin. En lo que sigue diciendo de que si hubiese otra tierra, por su propia naturaleza sería traída hacia ésta, está implícita su creencia en una fuerza que en su tiempo se entendía como tendencia de cada elemento a su lugar propio, luego se interpretó como atracción universal, y mañana lo será sabe Dios cómo, pero que en todo caso mantiene unido el Universo [21].

3) En magnitud.

Contra la posibilidad de un cuerpo infinito invoca un argumento metafísico y otro físico. El 1.º es que un cuerpo no puede existir sin una superficie limitante, y lo desestima él mismo en los Comentarios aristotélicos (u.s.), diciendo que acaso esta limitación no afecte a los cuerpos infinitos.

Y el 2.º, que un cuerpo natural infinito sería necesariamente único, simple e inmóvil, todo lo cual iría contra su naturaleza: único, porque llenaría todo el espacio; inmóvil porque no tendría adonde ir, ni modo como girar sin muchas contradicciones, por ejemplo, que dos radios cualesquiera acabarían distando infinitamente, sin poder llegar uno al lugar que ocupaba antes el otro; y simple, porque los eventuales componentes no podrían guardar proporción.

Este argumento no lo vuelve a tratar expresamente, pero una vez suscitada la duda sobre el anterior, no estará de más recordar que sí se plantea la posibilidad de un accidente infinito más allá de la última esfera [22], y también la de un mundo

19. Iq14a12ad3.

20. Iq47a3.

21. Un Universo completamente aparte de éste no se ve fácilmente cómo podría existir: tendría que estar a la vez teleológicamente relacionado —por el orden único— y espacialmente irrelato —al no caber un vacío intermedio— Cfr. nota 13.

22. InIIIPhysL10n11.

formado con un solo elemento [23]. Y como, por otra parte, un cuerpo homogéneo y solitario tendría todo el espacio por lugar propio, y su movimiento natural no sería otro que el reposo, tendríamos con todo esto un cuerpo infinito; contrario, eso sí, a toda experiencia, pero no contradictorio (Cfr. Johannes a Sto.Thoma Iq15a2, y degl'Innocenti).

Aún hay otros argumentos físicos contra la suposición de que este mundo sea infinito, no como cuerpo, sino como agregado de infinitos cuerpos: son las contradicciones que se seguirían con los movimientos que observamos. Es de notar, a este respecto, que Santo Tomás acepta el modelo ptolemaico solamente en cuanto que «hecha esta suposición, se pueden salvar las apariencias sensibles de los movimientos del cielo, lo cual no es una razón demostrativa [24]»: en otros modelos, como los que hoy pasan por «*non plus ultra*», sería ciertamente más difícil probar que no es infinita la multitud de los cuerpos celestes ni en consecuencia el espacio, pero tampoco se podría probar que sí lo son. Si lo fueran, habría que decir de esta multitud lo que antes se dijo del tiempo infinito: que Dios los conocería sin recorrerlos, y nosotros superpondríamos nuestras series numerales para contarlos o medir sus distancias a partir de cualquiera elegido arbitrariamente como centro, y sin llegar jamás a los extremos, porque en la realidad no se podría definir un 1º, un último ni unos medios [25].

Así que esta discusión del infinito en multitud y magnitud la deja también en tablas, como la anterior. En cuanto a la posibilidad no ve argumentos apodícticos en favor ni en contra; y en cuanto a la realización hay un poderoso argumento en contra, que es el del orden único; pero incluso sin resolver éste expresamente escribió aquello de que «*adhuc non est demonstratum....*»

Y pues él lo dejó así, así lo dejaremos también nosotros.

23. IICG45.

24. Iq32a1ad2.

25. InIIMetL3, InIPhysL5n3, y la serie de artículos de Landucci —que provocó la discusión—, Balducci, Crenna, degl'Innocenti, Masi, Selvaggi, Signorelli, Tedeschi y Viganò.

BIBLIOGRAFÍA

A) Obras de Santo Tomás

(van en su orden de publicación, según las fechas más acreditadas, para que pueda comprenderse la evolución de su pensamiento; y con las abreviaturas que empleo en este trabajo).

Sent	*Scripta super IV libros Sententiarum Magistri Petri Lombardi (1253-6)*
Ver	*Quaestiones disputatae de Veritate* (1256-9)
CG	*Summa contra Gentiles* (1259-64)
Pot	*Quaestiones diputatae de Potentia* (1265-7)
Qd IX, X, XII	*Quodlibeta* IX, X (1266), XII (de fecha muy discutida y, según Walz, no literalmente suyo, sino reportado por algún discípulo).
I	*Summa Theologiae,* 1ª pars (1266-8)
InPhys	*In VIII libros Physicorum Aristotelis Expositio* (1268)
In Met	*In XII libros Metaphysicorum Aristotelis Expositio* (1268-72)
Qd I, III	*Quodlibeta I (1269), III (1270)*
De Cau	*In Librum de Causis Expositio* (1269-73)
De Un	*Opusc. de Unitate Intellectus contra Averrhoistas* (1272)
De Aet	*Opusc. de Aeternitate Mundi, contra murmurantes* (1272)
Coel	*In libros Aristotelis de Coelo et Mundo Expositio* (1272)
Gen	*In libros Aristotelis de Generatione et Corruptione Expositio* (1272)
III	*Summa Theologiae,* 3ª pars (1272-3)

Para todos ellos he usado la edición leonina (Roma, 1886 ss.), excepto para los *Quodlibeta*, que sólo he podido usar la de Marietti (Turín, 1956). Y también he usado las de este editor para los *Commentaria* de la metafísica y la física (Turín, 1954, 1956); y la del C. S. Pablo para las *Quaestiones de potentia* (Maastrich). En cuanto a ediciones bilingües y comentadas de la *Summa* he usado la de los PP. Dominicos, publicada por la BAC (Madrid, 1947 ss.) y la del P. Pégues (Toulouse, 1906 ss.).

Las obras se dividen en libros, que se indican con números romanos, éstos a veces en distinciones (D), y siempre en cuestiones (q), que a su vez lo son en artículos (a), y en cada uno pueden aparecer objeciones, que se resuelven ordenadamente (ad 1,2,3,etc.). Por fin, el Comentario de Santo Tomás va dividido en Lecciones (L), y éstas —según las ediciones— en párrafos recurrentes (leonina) o seguidos (Marietti). Por ejemplo, InVMetL17§1007 será Lección 17ª de Sto. Tomás sobre el libro V de la Metafísica de Aristóteles —en su numeración latina, que divide el 1.º en dos partes— párrafo 1007 (el que habla de las proporciones numerales y no numerales).

B) Comentarios, Estudios, etc.

ÁLVAREZ LASO, J., C. M. F.: *La Filosofía de las Matemáticas en Santo Tomás de Aquino,* Méjico (Jus), 1952.

AUBERT, J. M.: *Filosofía de la Naturaleza,* Barcelona (Herder), 1977.

BALDUCCI, R. A. (Con Signorelli y Selvaggi): «Si può dimostrare la finitezza dell'Universo?», en *Divus Thomas (Pi)* 27 (1950) p. 376-80.

BOYER, Ch., S. J.: *Cursus Philosophicus,* París (Desclée), 1950. «Creazione», en la *ECI.*

BRUGGER, W., S. J.: *Theologia Naturalis,* Munich, 1959. *Diccionario de Filosofía,* Barcelona (Herder), 1978. «Optimismo», «Posibilidad» en su Diccionario.

CAYETANO (=Fr. Tomás de Vio, O. P.): Comentarios a la Summa de Santo Tomás en la Ed. Leonina; al *De Potentia* en la Edición del C. de S. Pablo, de Maastricht, y al *De Causis.*

COPLESTON, C. F., S. J.: *Historia de la Filosofía,* v. 2° Madrid (Ariel), 1981.

CRENNA, M., S. J.: «Sulla finitezza dimensiva dell'Universo» en *Divus Thomas (Pi)* 27 (1950) p. 374-76.

DALMAU, J., S. J.: *Tractatus de Deo Uno,* Madrid (BAC), 1964.

DONAT, J., S. J.: *Cosmologia,* Innsbruck, 1936.
DTC. cfr. Vaccant.

ECI = *Enciclopedía Cattolica Italiana,* Firenze 1950, cfr. Boyer, Selvaggi y Masi.

ESSER, Th.,O. P.: *Die Lehre des hl. Thomas über die Möglichkeit einer anfangslosen Schöpfung,* Münster (Aschendorffschebuchhandlung), 1895.

FARRATER MORA, J.: *Dicc. de Filosofía,* Barcelona (Herder), 1978.

FERRARIENSIS, F. S., O. P.: *Comentarios a la Summa contra Gentiles,* en la Edición Leonina.

FRAILE, G., O. P.: *Hist. de la Filosofía,* v.2.° Madrid (BAC), 1986.

GARRIGOU-LAGRANGE, R., O. P.: *Dios, su existencia, su naturaleza,* Madrid (Palabra), 1976. «Thomisme» en el *DTC.*

GIERENS, M., S. J.: *Controversia de aeternitate mundi,* Roma (Universidad Gregoriana), 1933.

GILSON; É.: *El Tomismo,* Pamplona (Eunsa), 1989. *Historia de la Filosofía medieval,* Madrid (Gredos), 1972.

GILLON, L. B.: «Thomas d'Aquin (Saint)», Apart. V («Signification historique de St. Th...», especialmente «éternité du mond») en el *DTC.*

GREDT, J., O. S. B.: *Elementa Philosophiae Aristotelico-Thomisticae,* Barcelona (Herder), 1961.

HELLÍN, J., S. J.: *Cosmologia,* Madrid (BAC), 1952. *Theodicea,* Madrid (BAC), 1952. *Theologia naturalis,* Madrid (BAC), 1950.

HOENEN, P., S. J.: *Cosmologia,* Roma (Universidad Gregoriana), 1956.

HONTHEIM, J., S. J.: *Institutiones Theodiceae,* Friburgo (Herder), 1893.

DEGL'INNOCENTI, H., O. P.: «De Infinito in quantitate», en *Divus Thomas (Pi)* 27 (1950) p. 234-40.

ITURRIOZ, J., S. J.: *Metaphysica Generalis,* Madrid (BAC), 1955.

JOHANNES A SANCTO THOMA, O. P.: *Philosophia Naturalis,* Turin (Reider), 1930.

LALANDE, A.: *Vocabulaire technique et critique de la Philosophie,* Paris (PUF), 1956.

LANDUCCI, P. C.: «Si può dimostrare filosoficamente la temporaneità e la finitezza dimensiva dell'Universo?», en *Divus Thomas (Pi)* 26 (1949) p. 340-344. «L'infinitezza dimensiva e temporale dell'Universo é veramente assurda». Ibid. 28 (1951) p. 60-79.

MANSER, G. M., O. P.: *La Esencia del Tomismo,* Madrid, 1953.

MARÉCHAL, J., S. J.: «El Tomismo ante la Filosofía Crítica» (5ª parte de *El punto de partida de la Metafísica*) Madrid (Gredos), 1964.

MASI, R., S. J.: «A propósito di un Universo infinitamente esteso», en *Divus Thomas (Pi)* 27 (1950) p. 370-74. «Continuo», en la *ECI.*

MERCIER, D.: *Métaphysique générale,* París-Lovaina, 1923. «L'unité et le nombre d'après Saint Thomas», en RevNeoschPh, 8 (1901) p. 258-275.

NYS, D.: *Cosmologie,* París, 1928.

PÉGUES, Th., O. P.: *Commentaire français littéral de la Somme Théologique de Saint Thomas d'Aquin,* Toulouse, 1906-1911.

PHILIPS, R. P., O. P.: *Manual de filosofía Tomista,* Madrid (Morata), 1964.

PINARD DE LA BOULLAIE, H., S. J.: «Création», en el *DTC.*

RAST, M., S. J.: *Welt und Gott: Philosophische Gotteslehre,* Freiburg, 1952. «Infinito», «Omnipotencia», «Dios (Libertad de)», en el Dicc. de Brugger.

ROZWADOWSKY, A., S. J.: De optimismo universali secundum Sanctum Thomam, en *Gregorianum* 17 (1936) p.254-264.

SAGÜÉS, J. F., S. J.: *Tractatus de Deo Creante et elevante,* Madrid, (BAC), 1964.

SELVAGGI, F.,S. J.: «Infinito» en la *ECI.* Cfr. Balducci.

SERTILLANGES, A. M. D., O. P.: «Tr. de la Creación», en *Iniciación teológica,* Barcelona (Herder), 1957.

SIGNORELLI, M. Cfr. Balducci.

TEDESCHI, Alb. Cfr. Balducci.

VACCANT, J.: *Dictionaire de Théologie Catholique,* Paris, 1908ss. Cfr. Garrigou-Lagrange, Gillon, Pinard de la Boullaie y Walz.

VIGANÒ, M., S. J.: «Ancora sulla infinitezza dell'Universo», en *Divus Thomas (Pi)* 28 (1951) p. 51-59.

WALZ, P. A., O. P.: «Thomas d'Aquin (Saint)», apart. III («écrits de St.Th».) en el *DTC.*

ZELLINI, P.: *Breve historia del infinito* (con un capítulo sobre Santo Tomás), Madrid (Siruela), 1991.

RAIMUNDO LULIO
Y LA MÁQUINA COMBINATORIA

C. Begoña González Fernández
Profesora de Filosofía
I. B. Tomás de Iriarte

Introducción

El postulado según el cuál, el lenguaje es y hace la realidad, ya podemos hallarlo en los egipcios. Ellos indicarán que decir el nombre es crear la cosa plenamente; también, que la génesis de muchas criaturas se explica mediante juegos de palabras. Estas traducen, al mismo tiempo, un plan del mundo. Thoth, dios lunar de los egipcios y primer ministro de Ra (Hermes para los griegos), como inventor del cálculo y artífice de la escritura, mediante su lengua ordena el mundo ya creado, fijando con los nombres de las cosas, su misma realidad.

En todas las grandes civilizaciones, se acude al poder de las palabras y de los números, y no contentos con que hayan sido los egipcios los genuinos autores que en primicia rigurosa estrenaran una idea de semejante calibre, ciertos especialistas en el tema indican, que nos perderíamos en la «famosa noche de los tiempos» en su rastreo. Más próxima a nosotros es la idea del lenguaje del mundo como espejo del Corán, limitado en sus letras y componentes, pero ilimitado en su potencial combinación. O la mezcla de las veintidós letras sagradas en la interpretación cabalística judía. Por tanto, ya sea lenguaje como combinación de letras o lenguaje como álgebra, es poder de representar la estructura de la realidad, poder de la naturaleza como evocación de lo trascendente. La correspondencia entre el valor fonético de los signos y la realidad puesta en imágenes por la escritura, se desarrollará a partir de la época helenística, pero ya la idea de que cada objeto que exista, se combina y reproduce, está en los atomistas, en el propio Aristóteles y en toda la tradición alquímica conocida. Con respecto al estagirita ya hemos visto, que a través de las figuras silogísticas, el juicio se puede combinar al margen de su contenido.

La máquina combinatoria, como idea, en su aspecto teórico, brillante, pero fracaso rotundo en el práctico, surge en cuanto tal con Raimundo Lulio, autor del «Arte» por excelencia, el cuál, siguiendo reglas automáticas para la obtención de argumentos contundentes y disuasorios para los infieles, permuta letras, predicados y cuestiones mediante el uso de figuras, diagramas y tablas alfabéticas. Sus influencias, no enteramente certeras y precisas, pero sí indirectas, han sido más notables que atinadas, en especial, en el cálculo lógico y algorítmico, en las permutaciones y combinaciones aritméticas y en los programas de software de los PC (computadores personales), añadiendo sin rubor, que de todos estos desarrollos, —salvando todas las distancias y comparaciones posibles— sus intuiciones algebraicas culminaron en este siglo.

No es otro el objetivo de esta ponencia sino el de presentar sucintamente el «Arte» —como lo llamaba su autor—, inscribiéndolo, como aportación lógica, en el contexto de los desarrollos coetáneos, mostrando los influjos recibidos de la lógica árabe y de la cabalística judía para acabar con el análisis de sus proyecciones. Todo ello también para abrir caminos teóricos a otras ponencias e intentando cubrir ciertas lagunas.

I. Gramática y lógica en los siglos XII-XIII

A finales del siglo VIII comenzaron a hacerse los primeros estudios sobre lógica, basados en textos de autores latinos como Cicerón y Boecio .El primer tratado de lógica medieval —aunque deficiente según los expertos—, fue la Dialéctica de Alcuino (804), redactada con toda probabilidad para su inclusión en el trivium (gramática, dialéctica y retórica [1]). Esta obra, escrita en forma de diálogo, incluye las categorías aristotélicas y un estudio sobre la argumentación, pero con una ausencia notable de la *teoría silogística aristotélica.* El primero en dar esta cobertura a los

1. Uno de los componentes de la organización de las enseñanzas durante la escolástica, que junto con el *quadrivium* (geometría, aritmética, astronomía y música) constituyen las denominadas «artes liberales».

razonamientos fue Juan Escoto Erígena (810-877), pero sin que ello contribuyera a una especial consideración y puesta en práctica generalizada, de la lógica, desde un punto de vista disciplinar.

Ya en el siglo IV, Mario Victorino traduce *Las Categorías y el De interpretatione* de Aristóteles, dándonos una nueva visión de las mismas Boecio en los siglos V-VI aproximadamente, junto con el *Eisagogé* de Porfirio, lo que revierte en un auténtico interés por la lógica, y también, por la gramática.Esto significa, por un lado, que Occidente hasta el siglo XII, sólo dispone de todas estas obras citadas, dejándonos a nosotros la encomiable tarea de imaginarnos el ingenio y las componendas invertidas por los interesados, para sacarles el mayor partido posible, y en consecuencia, vivir de las rentas. Por otro lado, en lo que respecta a la gramática, y con la contribución de Abelardo (1079-1142), ésta deviene en especulativa, a partir de la segunda mitad del siglo XIII, como teoría de la significación. Los aspectos comunes que se comparten sobre la gramática son los siguientes:

1.º Enseñar la gramática es dar razón de los hechos gramaticales.
2.º El lenguaje se fundamenta en el ser.
3.º La gramática es general y se puede estudiar haciendo abstracción de las lenguas particulares.
4.º Las leyes del lenguaje son universales, lo mismo que las del ser y el pensamiento.
5.º El inventor de la gramática tuvo que ser un filósofo.

Abelardo en sus análisis y reflexiones ya introducía hechos gramaticales. Él y su obra contribuyeron al ejercicio argumentativo racional sobre las cuestiones de fe que teñirán las discusiones y controversias de la época medieval. Al comienzo de sus quaestio, las opiniones contrapuestas eran enumeradas consecutivamente, demostrándose luego la destreza en la provisión de distinciones sobre el significado de las mismas, hasta lograr la solución del problema y la superación de las dificultades. Sin embargo, no hay en todo ello atisbos de dialéctica en sentido griego, pero sí una preparación del terreno para la utilización de los métodos de discusión racional y de una confianza en la razón, como veremos en los siglos siguientes.

La mente de este autor fue una de las más agudas de la época, hasta el punto de vaticinar los nuevos descubrimientos que en este campo se tendrían que proyectar en el futuro. No obstante, el texto íntegro de su *Dialéctica* no se imprimió hasta 1956. En el apartado de *Las Categorías,* presenta la oratio como vehículo del razonamiento y la introducción del término cópula. Trata el tema de la modalidad y de los futuros contingentes [2], ligándolos al tema de la necesidad y determinación. (Al respecto, Aristóteles sostenía que una proposición es necesariamente verdadera cuando lo es, lo cuál no quiere decir que lo tenga que ser en cualquier momento). Y también, y por último, estudia la silogística. La lógica para él tiene como misión reflexionar sobre las convenciones que otorgan a las palabras sus significados, discerniendo así sobre el contenido de las diversas expresiones. Precisa asimismo —y esto es muy importante—, *que la lógica debe de ayudar a investigar sobre la naturaleza de las cosas, en orden a captar lo que haya de entenderse cuando empleamos las palabras.* Esta tarea ha de centrarse, piensa Abelardo, en la estipulación de convenciones y en el uso de las mismas.

Destacamos la figura de Abelardo, porque en sí misma se erige en paradigmática de la fisonomía que adquiere la filosofía medieval del siglo XII, fisonomía que será retenida hasta el Renacimiento, y también, porque vislumbra los desarrollos posteriores en lógica.

Pasada la primera mitad del siglo XII, ya circula por toda Europa el *Organon* aristotélico, siendo Juan de Salisbury con su *Metalogicon* el primer autor medieval que lo incluye en su obra. Averroes (1126-1198) se convertirá en el comentador oficial del *Organon* y que tantas crispaciones suscitará.

Adentrados ya en el siglo XIII hay que señalar las aportaciones de Alberto Magno (1193-1280) y de Tomás de Aquino (1225-1274). Del primero destacar que, dentro de la tradición más puramente aristotélica, centra algunos de sus estudios en la silogística, encontrando un procedimiento tomado de los árabes, para determinar combinatoriamente, todos los modos posibles de validez de las figuras. Pero si fuésemos a resumir este período desde la óptica que nos ocupa, lo haríamos bajo el rótulo del de las «propositiones mentales» (de la correspondencia entre las estructuras del pensamiento y las del lenguaje), supeditada a la teoría de los tres géneros de discurso —escrito, hablado y mental— que estará siempre presente entre los lógicos medievales. Basadas en el Anima aristotélico, el pensamiento procedería por medio de estas proposiciones formadas de los signos naturales del alma. Avicena (980-1037) añadirá que una forma de alma se identifica con un significado o noción (ma'na) equivalente a la intentio medieval (signo natural de la mente). Este planteamiento que adelanta una posición mentalista, nos aclara que la intentio es el impacto mental del signo en el alma. El lenguaje así, funcionaría con proposiciones con contenido

2. Por futuro contingente se entiende lo que puede o no acontecer, en contraste con lo necesario, por lo que ninguna proposición de este tipo puede ser ni determinantemente verdadera ni falsa. La proposición será verdadera o falsa si el futuro se ajusta o no a lo que enuncia, aún sin que nosotros sepamos lo que va a acontecer.

intencional (hay una gramática del pensamiento que permite hablar sobre el mundo, siendo éste descrito en virtud de las propias reglas del lenguaje, que son, en suma, los procedimientos con los que actúa el alma). En síntesis, todo el significado de las palabras se referiría a conceptos que poseen un status mental como estado del alma, aunque el significado del concepto sólo haga referencia a lo de afuera, el mundo, no a un estado interno, mental.

Las *Summulae* de Pedro Hispano [3] se convirtieron en modelo de manual lógico de la Edad Media hasta el siglo XVII, planteando junto con los temas típicamente aristotélicos (composiciones, predicables, categorías, silogismos, tópicos, etc), los de corte medieval (suposiciones, partículas relativas, ampliación, apelación, distribución, etc).

El problema de los futuros contingentes y la omnisciencia divina tratados por Tomás de Aquino, lleva aparejado el problema de la verdad y el tercio excluso tratados por Aristóteles y que tan encontradas discusiones suscitaron entre los lógicos medievales. En el fondo lo que está sobre el tapete es la cuestión de la *temporalidad o no de las proposiciones verdaderas.* Hay autores que señalan que el uso de los tiempos verbales no tiene nada que ver con la aseveración de su verdad o no. La dilucidación del asunto pasa por una toma de posición clara y definida, en la distinción entre que una cosa es lo que se asevera y otra, lo que las expresiones verbales significan, o lo que es lo mismo, la toma de partido por el nominalismo o por el realismo. Ya esta distinción fue caracterizada por la lógica estoica; la resolución de la disputa lo que plantea es dar cuenta de que se está hablando, desde posiciones distintas, de cosas, incluso diferentes.

Resumiendo, al igual que vemos que cambia la gramática, cambia la lógica. El uso de la *disputatio* produjo un desarrollo en el arte de discutir (dialéctica), conduciendo a los lógicos a elaborar reglas a seguir en las disputationes (por otra lado, verdaderas reglas para un método axiomático,como dirá P. Bohner [4]). También nos encontramos con tratados sobre de *consequentiis* (inferencias entre proposiciones simples o compuestas) y sobre los *sophismatas* (proposiciones que contienen dificultad por carencia o dificultad de construcción). De entre estos últimos tenemos los *insolubilia* (proposiciones que tomadas al pie de la letra se contradicen); los *imposibilia* (contradicciones no resolubles por vía lógica); los *categorematas* (términos dotados de significación propia); los *suppositio* (acepción en que es tomado un nombre), etc.

3. Esta época es prolija en «Summas», entendiéndose por las mismas al compendio de escritos o tratados sobre un mismo tema. La de este autor, consta de dos tratados, uno de corte aristotélico y otro de cosecha medieval.

4. *Medieval Logic. An Outline of its the Development from 1250-c 1400.* Manchester, 1952.

La lógica medieval, citan algunos expertos, contribuyó a la elaboración de un álgebra del lenguaje, esforzándose por disipar sus ambigüedades y por extraer las reglas de su uso exacto. Sobra decir que si en esta época se dan errores de razonamiento es por un desconocimiento de la *lógica del sentido,* y porque la mayoría de los textos originales griegos pasan por diferentes fases de traducción (en el mejor de los casos, del griego directamente al latín; en otros, del griego al siriaco, del siriaco al árabe y de éste, por fin, al latín).

Se ha hecho este recorrido resumido de la lógica medieval, acotado a estos dos siglos para, por un lado, tener referencias de las concepciones que sobre el lenguaje y la gramática se manejan, y por otro, cómo esas concepciones impregnan los discursos y disputas teológico-filosóficas, para proponer la perspectiva que nos ofrecerá Lulio, como diferenciada del resto de la producción teórica de su época.

II. Influencia árabe y judía. Lenguaje algebraico y cábala

> «Todo lenguaje es un alfabeto de símbolos cuyo ejercicio presupone un pasado que los interlocutores comparten».
>
> *El Aleph. J.L. Borges.*

Bajo la influencia del Islam, los árabes recopilaron todas las obras griegas, indias, persas y babilónicas conocidas tras sus conquistas de Persia y Siria, erigiéndose para ello en Bagdad en el 832, bajo el califa Al-Ma'mun, una escuela de traductores. Esta minuciosa labor de traducción, contribuyó en gran medida a la constitución de la lengua árabe como lengua científica internacional, rica en nutrientes gracias a la sabiduría asiático-prehelénica acumulada. Para su expansión precisó de un vocabulario de términos abstractos, al estilo griego, que como lengua semítica que es, y con parentesco con la etiópica, hebrea y asiria, muestra una tendencia a la formulación abreviada, «algebraica», en contraste con la tendencia a la «geometrización» de las lenguas arias (precisamente esa tendencia favoreció su florecimiento en matemáticas, unificándose aritmética y geometría). En cuanto a su escritura, cabe también añadir que, basándose en el antiguo alfabeto nabateo, se enriqueció con el siriaco, consiguiendo su perfeccionamiento hacia el siglo VII.

En este sentido, la caligrafía árabe cobra interés debido a su inclusión como rasgo distintivo de su arte. Sus dos estilos —cúfico y de ángulos y rectas, *nasjí*— tienen inspiración geométrica.

Son veintiocho las letras que componen su alfabeto, con valor fonético-aritmético, y también semántico. Cada letra simboliza un número entero, que lo es a su vez de un objeto que constituido de elementos fraccionados, en su adición reproduce ese número entero. Así, todo el alfabeto tiene su correlato numérico, aunque similar a

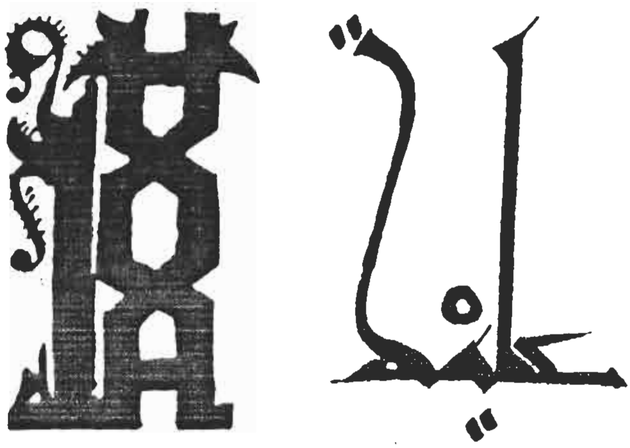


Fig. 1

la transcripción griega. La (alif) es el 1, siendo la unidad, Dios, fuente y símbolo de todo ser. El uno está encarnado en lo múltiple, como arquetipo del universo. La serie de los números restantes y sus infinitas relaciones es la escalera por la que el hombre asciende de la multiplicidad al origen de la unidad. Ello supone que letras y objetos, se combinan y proyectan en el espacio sin límites, engendrando cuerpos geométricos, como reproducción divina. Esto lo podemos constatar en el arte, en sus ojivas, exágonos y estrellas, al proyectarse recta y arco infinitamente, que es como decir que el arte es reflejo y magnificación de lo geométrico.

Según Miguel Cruz Hernández [5], ya en el Corpus Yâbiricum se habla de la «balanza de las letras», afirmándose que sería la más perfecta. En uno de sus libros aparece un curioso análisis simbólico de las tres letras del alifato (alfabeto): ayn (e), min (p) y sin (w) cuyo orden es el expresado (el Iman, el Hu$^{\Lambda}$y$^{\Lambda}$ya y el Profeta). El primero sería el inspirado por Dios, el Profeta, su enviado y el segundo el mediador, que garantiza a Dios a los hombres, siendo sobre todo el ayn la luz transmitida desde Adán, a Set, Abraham, Cristo y Mahoma.

Pero la lengua árabe, de una riqueza exuberante, no solamente ha prevalecido como vehículo de traducción de la sabiduría anterior sino como medio de expresión e interpretación racional necesaria para la transmisión de su propia y original tradición, precisando para ello de una escuela de pensadores, pertenecientes a la primera mitad del segundo siglo de la Hégira (los mutazilitas) que serán los primeros teólogos que se ocuparán de la ciencia del Kâlam. Este término que significa *palabra,*

5. En *Hª del pensamiento en el mundo islámico.* Tomo I.

discurso, designó posteriormente a la teología de pleno, que como ciencia vino a ser la teología escolástica del Islam.

La adhesión a la escuela de los mutazilitas suponía el intento de reconciliación de dos extremos: por un lado, el que da valor absoluto a la razón, y por otro, el de considerar la fe indemostrable racionalmente. Y todo ello orientado a la transmisión de la palabra revelada, como dialéctica aplicada a los conceptos teológicos, pero sin poner en entredicho la fe. Como dialéctica tenía que aportar pruebas y aclarar dudas. Si tenemos en cuenta que cuatro son los sentidos del Corán (exotérico, esotérico, límite y proyecto divino), los mutakalimun mutazilitas debían de transmitir lo que Dios se ha propuesto hacer en cada hombre.

Los árabes en el terreno de la lógica inicialmente se sirvieron del silogismo estoico, de los atomistas griegos y de los hindúes. Posteriormente adoptaron el silogismo aristotélico hasta su relegación progresiva, si bien su alfabeto subsistirá con Lulio y Leibniz, hasta llegar a la fundamentación actual del cálculo lógico, que recoge la orientación imprimida por ellos. Pero en el momento de las caracterizaciones, no se puede hablar de una lógica árabe genuina, porque nada nuevo podían inventar en este ámbito. Toda su lógica, de estilo dialéctico, sigue el patrón griego, viniendo ya recogidos en el Corán la estructura del mundo, su lógica y su lenguaje. El mundo, como espejo del Corán, refleja lo que éste dictamina y trasluce de forma limitada. Nada hay en el mundo que no esté escrito o contenido en el Corán, porque finitas son las posibilidades de expresión y representación. Los químicos árabes son el botón de muestra que confirma esta idea, en el plano de la combinatoria mística de los elementos conocidos como sinónimo de combinatoria del lenguaje. Sin embargo, rastreando detenidamente en este terreno, nos encontraremos con un autor, Al-Ghazzali, filósofo, teólogo y lógico, que según Frances Yates [6] influirá en el Arte luliano y su búsqueda de una «lógica natural», como veremos en un apartado posterior.

Los árabes contaron con dos importantes escuelas, la de Basra y la de Kufa, desarrolladas hacia el siglo IX y dedicadas al cultivo de una «ciencia de las letras», poniendo ambas la gramática al servicio del Corán. En la primera de ellas se destaca que las leyes de la gramática son las mismas que las del pensamiento. Los sonidos (fonética), las palabras y las frases se apoyan en su analogía con la realidad. Por tanto, la ciencia de las letras estudia las relaciones entre la lengua y el pensamiento, las estructuras gramaticales y la lógica. Con la segunda escuela ya dimos cuenta de la idea de la combinatoria del lenguaje como combinatoria de la realidad, cuando observamos como ejemplo, su caligrafía.

6. En *Ensayos reunidos, I. De Lulio a Bruno*, pág. 110 y ss.

A la hora de sintetizar la filosofía judía, no se puede dejar de hacer referencia al *Sepher-Yetsira* (Libro de la Creación) y al *Sepher-Ha-Zohar* (Libro del Esplendor). El primero de ellos ha jugado un papel primordial en la caracterización del pensamiento judío, conciliando, según algunos comentaristas actuales, la vía neoplatónica y el monoteísmo hebraico. Lo más destacable del libro es su lenguaje oscuro, esotérico, lo que llevó a Saadia Ben Josef de Fayum (882-942), pensador judío medieval, a reconvertirlo en filosófico y aunque fracasando en su intento, inauguró la tradición esotérica judía por excelencia, como ya veremos.

La interpretadores de este libro, iniciados para la comprensión de su secreto central, eran los únicos que podían acceder a la oscuridad de sus palabras para descubrir la Tradición, la Cábala.

Derivada de kabbel, significa «recibir», «aceptar». «Qabbalah» significa, *tradición,* o conjunto de especulaciones constitutivas de la filosofía judía, extraídas de meditaciones a través de las cuales se interpretaban letras, anagramas, textos. Igualmente, se identifica con un arte o cálculo para la búsqueda del sentido textual de las palabras. Tiene su origen en especulaciones gnósticas anteriores, en los escritos talmúdicos y en la producción judeo-árabe. Cabe distinguir en ella *dos corrientes:* la contemplativa y la teosófica. Dentro de la última, tenemos al Zohar, que es el segundo de los libros canónicos judíos citados.

Traemos a colación ambos libros, por su relevancia en el terreno del poder del lenguaje y de la palabra. En el *Sepher-Yetsira,* se afirma que las letras del alfabeto hebreo constituyen el fundamento del mundo (Golem) y se encuentran revestidas de poder místico. El origen de la vida surgirá a partir de la palabra, en la inextricable red de combinaciones, de signos y guarismos, por lo que cualquier criatura será el resultado de las combinaciones de las veintidós letras del alfabeto. Tomadas de dos en dos —lo que se conoce como puerta (sha'ar)—, siendo el orden de las letras indiferente y no pudiéndose repetir, el número total de puertas es:

$$C^{2}22=\frac{22x21}{1x2}=231$$

Para obtener estas combinaciones, se utilizaban probablemente ruedecillas con alfabetos escritos en ellas.

En el *Talmud* (biblia judía) se afirma también que combinando letras con valor numérico, damos con la estructura del mundo.

En el libro de el *Zohar* se da un destacado protagonismo a la Torah (espíritu) o Palabra Divina, asimismo revestida con poderes místicos, coincidiendo la letra y el espíritu de la Ley. La Torah es permanencia misteriosa de la revelación del Sinaí, en forma de Sabiduría divina. Según la Cábala, las segundas Tablas entregadas por

Moisés al pueblo judío muestran la manifestación fragmentaria de esa sabiduría, que se convirtió en inaccesible.

Según Schaya [7] la transmisión oral de la Torah interpreta las Escrituras mediante cuatro métodos fundamentales de exégesis que conducen a la Cábala, a la esfera de sod «misterio», como iniciación a la sabiduría divina oculta (Hokhmah Hakabbalah) o también llamada sabiduría de la tradición esotérica. De ahí que la Cábala haga uso de letras y números, siendo los tres procedimientos: la *Gematría* (ciencia del valor numérico de las letras), la *Notariken* (ciencia de las letras primera, media y final de las palabras) y la *Temurah* (ciencia de la permutación y combinación de las letras).

Así la Cábala es la esencia doctrinal de la Torah y de todo conocimiento puro e integral. Este conocimiento, transmitido a los patriarcas de Israel, pasando por Moisés hasta llegar los miembros de la cadena de tradición (esotérica) da cuenta de su genuino significado y alcance, como receptáculo de la sabiduría divina en la letra de la Ley.

En los dos libros, los *séphiroth* (aspectos de Dios como realidad sin límites —en soph—) juegan un papel destacado, siendo Dios el aleph, la ilimitada y pura divinidad. En el Libro de la Creación, como ya indicamos, son números; en el de el Esplendor, esferas.

REPRESENTACIONES DE LA UNIDAD DE LOS DIEZ SEFIROT

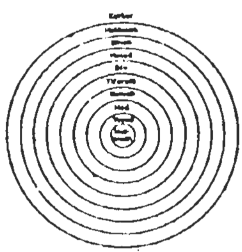


Fig. 2.1. Concentración Divina (o Emanación Sefirótica, vista *ad intra*).

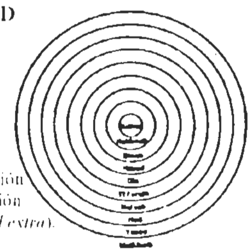


Fig. 2.2 La Radiación Divina (o Emanación Sefirótica, vista *ad extra*).

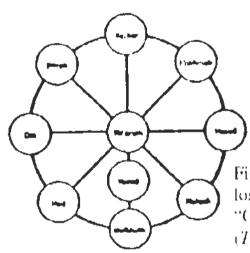


Fig. 2.3. La "Unión de los Sefiroth" en el "Corazón" de Dios (*Tifereth*, por cuanto armoniza y sintetiza todos los otros *Sefiroth*).

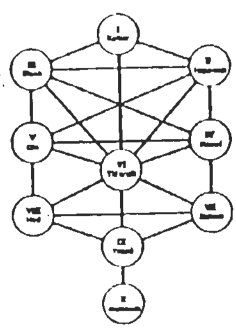


Fig. 2.4. El "Árbol prototípico de los *Sefirot*". (Representado desde el punto de vista de la jerarquía en su posición y relación recíprocas).

Fig. 2

7. En *El significado universal de la cábala*, pág. 17 y ss.

Los *séphiroth,* «numeraciones» de los aspectos divinos constituyen las claves del misterio de la Torah. Son diez y forman las causas eternas de las cosas, divididas en nueve emanaciones, por las cuales, el Séphirah Supremo, «la causa de las cosas» se hace conocer así misma y a su manifestación universal. Ahora bien, Dios es uno, aunque múltiples sean sus manifestaciones. Incluye la infinitud indivisible de posibilidades de la realidad única que es. Es el despliegue de la multiplicidad de la creación. Es único (igual que como observamos en los árabes). El uno se ve así mismo en todas las cosas y a todas las cosas en sí mismo, así, los *séphiroth* se contienen unos dentro de otros en orden jerárquico, por lo que solamente pueden percibirse como un único total. Todas las cosas son los efectos o envolturas simbólicas de los *séphiroth.*

Ahora bien, cada *séphiroth* se ha de corresponder con series de 10: diez mandamientos, diez palabras, etc. Esta concepción es emanatista, pues esos atributos divinos van ascendiendo en torno a un centro, dispuestos a su alrededor en círculos. Aquí vemos que al extrapolar esta disposición al plano cosmológico, nos resulta un sistema homocéntrico de esferas al estilo de Eudoxo.

No obstante, ya se encuentran según Livingstone (1986), casos de permutaciones en antiguos textos asirios. Moshe Idel (1990), menciona que estos procedimientos también se hallan presentes en las fuentes mágicas griegas. Nos habla de un tal Marcos el gnóstico, quien usando las letras y los números, obtenía, con su mezcla, poderes mágicos. Más conocidas por nosotros son las referencias místicas de la numerología cosmológico-pitagórica, para garantizar cómo esta concepción ya estaba vigente antes de los judíos, si bien, la práctica de la permutación en el medioevo se asocia oficialmente con su sabiduría esotérica.

Concluyendo, tanto la aportación árabe como la judía a través de la Cábala sirven de antesala explicativa para la comprensión del Arte luliano. Moshe Idel afirma la influencia de la Cábala en su combinatoria; I.E. Bochenski, de los métodos de la lógica. Sea o no cierto, lo precedente nos podrá servir para una somera aproximación a su «iluminación».

III. Lulio y la lógica inventiva, como pretexto

> «Lógica, mística, el mundo de las letras y de sus vertiginosas, infinitas permutaciones es el mundo de la beatitud, la ciencia de la combinación es una música del pensamiento, pero fíjate, ha de proceder lentamente, y con cautela, porque tu máquina podría proporcionarte el delirio, no el éxtasis». *El péndulo de Foucault.*
>
> *Umberto Eco.*

Abordar una figura (rara avis) como la de Raimundo Lulio (1233-1315-6) desde cualquier ángulo o perspectiva elegida, resulta complicado, máxime cuando estamos ante uno caracterizado como «Doctor Iluminatus» (aunque sobre el particular hay variedad de apelativos: «Doctor Eremiticus», «Doctor Archangelicus» —este último para diferenciarlo del «Doctor Angelicus», Tomás de Aquino—). Esta denominación nada gratuita, de por sí define una personalidad y un estilo de entender y practicar filosofía, y para el tema concreto que nos interesa, —su Arte—, dice mucho, al ser fruto de un acto de contemplación mística.

Después de una vida liviana —como la califica Menéndez y Pelayo— se retira a una de penitencia, religión y ciencia, abandonando incluso mujer, hijos y cargos en la corte del rey de Mallorca, Jaime I, siendo dominado desde entonces, por tres ideas fijas: la cruzada a Tierra Santa, la conversión de los infieles y la propagación y enseñanza de un método racional de demostración de las verdades de fe. Su espíritu inquieto, pero sólido, le conduce a instruir correligionarios, para trasladarse con ellos a donde hiciese falta y convencer, tanto a los doctores de la Iglesia, al papa Honorio IV y a monarcas europeos, de la magnificencia de su Arte y obtener los beneplácitos necesarios para la puesta en marcha del mismo. No tardando en convencerse de que sus empresas no encontraban la acogida exigida, decide llevarla a cabo personalmente, resultando martirizado en Bujía (Túnez), por aquellos mismos a los que pretendía convertir.

Sería prolijo e innecesario citar su bibliografía completa, que algunos comentaristas datan en quinientos libros. La obra que nos ocupa, *Ars Magna* el Gran Arte (1308) contiene el *Ars magna brevis et última*, el *Ars brevis* (como ilustración) y las diversas artes *inventivas*, *demostrativas* y *expositivas*. Análogos son *De ascensu et descensu intellectus*, la *Tabula generalis ad omnes scientias applicabilis* y el *Arbor Scientia*.

Del *Ars Magna*, según P. Erardo W. Platzeck (23),a la hora de acotar su concepción y caracterización se puede afirmar lo siguiente:

1. Se origina como método de contemplación que deriva en medio e instrumento de conversión, cuya finalidad no es otra que la de conocer a Dios.
2. Requiere, por ello, su conocimiento y práctica, de elementos de tipo místico-contemplativos.
3. Es fruto de la iluminación divina, como un acto de intuición omnicomprensiva.
4. Posee un estrato dialéctico escolástico como resultado de un sincretismo platónico-aristotélico.
5. Se afirma como una lógica combinatoria, demostrativo-inventiva.
6. Tiene su fundamento como ciencia universal y base de todas las demás ciencias.

Siguiendo al mismo autor, el Arte en su presentación en trece apartados imita a la axiomática euclidiana, constando de:

1) Definiciones de principios absolutos y relativos.
2) Reglas y connotaciones a base de letras.
3) Figuras axiomáticas (cuatro en total) algo que no aparece en Euclides.
4) Una doctrina de las permutaciones y combinaciones aplicables a los principios.
5) Un sistema de tabulación lógica, no faltando en todo ello los métodos de exhaución.

1) Definiciones de principios absolutos y relativos

Lulio fluctuó en varias de sus obras, con el número de principios, hasta acabar por fijarlos en nueve. Distingue entre los *absolutos* y los *relativos,* diciéndonos que los primeros van referidos a las Dignidades o atributos de Dios, con carácter *ontológico-trascendental,* siendo éstos:

BONDAD, GRANDEZA, ETERNIDAD, PODER, SABIDURÍA, VOLUNTAD, VIRTUD, VERDAD, GLORIA

Los principios *relativos* también son nueve, en este caso, conceptos de relación entre los objetos considerados conjuntamente, estando agrupados en tres grupos de tres, siendo éstos:

I. DIFERENCIA	**CONCORDANCIA**	**CONTRARIEDAD**
II. PRINCIPIO	**MEDIO**	**FIN**
III. MAYORIDAD	**IGUALDAD**	**MINORIDAD** [8]

La primera de las ternas se refiere a los objetos de naturaleza sensible e inteligible; al mismo tiempo, están ordenados de esta manera, por ser comienzo de toda comparación. La segunda se aplica a los opuestos contrariamente a la relación espacial, temporal o causal y la tercera va referida a sustancias y accidentes, aplicable también a opuestos.

El *Ars Magna* añade otros dos grupos que serían: en el primer lugar, DIOS, MUNDO OPERACIONES (de Dios y del Mundo) y en el segundo, AFIRMACIÓN, DUDA, NEGACIÓN.

La fuente de la que dimanan los principios absolutos o Dignidades divinas es objeto de discrepancia por parte de los comentaristas (refiriéndonos a los absolutos; con los relativos no hay dificultad, puesto que ya aclaró Lulio, que no eran susceptibles de ser aplicados a Dios). Hay autores, decíamos, que los establecen desde la

8. Aparece en el *Ars Maqna Generalis et Ultima.*

teología arábiga (Otto Keicher), remontándose incluso, hasta el Corán; Pseudo-Dionisio, pasando por Agustín de Hipona, que los nombra entre una lista más ampliada; Juan de Salisbury, Al-Ghazzali, Cusa, Plotino y el propio Platón, por acudir a la fuente cronológicamente más lejana. Sea como fuere, lo que importa es destacar que las fuentes son compartidas entre los autores, aunque, en primer lugar, los criterios de selección por parte de Lulio no se conozcan y segundo, que mientras unos hablan de principios, otros hablan de nociones; los hay que establecen un orden jerárquico, al estilo del despliegue de la idea de Bien platónico; otros geometrizan, como en el caso de la esfera plotínica, de la teoría de los elementos de Erigena o de la teología circular de Cusa, que Lulio reproduce en su figura «A» como veremos, disponiendo todas las Dignidades en un mismo plano.

Las Definiciones de los principios en Lulio tienen un fuerte componente platónico, en donde la idea es abarcada en la definición, teniendo ésta, por tanto, un referente absoluto. Por tanto, Lulio plantea el sistema dialéctico para acceder a las entidades de Dios. La escolástica hablaba de *trascendentales,* como de aquellos conceptos generales del ser de Dios y del mundo, formados por enunciados simples o disyuntivos. Las Dignidades no admitirían disyunción en ningún caso; la relación entre Dios y el mundo, sí. Por tanto, las Definiciones de los principios absolutos serían trascendentales (1); idénticas al ser divino (2); relacionales con respecto al mundo mediante un concepto abstracto unívoco ajustable a la realidad de las cosas (3).

2) Reglas y connotaciones

Lulio recurre al alfabeto para simbolizar las Dignidades de Dios, siendo éste la A simbólica, Principio inteligible y enunciable, en su absoluta simplicidad y unidad. El resto de las letras hasta nueve, representan una idea básica, un principio o Dignidad atribuíble a la esencia divina en forma absoluta e idéntica a Dios, no como pluralidad suya, ni con esencia independiente de Él. Tendríamos, por tanto:

BONDAD = B
GRANDEZA = C
ETERNIDAD = D
PODER = E
SABIDURÍA = F
VOLUNTAD = G
VIRTUD = H
VERDAD = I
GLORIA = K

Relacionando las Dignidades entre sí, tendríamos: es Bondad, es Grandeza, la Verdad, etc; su Grandeza es Verdad, la Verdad es su Gloria, etc. El número total de juicios posibles serían treinta y seis, según establece la tabla de la figura III:

BC	**CD**	**DE**	**EF**	**FG**	**GH**	**HI**	**IK**
BD	**CE**	**DF**	**EG**	**FH**	**GI**	**HK**	
BE	**CF**	**DG**	**EH**	**FI**	**GK**		
BF	**CG**	**DH**	**EI**	**FK**			
BG	**CH**	**DI**	**EK**				
BH	**CI**	**DK**					
BI	**CK**						
BK							

Comprobable matemáticamente en esta fórmula [9]:

$$C^2\,n = \frac{n(n-1)}{1x2}\ ;\ C^2\ 9 = \binom{9}{2} = \frac{9x8}{1x2} = 36$$

Las reglas al igual que las letras son nueve, en relación estrecha con las definiciones, a la manera de una tópica, con elementos de la Retórica [10]. Las reduce Lulio a cuestiones, siendo éstas:

1. **UTRUM?**
2. **QUID?**
3. **DE QUOD?**
4. **QUARE?**
5. **QUALE?**
6. **QUANTUM?**
7. **QUANDO?**
8. **UBI?**
9. **QUO MODO?**

Todas estas preguntas van referidas al ser en sí mismo y compete a lo sujeto a interrogación. Para Lulio hay una total adecuación entre el concepto pensado y el objeto. Así, a cada idea le corresponden las demás en estrecha conexión con la

9. Cada letra tiene seis significaciones (un principio absoluto, uno relativo, una pregunta, un sujeto, una virtud y un vicio).

10. La *Tópica Retórica* es la doctrina de las reglas para el hallazgo de los materiales apropiados a un tema en controversia.

idea principal. Las cuestiones dan lugar a las definiciones y se aplican a los nueve órdenes de sujetos, según los grados del ser en jerarquía, que veremos más adelante. Esto quiere decir, en mi opinión, que si bien el tratamiento de la ideas como expresiones del lenguaje pudiera indicar que estamos ante un opción nominalista, Lulio supone que la expresión de las ideas formuladas en una «Tópica» expresa realmente el orden natural de las cosas tal y como son en realidad. El supuesto es el de que la razón natural se expresa por igual en los términos y en sus intenciones por un lado, y en los referentes extralingüísticos, por otro.

3) Figuras axiomáticas

Son *cuatro* en total. Según vemos en los gráficos, la Figura A está representada por un círculo, dividido en nueve compartimentos correspondientes a cada una de las Dignidades. Es circular por dos razones: primero, porque así el sujeto se transforma en predicado y viceversa (ejemplo: Bondad grande, Grandeza buena; Dios poder, poder divino). y segundo, porque todas las Dignidades equidistan por igual del centro, no estando una más próxima o alejada del ser de Dios. Todo ello se obtiene, haciendo rotar el círculo.

Debajo de cada letra aparece, tanto un sustantivo, como un adjetivo. Cada uno de los nueve compartimentos está unido a los otros ocho para indicar las combinaciones con los distintos adjetivos (ejemplo: la Bondad es grande, la grandeza es buena; Dios es poder, la potestad es divina).

Finalmente esta figura contiene el fundamento de los principios y la igualdad de los conceptos.

La Figura T está constituida por los *principios relativos* y se representa mediante un círculo en el que se inscriben tres triángulos, en función de la agrupación ternaria que ya vimos, insertados sus vértices con cada principio relativo. Estos vértices se disponen de tal forma que coincidan con las letras de la Figura A. La combinación con la figura anterior, se lleva a cabo siguiendo los propios principios.

La Figura III está compuesta de treinta y seis compartimentos, resultantes de la combinación de las dos figuras precedentes, según expusimos en el apartado correspondiente.

La Figura IV es una especie de máquina compuesta por tres círculos concéntricos, de mayor a menor. El más pequeño gira sobre el mediano y éste sobre el mayor, que permanece fijo. Cada uno contiene los nueve compartimentos con las nueve letras del alfabeto. Girando todos los círculos, se obtienen las posibles combinaciones.

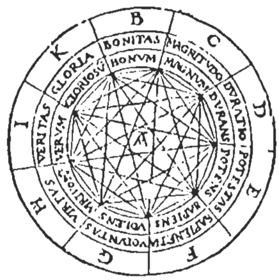


Fig. 3.1*b*. Primera figura. pp. 10-11.

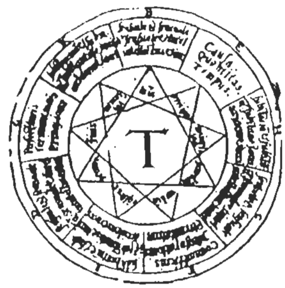


Fig. 3.1*c*. Segunda figura. pp. 10-11, 31.

Fig. 3.1*d*. Tercera figura. pp. 10-11.

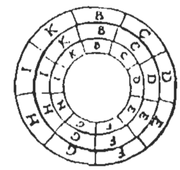


Fig. 3.1*e*. Cuarta figura (con los dos círculos interiores giratorios). pp. 10-11, 31, 18.

Fig. 3

4) Combinaciones y permutaciones

En este punto nos enfrentamos con el meollo central del Arte, al que debe su denominación, poniendo su ideal en el pensamiento deductivo-matemático. En este sentido, siguiendo a Erardo W. Platzeck, se nos dice que la base y fundamento de la combinatoria luliana, estriba también en la doctrina de los correlativos y en la de las Dignidades, teniendo la primera su hallazgo a través de la Figura IV. Las combinaciones incluyen cada una tres elementos, ninguno de los cuales se puede repetir dentro de una misma combinación. Se trataría de una combinación de tercera clase. El orden de combinación viene dado por las letras del alfabeto. Tenemos pues,

$$\binom{6}{3} = \frac{6x5x4}{1x2x3} = 20 \quad \text{Combinaciones}$$

1. BCD	**11. CDb**	**17. Dbc**	**20. bcd**
2. BCb	**12. CDc**	**18. Dbd**	
3. BCc	**13. CDd**	**19. Dcd**	
4. BCd	**14. Cbc**		
5. BDb	**15. Cbd**		
6. BDc	**16. Ccd**		
7. BDd			
8. Bbc			
9. Bbd			
10. Bcd			

Pero esto sería el resultado para tres principios absolutos (BCD) y sólo tres principios relativos (bcd), que daría a su vez en total veinte combinaciones para sólo tres principios relativos. El total de combinaciones obtenidas con el resto llegaría hasta 1680.

Hay ochenta y cuatro encabezamientos de grupo, constando cada grupo de tres principios absolutos. Como la Figura A pone nueve principios absolutos, en una combinación del tercer orden sería:

$$\frac{9x8x7}{1x2x3} = 84$$

Para saber la cifra total de combinaciones, multiplicamos

$$\binom{9}{3} x \binom{6}{3} \text{ tenemos } \frac{9x8x7}{1x2x3} \ x \ \frac{6x5x4}{1x2x3} = 1680$$

Esta sería su traducción matemática, traducción que Lulio no efectuó, ya que la combinatoria la estableció en el plano lógico exclusivamente. Para ello recurrió a las pruebas de demostración y es aquí donde pasamos a hablar de la doctrina de los correlativos, como uno de los pilares de la lógica luliana, en donde se conexionan los principios absolutos y relativos, en base a relaciones de semejanza y analogía. Para Lulio, la semejanza se da de cuatro maneras:

1. Recíproca participación de las Dignidades entre sí (la participación de las Ideas platónicas).
2. Semejanza accidental.
3. Semejanza de los correlativos de una misma Dignidad o de cualquier principio absoluto o relativo (bonificans bonificabile, y el acto de bonificar como correlativos comprendidos en la Dignidad Bonum).
4. Semejanza entre los grados del ser en jerarquía (no suponiendo esa jerarquización una aceptación de la doctrina de la emanación neoplatónica [11]). Los grados del ser estarían representados a través de nueve sujetos:

DIOS	SER HUMANO	SER VEGETAL
ANGELES	REINO DE LA IMAGINACIÓN	REINO DE LOS ELEMENTOS
CIELO	SER SENSITIVO	CAUSA INSTRUMENTAL

Los principios absolutos y relativos también se correlacionarían por transitividad, suponiendo dependencia efectiva.

11. Esta doctrina supone que lo inferior procede de lo superior; así lo emanado se identifica con el ser del que emana, como despliegue del mismo. Dios creador descienden en sus criaturas y éstas participan de él.

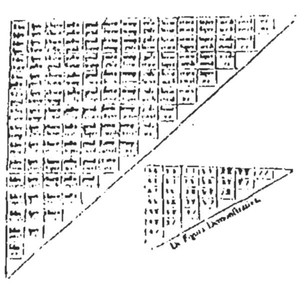
Las pruebas de demostración serían tres:
1ª prueba. GRADO POSITIO (inferencia del efecto a la causa).
2ª prueba. GRADO COMPARATIVO (lo mayor es causa de lo menor).
3ª prueba. GRADO SUPERLATIVO (Dios el argumento por analogía).

Estas tres maneras de probar ya aparecen en la *escuela de Chartres* a través de los primeros ensayos de una gramática especulativa; en la antigua Stoa [12] y en los neoplatónicos. Lo que separa los nueve órdenes de sujetos son los puntos trascendentales, y que se corresponden con la teoría de los grados de abstracción aristotélico. Esos tres órdenes son: los vinculados a los sentidos y a la fantasía, los espirituales y los divinos.

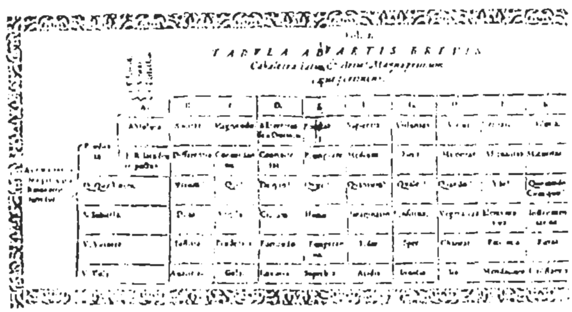
5. *Tabulación*

En el *Ars brevis,* Lulio elabora una «tabula generalis», en la que las combinaciones de las letras B a K se disponen en columnas, siendo éstas [13]:

De Secunda Figura
IPSIUS
V



(3*a*) Combinaciones de vicios y virtudes, pp. 29, 37, 39, 246n, 147.



(14*e*) Alfabeto de las *Ars brevis*, pp. 79, 91, 246n, 147.

Fig. 4

Una vez expuesto el Arte en sus apartados principales, y descritos sus componentes y mecanismos, lo primero que nos plantearíamos sería la disyuntiva ¿Arte o lógica?. Según Frances Yates, el propio Lulio formuló diversas definiciones de su Arte, pero en estrecha relación con la lógica, yendo incluso más allá al sugerirnos que ésta tiene un componente metafísico, puesto que se fundamenta en las intenciones

12. La Stoa fue fundada por Zenón de Citio en el siglo IV.

13. Tomadas del libro de F. Yates antes citado.

primeras, en el principio óntico supremo que es Dios. Por tanto, la verdad lógica y metafísica, al mismo tiempo, es real y divina. Pero el verdadero lógico, nos dice el tándem Lulio-Yates, es el *artista,* puesto que la búsqueda y el encuentro de la verdad compete al artista, no al lógico (en referencia al lógico ordinario). El artista trabaja más rápido que el lógico, y para ello, añade nuestro autor: «*Un hombre que tenga una óptima inteligencia y fundamento en lógica y en ciencias naturales diligentemente podrá aprender esa ciencia en dos meses, uno para la teoría y otro mes, para la práctica* [14]». La propia Yates, haciéndose eco de otros especialistas en lógica luliana, cuestiona esa asociación tan optimista, haciendo ver que el autor habla desde categorías contrapuestas a las nuestras. En tal caso, su intento es hacer una lógica de la naturaleza, «*un Arte de Pensar calcado sobre la estructura lógica del universo* [15]». La lógica del universo es la razón natural, y esa lógica tiene que ver con la *teoría de los elementos* [16], ya que éstos, según Yates, son los intermediarios entre Dios creador y las cosas creadas. Las Dignidades o principios absolutos son las causas primordiales creadoras, y los elementos, esos intermediarios antedichos, efectos del poder creador. Aquí analiza la autora la influencia de Erigena, que en su obra *De divitione naturae* plantea esa teoría, por la cuál el universo creado deriva de las causas primordiales a través de los elementos que se constituyen en componentes de creación (sobra decir que las causas primordiales serían las Dignidades lulianas).

En los siglos que van del XV al XVII, la aportación de Lulio levanta entusiasmos, pero también críticas. En términos globales, los defensores argumentarán que Lulio tuvo muy en cuenta los aspectos fundamentales de la lógica aristotélica (las categorías, las definiciones, los predicables); también cómo las razones necesarias se constituyen en verdades de fe (como anticipo a las mismas en Spinoza); que su lógica trata de primeras intenciones, de la infalibilidad y certeza de los principios supremos. Y por último, de la autoevidencia de las reglas.

Sus detractores alegarán su declarado estilo antidialéctico, no ajustado al resto de la producción lógica de su tiempo; la artificiosidad del Arte, reductible a un proceso mecánico; el confundir erróneamente los planos óntico y lógico, el uso desmedido de una teología positiva, fallo en las definiciones, etc. En este sentido, el *Ars Magna* fue tildada con calificativos de «Arte deceptoria», «máquina de pensar», «jerga cabalística», «Arte impostor», etc. Es fácil recordar las palabras de desprecio de

14. Lulio, *Opera.* pág 663. Estrasburgo, 1617.

15. En el libro de F. Yates, pág. 109.

16. Lulio, *Ars Demostrativa,* Vols. III y IV. Maguncia.

Francis Bacon en la «Nueva Atlántida», de René Descartes en el «Discurso del Método», cuando refiriéndose a la lógica del Arte Luliano expone que sirve para «*hablar sin juicio de lo que uno ignora, pero no para aprenderla*», y sobre todo, de Leibniz que sentencia: «*es sólo la sombra del verdadero arte combinatoria(...) y se halla tan alejada de ese Arte como lo está el fanfarrón del hombre elocuente, y al mismo tiempo, sólido*». Con respecto a éste último autor llama la atención que los diferentes historiadores de la filosofía coincidan en que a Leibniz le entusiasmó la idea del Arte, para fundamentar el suyo propio al mismo tiempo que el Ars Generalis cartesiano. Lo que si es evidente es que Lulio al igual que estos dos autores racionalistas persiguen la Ciencia por excelencia.

Yates afirma incluso en su libro, que Lulio con su Arte «prefigura al mago» estando el lulismo enlazado «con la filosofías hermético-cabalistas del Renacimiento», como tendremos ocasión de ver.

IV. Después de Lulio, la máquina combinatoria como máquina lógica

> «El mundo de las máquinas trata de encontrar el secreto de la creación: letras y números». El péndulo de Foucault. *Umberto Eco.*

Si parece ser que el Arte luliano primicia el cálculo lógico, como afirma Bochenski, sobre este asunto, ya hubo un autor en el siglo X denominado Garland «El computista», que se adelantó al hacer un tratado sobre el cálculo de almanaques. Mucho más cercana en el tiempo es la «máquina de predecir acontecimientos», construida por los astrólogos árabes entre los siglos X y XI. Porque lo que nos importa es indagar a qué condujo la idea del Arte en el terreno práctico y técnico.

Entre 1623 y 1632 Pascal construye la primera sumadora mecánica de seis columnas formadas por seis ruedas dentadas con diez posiciones cada una; cada vez que una rueda da una vuelta, mueve la posición de la siguiente (Leibniz la perfeccionó hasta lograr en 1694, que cumpliera la función de multiplicación). Este autor se puede considerar, en términos globales, como el más directo precursor de las máquinas combinatorias, desde un punto de vista formal. Hay que esperar, sin embargo, hasta el desarrollo de las técnicas mecánicas y eléctricas, y sobre todo, al comienzo de la lógica formal, para darles carta blanca.

La primera máquina lógica (en este caso, se trataba de un piano), fue la de Stanley Jevons, ideada para resolver ecuaciones booleanas y dar valores de verdad lógicos, perfeccionándose posteriormente con la incorporación de circuitos eléctricos. Otra gran máquina fue la de C.E. Shannon, traduciendo los valores veritativos al sistema binario 1 y 0, pero siendo la primera máquina calculadora la de Kalin-

Burkhardt. El inventor español Torres y Quevedo (1852-1936) escribió en 1914 un Ensayo sobre el automatismo y construyó varias máquinas de calcular.

Pero entre los precursores y genios fundadores nos vamos a ceñir a Charles Babbage (1792-1891) y a Alan Turing (1912-1954). El primero de ellos, figura polifacética de gran prestigio (matemático, astrónomo y economista), concibió dos calculadoras, la máquina diferencial y la máquina analítica, la primera, especializada en operaciones astronómicas y en la elaboración de tablas matemáticas; la segunda, ideada sólo parcialmente, lo fue con una configuración cercana a la de los ordenadores. Esta máquina, según su concepción, poseía una capacidad de memoria capaz de almacenar hasta mil datos, estando equipada con una unidad de control para interpretar y ejecutar instrucciones, y otra unidad de salida para interpretar los resultados del proceso.

Babbage pensaba que las funciones del cálculo y de la memoria tenían que disociarse, y que las tablas numéricas requerían su mecanización, en aras de una mayor rapidez de ejecución.

Sin embargo, hay autores que indican que no se puede hablar de él como precursor de las máquinas pensantes, ni artífice de la idea del procesamiento de la información automática. Nunca supuso este autor la supresión de la intervención humana en las operaciones de cálculo. Fue asimismo un gran observador de todas las máquinas y métodos de trabajo de su tiempo (ideó precisamente sus dos máquinas, inspirándose en el barón de Pony, director del catastro de París, el cuál organizó una fábrica para el cálculo de tablas matemáticas, aplicando los principios de la división del trabajo).

Alan Turing, lógico y matemático, interviene en la historia de la computación con un artículo que publica la descripción de una máquina abstracta, capaz de efectuar cualquier tipo de cálculo. Su modelo o «máquina universal» sirvió para su participación en la génesis de las calculadoras electrónicas y en la construcción de los primeros ordenadores.

Su modelo consiste en un numero de instrucciones proporcionadas para dar pasos secuenciados. Esos pasos, que se constituyen en el programa del modelo, ejecutan tareas específicas que se cumplimentan, una vez dados todos los pasos y seguidas todas las instrucciones. Su máquina es el equivalente lógico del ordenador actual, aunque también se convirtió en el soporte de la inteligencia artificial.

V. Balance de la aportación Luliana

Al citar los aspectos biográficos de Lulio, expusimos la idea de su afán encomiable por hacer de su Arte un instrumento para la conversión de judíos y árabes.

Conocedor incluso de la lengua árabe, parece cierto que tomó contacto con la obra de Al-Ghazzali, encontrando en su filosofía natural visos de conexión con la astrología. Por tanto, es innegable la influencia de ambas culturas, quizá como un medio para combatir al enemigo, en su propio terreno y con sus mismas armas.

Igualmente cabe decir otro tanto en lo referente a la cabalística, omnipresente en toda su combinatoria. Los *séphiroth* o aspectos de Dios son el equivalente de sus homónimos cristiano e islámico, teológicamente hablando. Esa constante búsqueda luliana del infinito, estará presente en la filosofía y la ciencia de los siglos XVII y XVIII, en autores como Bruno, Leibniz y Newton, entre otros.

Lulio recogió la doctrina de los atributos divinos directamente de la tradición agustiniana, extrapolándolos a su Arte, si bien en toda ella subyace la doctrina neoplatónica de la emanación.

Pero la conclusión más notoria a establecer, es la escasa imbricación de Lulio en la lógica «oficial» de su tiempo. No resulta gratuito que los historiadores de la filosofía que consultemos, apenas dediquen una docena escasa de líneas —en el caso de los que lo hacen— a su obra, como hito significativo de relevancia histórica, desde el punto de vista metodológico. Su lógica —y ello salta a la vista— no presenta rastros aristotélicos, ni siquiera medievales. Su diseño se centra en una dialéctica del ascenso bonaventuriano, desde lo divino en la creación, hasta el Dios creador. Pero este ascenso no es deductivo; es *reconstructivo* de la realidad conceptual, de las esencias particulares, en la esencia divina. En el mismo, se dan los principios trascendentales —concordancia, causalidad, identidad— para, a partir de ellos, iniciar el descenso.

Jugar con la dialéctica ascenso-descenso, deductivo-inductivo, no era pretensión, ni mucho menos de Lulio. Establece, por así decirlo, una especie de sincretismo entre ambas tendencias, sin decantarse enteramente por ninguna. Sus razones son necesarias, eternas, arquetípicas, pero no en sentido platónico, sino mental, que visto desde nuestra perspectiva, sonaría a mentalismo lingüístico, pudiendo parecer que sugiere un cuasi nominalismo. El automatismo combinatorio está puesto al servicio de la demostración de las verdades de fe o *razones necesarias,* basadas en la fuerza natural de las razones lógicas. Esas razones necesarias serían, pues, razones de *congruencia,* surgen naturalmente cuando la inteligencia trabaja sobre bases de indudable certeza (adquirida por fe o por principios tautológicos). El objeto demostrado y la conexión lógica entre antecedente y consecuente así, sí coinciden. Todo encaja, puesto que hay ligamen entre sujeto y predicado, causa y efecto.

Ahora bien, y siguiendo a Erardo W. Platzeck, el principal fallo de todo el planteamiento luliano va referido al olvido de una «teología negativa». Aquí se centran y ceban todas críticas al Arte. Si en esa lógica del ascenso, las criaturas participan de los atributos de Dios, quiere decir que comparten su esencia; al mismo tiempo, esos atributos, establecidos a través de las definiciones dan carácter mental a los mismos, lo que es inaceptable a la esencia divina. Si las verdades divinas se demuestran con absoluta y total independencia de la razón, su método contiene implícitamente el supuesto nominalista de que las definiciones y operaciones lógicas dependen de un sujeto pensante, obligando a Lulio a defender una postura metafísica antirrealista, que repudia. Por tanto, se cae en un error lógico y ontológico.

Lulio rechaza la doctrina emanatista neoplatónica por presuponer una posición panteísta. En el tema de las Dignidades entra en juego la habilidad persuasoria de su Arte a través de la combinatoria, como artificio que conduce a las mismas, adquiriendo así el lenguaje una acepción mecanizada infinita, para la captación de la infinitud divina, lo que equivale a decir que a través de las reglas, potencialmente alcanzaríamos a comprender la infinitud.

Por último, una lógica metafísica, basada en un conjunto finito de reglas aplicadas, nos daría como resultado una infinita variedad de combinaciones, resolviendo por medio de la razón cualquier disputa concerniente en materia de fe. Ahora bien, el salto dado al indicarnos que por medio de combinación de símbolos, es posible acceder a la realidad divina, se convierte en «un eslabón perdido».

BIBLIOGRAFÍA

ABBAGNANO, N. *Historia de la filosofía.* Vol. I. Ed. Hora. Barcelona, 1981.

AUBERT, J.P. y SCHONBERG, R. *Inteligencia artificial.* Ed. Paraninfo. Madrid, 1989.

BOCHENSKI, I.M. *Historia de la lógica formal.* Ed. Gredos. Madrid, 1985.

COPESTON, F. *Historia de la filosofía.* Vol. III. Ed. Ariel. Barcelona, 1986.

CRUZ HERNÁNDEZ, M. *Historia del pensamiento islámico.* Vol. I. A. Univ. Madrid, 1981.

FAUVEL, J. y GRAY, J. *The history of Mathematics: A Reader.* McMillan. Londres, 1987.

FRANCK, A. *La Kabbala o la filosofía religiosa de los hebreos.* Ed. Humanitas. Barcelona, 1990.

GILSON, E. *La filosofía en la Edad Media.* Ed. Gredos. Madrid, 1982.

IDEL, M. *Golem. Jewis magical and mystical traditions on the artificial anthropoid.* Univ. of New York Press, 1990.

KNEALE, W. y M. *El desarrollo de la lógica.* Ed. Tecnos. Madrid, 1972.

LIVINGSTONE, R. *Mystical and mythological explanatory works of assyrian and babylonian scholars.* Oxford Clarendon Press, 1986.

LULIO, R. *Ramón Llull: obra escogida.* Ed. Alfaguara. Madrid, 1978.

PLATZECK, P.E.W. *La combinatoria luliana.* Vol I y II. Revista de filosofía n.º 47-48. Madrid, 1953-54.

SCHAYA, L. *El significado universal de la cábala.* Ed. Dédalo. Buenos aires, 1989.

SERRES, M. *Historia de las Ciencias.* Ed. Cátedra. Madrid, 1971.

SUREDA BLADES, F. *Bases criteriológicas del pensamiento luliano.* Episcopado de Santander, 1934.

TURING, A.M. y otros. *Mentes y máquinas.* Ed. Tecnos. Madrid, 1986.

YATES, F. *Ensayos reunidos, I. De Lulio a Bruno.* Ed. F.C.E. México, 1991.

CIENCIA Y FILOSOFÍA EN EL SIGLO XIV

Jesús Sánchez Navarro
Dpto. de Historia y Filosofía de la Ciencia
Universidad de La Laguna

El largo periodo comprendido entre los años 500 y 1500, ambos d. C., se presenta ante nuestros ojos como una época remota, difícil de comprender y, sobre todo, confusa. No en vano, a esa época se la suele llamar Edad Oscura e incluso su nombre técnico, Edad Media, ya sugiere la idea de que es un simple periodo de transición entre la antigüedad clásica y nuestros mucho más próximos antepasados «modernos». Tal vez esta visión sea acertada para la Alta Edad Media, los años transcurridos entre el s. V y el s. XII. Sin embargo, el periodo que transcurre desde mediados del s. XIII hasta el s. XV está mucho más cercano a nosotros de lo que puede sugerir esa imagen sombría. Este cambio cualitativo, cuya culminación se produce en el s. XIV, es consecuencia de una combinación de distintos factores acontecidos durante los siglos inmediatamente anteriores.

Un elemento importante para este despegue cultural fue el final de las invasiones germánicas. Desde las grandes invasiones de finales del s. V, y a pesar de la constitución del imperio carolingio y, posteriormente, del germánico, la inestabilidad había sido una constante en Europa, sometida a continuas incursiones guerreras de los pueblos del Norte (vikingos, varegos, normandos, etc). La conquista de Sicilia por aventureros normandos a finales del s. XI marca el final de esa inestabilidad y da paso a un periodo de relativa calma en el que la violencia se canaliza en otras direcciones, frecuentemente bajo los auspicios de la religión (Cruzadas, guerra contra los árabes en España, caballeros teutónicos en Polonia, etc) o como guerras feudales entre señores y vasallos (guerra de los cien años, guerra borgoñona, etc) sometidas a «reglas caballerescas» y muy diferentes de las destructivas e incontrolables invasiones precedentes. Esa «regularización» de la violencia permitió el desarrollo de los núcleos urbanos y su paulatino distanciamiento del poder feudal.

Más importante aún fue la confrontación entre el Imperio y el Papado en la guerra de las investiduras. Planteada como un enfrentamiento en torno a la potestad de nombrar obispos, se trata en realidad de una lucha frontal entre los dos grandes poderes de la época, el eclesiástico y el secular. El resultado final es la separación y debilitamiento de ambos, lo que tendrá profundas consecuencias a lo largo del s. XIII y, sobre todo, del XIV. La Iglesia pierde parte de su capacidad de intervención directa en las monarquías (legitimando reyes, prescribiendo deberes, etc), que había sido uno de sus principales mecanismos de control hasta entonces. Tal estado de cosas culmina con la reforma gregoriana que, como compensación, aumenta el férreo control papal sobre el clero mediante el doble principio de la subordinación obligada de los clérigos para con sus príncipes gobernantes, pero al mismo tiempo de absoluta obediencia a la ley canónica y al Papado.

Esta nueva situación tiene una influencia fundamental sobre las disputas en torno a las relaciones entre razón y fé, así como en la interpretación del aristotelismo. Si los clérigos tenían la obligación de obedecer, salvo conflicto, tanto a los príncipes gobernantes como a la autoridad eclesiástica y en todo contencioso el Papado era para ellos la autoridad última, era necesario probar que razón y fé debían ser complementarias, o al menos no contradictorias, y que en cualquier caso la segunda tenía prioridad sobre la primera; el conflicto entre poderes debía ser justificado racionalmente y achacado al mal uso del poder o a la sinrazón del gobernante. A lo largo del s. XIII asistimos a los intentos desesperados por mantener esa supremacía del Papado, intentos que afectarán incluso a la interpretación de Aristóteles y culminarán en 1277 con la prohibición de la enseñanza de numerosas tesis aristotélicas (las 219 tesis averroístas, pero que también incluían varias tesis tomistas). Con esta prohibición se inicia la crisis de la síntesis tomista entre el aristotelismo y la doctrina católica, crisis que alcanza su apogeo con la revuelta en el s. XIV contra la filosofía de Tomás de Aquino y contra la filosofía natural aristotélica y que permitirá el desarrollo del nominalismo, con su insistencia en el valor de la experiencia para todo conocimiento, la teoría de la doble verdad, la teoría del ímpetus y las críticas astronómicas a los principios aristotélicos, elementos todos que marcarán el desarrollo de la ciencia hasta el s. XVI. Precisamente cuando la Iglesia pretenda recuperar la síntesis tomista como doctrina oficial ante los excesos nominalistas del s. XIV, lo hará sobre una base fuertemente socavada por las críticas de Oresme, Buridán y otros que, de este modo, habrían preparado el camino a Copérnico, Galileo, Bacon o Descartes.

Lo curioso es que todos estos interdictos y prohibiciones ni siquiera sirvieron para su propósito. No sólo se siguió comentando a Aristóteles en las universidades a pesar de la prohibición, sino que la autoridad papal entró en crisis a raíz del exilio de Avignon (1309-77) y sobre todo del Gran Cisma (1378-1417), cuando llegó a haber incluso tres Papas al mismo tiempo. Hasta tal punto fue profunda esa pérdida de autoridad que clérigos como Ockam reclamaban el derecho del poder secular a intervenir en los asuntos de la Iglesia y diversos legisladores nacionales se rebelaron contra las pretensiones universalistas del Papado. De la misma manera, esta crisis permitió el distanciamiento de las universidades de la autoridad eclesiástica (se inician aquí las polémicas sobre la libertad de cátedra) y dio origen a la tradición de asilo por parte de los distintos monarcas o de las ciudades libres a los condenados por interdicto papal.

En lo que respecta al Imperio, su pérdida de poder es automática a partir de la crisis del s. XII y se desarrolla un nuevo modelo de gobierno en dos direcciones. De un lado, comienzan a constituirse las monarquías occidentales centralizadas frente a la nobleza feudal. En este proceso de constitución las monarquías se apoyan en los habitantes de las ciudades, a los que conceden a cambio ventajas y privilegios. De otro, el poder imperial se diluye entre los pequeños príncipes alemanes y, sobre todo, las ciudades-estado libres que se coaligan entre sí mediante lazos político-comerciales constituyendo sociedades tan poderosas como la Liga Hanseática o la Liga Lombarda.

Todo ello cristaliza en una cuestión fundamental no sólo para el cambio cultural del s. XIV, sino para todo el desarrollo posterior de la ciencia y la cultura modernas: la recuperación de las ciudades y el rápido desarrollo de una clase comerciante y artesana celosa de su independencia y sus privilegios. La sociedad de la Alta Edad Media había sido fundamentalmente agraria y sometida a relaciones de servidumbre de y con la tierra. A raíz de las invasiones las ciudades se habían vaciado literalmente [1]. El aumento de la población a partir del s. XI, el incremento de la producción agrícola debido a las innovaciones técnicas introducidas desde el s. XII y las colonizaciones planeadas de tierras de los siglos XII y XIII, la creciente estabilidad política y el desarrollo comercial desde el s. XI, etc., contribuyeron decisivamente al crecimiento paulatino de las ciudades. Habitadas inicialmente por miembros de la

1. Basta un ejemplo: Roma había llegado a tener un millón de habitantes en el s. I y a comienzos del S. VII su población se había reducido a 40.000 ¡y seguía siendo la mayor ciudad del occidente cristiano!

baja aristocracia, oficiales de las grandes iglesias y grandes mercaderes, junto con artesanos organizados gremialmente, las ciudades se convierten en el principal agente de cambio social de la época y tienen una gran importancia política, sea como apoyo económico a las monarquías a cambio de una autonomía cada vez mayor, sea como centros político-económicos en el caso de las Ligas. Y no sólo tienen importancia política, sino que dan un impulso fundamental al desarrollo del conocimiento (la ciencia, y la cultura en general, son fenómenos esencialmente urbanos) en varios aspectos:

a) Favorecieron, y a su vez fueron favorecidas por ellos, el desarrollo comercial e industrial y por tanto las innovaciones técnicas; aunque el desarrollo técnico no repercuta directamente en el desarrollo de la ciencia, si influye decisivamente en la forma de considerar la relación con la naturaleza, la dependencia de la autoridad «académica» y el papel de la experiencia y la experimentación.

b) Permitieron que aumentara el número de gente letrada y que la información fluyera, dentro de las limitaciones de la época, con mayor rapidez y eficacia; lo que es más importante, facilitaron que creciera el número de gente letrada fuera de la iglesia (mercaderes, administradores al servicio real o de la ciudad-estado, etc); igualmente dieron cobijo a un número creciente de clérigos de órdenes menores e incluso clérigos «por libre» [2], que pululaban por las capillas imperiales, como embrión de servicios civiles, y por las universidades, como maestros de artes, la mayoría de los cuales constituyeron el bando de los filósofos en las polémicas con los teólogos durante los siglos XIII y XIV.

c) Fueron fundamentales para el desarrollo de las universidades y su separación de la autoridad eclesiástica.

Todos estos factores y algunos más (como la sustitución de la servidumbre campesina por el pago de rentas fijas en el s. XIV, etc) determinaron el cambio cultural que se produjo a lo largo del s. XIV. Sin embargo, junto a ellos hay otros cuatro, internos a la propia evolución cultural, que tuvieron una importancia aún más decisiva: la recuperación de los textos clásicos grecoromanos, la polémica entre dominicos y franciscanos, la revolución técnica de los siglos XII y XIII y, especialmente, la constitución de las universidades.

La recuperación de los textos clásicos

Las invasiones germánicas no sólo supusieron la caída del Imperio Romano de Occidente, el despoblamiento de las ciudades y la ruptura del tejido económico y

2. Tonsurados, pero sin tomar las órdenes, lo que les permitía disfrutar de las inmunidades legales del clero, pero sin sus obligaciones.

social, sino también el distanciamiento, incluso aislamiento, respecto al Imperio de Oriente. Esta profunda crisis tuvo también como consecuencia la pérdida de la cultura clásica. Y no sólo se perdieron contenidos y tradiciones, sino también el conocimiento de la lengua griega y el contacto físico con los textos originales. Los escasos restos que perduraron provenían de los profusos y confusos compendios escritos por enciclopedistas como S. Isidoro o Beda, en los que se alternaban conocimientos científicos elementales con supersticiones y errores de bulto, o de los tratados filosófico-teológicos de los gnósticos y neoplatónicos tardíos, éstos con el agravante de ser sospechosos de lesa herejía. Incluso si algún texto filosófico clásico había logrado llegar, lo había hecho a través de una cadena de copistas de nula fiabilidad. Las propias dificultades de la época, más interesada en desarrollar una economía de subsistencia y un mínimo entramado político-social, permitían pocas veleidades científico-culturales.

La misma religión contribuyó a este distanciamiento: la necesidad de articularse completamente y las feroces disputas teológicas típicas de los períodos iniciales de toda religión dejaban en un lugar muy secundario el interés en cualquier forma de conocimiento filosófico o científico que no enganchara directamente con ella. Esta desconfianza era más notoria en los siglos iniciales del cristianismo, pues los grandes textos de la cultura griega pertenecían a la cultura pagana con la que había rivalizado durante muchos años. Hasta los siglos X y XI hubo, sin embargo, dos grandes puntos de referencia en todo lo concerniente a la cultura clásica: las obras de Boecio y S. Agustín. La primera de ellas escrita en la cárcel y con un fuerte componente estoico; la segunda, mucho más erudita, tenía importantes influencias platónicas. Esto hizo que hasta el s. XI la cultura cristiana estuviera próxima al platonismo, sea en su variante neoplatónica, sea en su versión cristianizada por S. Agustín. Todo esto se ejemplifica en el tratamiento de los universales (las formas, las ideas) durante esta primera época, muy cercano al realismo fuerte.

Esta situación cambia radicalmente a partir del s. XI y la creación de las escuelas de traductores de Toledo y Sicilia. El origen de ambas escuelas se encuentra en la admiración que la cultura árabe, y a través de ella la clásica griega, despertaron sobre los atrasados reinos cristianos a medida que establecieron contactos más estrechos con ella, tanto comerciales como militares. El reconocimiento de la superioridad económica, técnica y cultural de la civilización árabe, y de la ciencia y la filosofía griega que la impregnaban, llevó a numerosos eruditos a desplazarse a los reinos cristianos de España para tener acceso a esos conocimientos [4]. En estas condiciones, la expansión de los reinos cristianos en el sur de España y la conquista de Sicilia

3. El Timeo de Platón, algunos tratados de lógica de Aristóteles, los trabajos médicos de Dioscórides, la Historia Natural de Plinio. etc.

4. El más ilustre quizá fue el monje Gerberto, que luego sería el Papa Silvestre II.

por los normandos, unidos a las especiales condiciones de convivencia que se crearon en ambos lugares y los intereses culturales de Alfonso X y Federico II culminaron con la creación de sendas escuelas de traductores en Toledo y Salerno. Durante doscientos años el trabajo de traducción llevado a cabo en ambas escuelas permitió el acceso a prácticamente todas las grandes obras de la antiguedad clásica (Aristóteles, Euclides, Herón, Ptolomeo, Apolonio, Galeno, Hipócrates, etc) y a numerosos tratados árabes (Avicena, Al-Kindi, Averroes, Al Khwarizmi, etc).

El funcionamiento de ambas escuelas, no obstante, era muy diferente. La mayor parte de las traducciones se llevaron a cabo en Toledo, se hacían generalmente del árabe y, en menor medida, del griego e incluían todos los temas, desde la astrología a las matemáticas. En Sicilia era más frecuente la traducción directa del griego, estaban especialmente dirigidas a la medicina, y secundariamente a la ciencia en general, y el número de traducciones fue bastante inferior. En cualquier caso hay que tener en cuenta tres factores que afectaron a la calidad y contenido de las traducciones:

a) la selección de los originales a traducir no siempre era intencionada, sino que dependía de la disponibilidad y la casualidad; de este modo, junto a las obras de los grandes autores greco-árabes se encuentran otras como las del Pseudo-Euclides, Pseudo-Aristóteles, etc., así como otros trabajos de magia, astrología, etc. [5]

b) las traducciones, especialmente en Toledo, no siempre eran fiables por el peculiar sistema empleado y por su carácter indirecto: frecuentemente eran resultado del trabajo de dos o más personas, una que lo traducía del árabe al hebreo o al castellano y otra desde esta lengua al latín y, además, la cadena desde el original griego podía ser más larga, pues buena parte de los textos árabes no eran traducciones directas del griego, sino del siríaco, con lo cual no era extraño encontrarse con una cadena griego-siríaco-árabe-castellano-latín. En esta situación no es raro que se cometieran errores o que surgieran dificultades a la hora de interpretar términos técnicos.

c) el último elemento, y quizá el más importante, era la imposibilidad de identificar en los textos las interpolaciones árabes, lo que influía de manera decisiva en el resultado final. Este aspecto fue especialmente notable en el caso de Aristóteles muy influido por la interpretación averroista que acentuaba los aspectos deterministas y que fue la interpretación oficial que circuló por Europa hasta que Guillermo de Moerbecke tradujo sus obras del griego a mediados del s. XIII.

Ambas escuelas dejaron de funcionar en el s. XIII, cuando la toma de Constantinopla por los cruzados y el consiguiente saqueo permitieron traer los originales

5. Un caso interesante es el de Arquímedes del cual sólo se traduce «Sobre la medición del círculo» hasta que en 1269 Guillermo de Moerbecke traduce las obras completas (excepto el Arenario, los Lemas y el Método) de los originales griegos traídos de Constantinopla por los cruzados.

griegos al occidente europeo. A partir del s. XIV deja de traducirse del árabe. En cualquier caso, el trabajo de las escuelas de traductores fue fundamental para la recuperación de la ciencia griega. Los eruditos cristianos dedicaron todo el s. XIII a expurgar, estudiar y aprender ese cúmulo de conocimientos, de ahí la escasez de contribuciones científicas en ese periodo. Será una vez asimilada, en el s. XIV, cuando comiencen los análisis detallados y las críticas a la ciencia griega, así como las contribuciones medievales originales.

La polémica entre dominicos y franciscanos

Un segundo factor que tuvo gran influencia en el desarrollo de la filosofía y la ciencia del s. XIV fue la creación de las dos grandes órdenes mendicantes, dominicos y franciscanos, y, sobre todo, la confrontación entre ambas a lo largo de toda la Edad Media, pues de una manera casi sistemática adoptarán posiciones contrarias en todas las discusiones teóricas de la época: la relación entre razón y fé, el problema de los universales, el aristotelismo y el platonismo, la naturaleza de las cualidades y su posible medición, el papel de las matemáticas en la ciencia, etc. Creadas ambas con una estructura semejante, con renuncia expresa a la posesión de propiedades, ni siquiera corporativas, y entrenadas para combatir las herejías con una fuerte tradición académica y una exquisita preparación en la lógica y las habilidades dialécticas, constituyen las cumbres intelectuales de todo el periodo medieval. Sus miembros, dedicados a predicar en las ciudades y a viajar constantemente, son el modelo de hombre culto de la época y jugaron un papel muy importante en la creación y evolución de las universidades y del conocimiento. Ambas son igualmente responsables de la gran confianza depositada a partir del s. XII en el pensamiento racional como forma de resolver problemas, especialmente los surgidos del conflicto con la autoridad, y del relativo suavizamiento y «racionalización» de las polémicas religiosas frente a la virulencia de las disputas teológicas anteriores. De la misma forma, ambas están de acuerdo en que el universo ha de ser explicado en términos de causas naturales y no interpretado en función de símbolos morales o místicos, como se había pretendido dentro de la tradición hermética y neoplatónica.

Sin embargo, también habrá importantes diferencias entre ellos. Los dominicos poseerán una estructura jerárquica más rígida, se moverán más cerca del poder como representantes de la ortodoxia (no en vano son los encargados de la Inquisición) y se remitirán a los planteamientos aristotélicos tal como quedan recogidos en la síntesis tomista. Su dominio intelectual durante el s. XIII es absoluto y sus propuestas filosófico-teológicas se presentan bastante unificadas, en gran medida por la enorme influencia ejercida por Tomás de Aquino. Defienden, así, la complementariedad entre razón y fé, concediendo prioridad a ésta en caso de conflicto, pero asumiendo que difícilmente pueden diferir si la razón se ejerce rectamente; defienden la naturaleza racional del mundo, aunque suavizando el determinismo implícito en el aristotelismo en favor de la libertad divina, y en tal sentido contribuyeron decisivamente a la aceptación de la ciencia clásica como explicación racional de la realidad que no entraba en conflicto con el dogma cristiano; en la polémica sobre los universales adoptaron posiciones conceptualistas en línea con el aristotelismo, asumiendo que las ideas universales, las formas abstractas (incluyendo las matemáticas), son básicamente conceptos con existencia mental y se mantuvieron fieles a la idea aristotélica de que la naturaleza debía ser explicada cualitativamente, separando tajantemente física y matemáticas (ni se podían cuantificar las cualidades, ni sus cambios en intensidad, y tampoco se podían conbinar cualidades diferentes).

Los franciscanos, por el contrario, poseen una estructura jerárquica más liberal (o quizá más desordenada), se moverán en torno a posiciones más heterodoxas, especialmente en el s. XIV, y se conectarán, a través de sus planteamientos inicialmente más voluntaristas que racionalistas y la influencia de S. Agustín, con una cierta tradición platónica. Su predominio se extiende a lo largo del s. XIV y su característica básica es que no poseen una línea unitaria. Entre los franciscanos se encuentran figuras tan dispares como R. Bacon, que insiste en la necesidad de las matemáticas y la experimentación para el desarrollo de la ciencia, S. Buenaventura, cercano a los planteamientos místicos clásicos, Duns Scoto, con su peculiar planteamiento en el problema de los universales, o el influyente Guillermo de Ockam, con su nominalismo radical, su insistencia en que la experiencia es el único camino válido para el conocimiento racional (otra cosa es el conocimiento revelado) y su consideración de las entidades abstractas como meras abstracciones sin correlato real, ni siquiera mental. En términos generales, mantienen un racionalismo mucho más debilitado que los dominicos y teñido, en unos casos, de misticismo y, en otros, de empirismo; tienden a separar, más o menos tajantemente, razón y fé, sea por conceder a la segunda una importancia fundamental sobre la primera, o por considerarlas completamente distintas y siguiendo cada una su propio camino (en la versión ockamista de la doble verdad); rechazan todo determinismo y que el mundo posea por sí mismo una estructura racional previa y a priori y sitúan en un plano más fundamental el voluntarismo y la libertad divina [6]: el conocimiento de la naturaleza ha de basarse por tanto en la experiencia y será necesariamente contingente y falible; en el trata-

6. Suponen que el mundo es como es porque Dios ha querido hacerlo así, pero igual podría haberlo hecho de cualquier otra manera: tal voluntad y libertad son inexplicables y no están sujetas a ninguna necesidad racional, salvo quizá la de no caer en contradicción.

miento de los universales oscilarán entre un realismo fuerte, que considera las ideas universales como realmente existentes sea en la mente divina, sea en las cosas individuales que las ejemplifican y son como son porque participan de tales ideas, y un nominalismo fuerte, para el que tales ideas no existen realmente, sino que son simples nombres sin referencia o abstracciones obtenidas de semejanzas entre los individuos, pero sin correlato real.

Lo más interesante, sin embargo, es su posición respecto a la ciencia, la relación entre matemáticas y física y la posible cuantificación de las cualidades. Salvo el caso de R. Bacon, que insiste en la necesidad de combinar matemáticas y experimentación en el estudio de la naturaleza, los demás se van a mover siguiendo dos lineas que se mantienen paralelas a lo largo del s. XIV y que no se conectarán hasta Galileo y la ciencia moderna. Una de estas lineas insistirá en el empirismo y la experimentación, pero rechazará cualquier pretensión de realidad para las matemáticas, por lo que se les cita como precursores del instrumentalismo y de la concepción formalista de las matemáticas. La otra insistirá en la naturaleza real de la estructura matemática del mundo más allá de la experiencia. Ambas coincidirán, aunque desde esos diferentes supuestos, en una cuestión que será fundamental en la ciencia del s. XIV: la posibilidad de cuantificar las cualidades y sus cambios de intensidad y, a partir de ahí, la posibilidad de dar una descripción o una reconstrucción matemática del cambio y del movimiento que coincida con la experiencia. Es en este aspecto donde el platonismo latente en las posiciones de los franciscanos tendrá gran importancia para el desarrollo posterior de la ciencia moderna.

La revolución técnica del S. XII y el desarrollo de la invención

Un aspecto interesante de la Edad Media que contrasta con todo lo anterior es su tratamiento de la técnica. Mientras los componentes teóricos de la cultura grecolatina y, sobre todo, la ciencia clásica se perdieron con las invasiones, la técnica clásica se conservó prácticamente intacta. Quizá la razón de esta supervivencia estuvo en la peculiar estructura de la sociedad medieval. Dentro de una economía de subsistencia el dominio de habilidades técnicas resulta fundamental. En los propios monasterios el trabajo manual no sólo era necesario, sino también obligado y valorado por la norma que los constituyó (aquello de «ora et labora»), todo lo cual implicaba poseer ciertas habilidades técnicas e incluso el desarrollo de una cierta inventiva. A lo largo de los siglos anteriores al XII estos conocimientos y habilidades técnicas se fueron acumulando y refinando y se produjeron nuevos desarrollos en campos tan dispares como la tecnología militar (estribo, ballesta), la agricultura (arado con ruedas) y el transporte (grandes carretas, arneses, herraduras, balancín, vela latina) que contribuyeron al desarrollo económico y a la recuperación de las ciudades, pero constituían una continuación natural de la técnica clásica.

Sin embargo, a partir del s. XII se produce un cambio sustancial que afecta no sólo a los hallazgos técnicos, sino a la forma de entender la técnica y la relación del hombre con la naturaleza. Este cambio se basa fundamentalmente en una revolución en el uso de las fuentes de energía: la construcción de artefactos que permiten aplicar las fuerzas de la naturaleza a usos humanos, dando origen a la tecnología mecánica. En el s. XII se generaliza el uso «industrial» de la rueda hidraúlica y los molinos de agua y poco después se introduce el molino de viento con eje horizontal, que se utiliza en la producción de paños, la forja de metales, etc. A partir de aquí se produce una cascada de «inventos» que van desde el manubrio y el cigueñal hasta los fuelles de vapor. Lo fundamental es que, a partir del s. XII se desarrollan una serie de instalaciones mecánicas que permiten utilizar la energía natural para usos industriales como curtir, lavar, aserrar, triturar, accionar fuelles, reducir pigmentos, etc.

Esto es lo que recibe el nombre de «invención» y representa un salto cualitativo fundamental respecto a toda la técnica anterior. Lo importante no es tanto el desarrollo de nuevos hallazgos, pues gran parte de ellos eran conocidos en la cultura grecolatina (la rueda hidraúlica, el vapor, etc) o se habían desarrollado de forma independiente en las culturas india y china (brújula, pólvora, etc). Por el contrario, lo original de la revolución técnica del s. XII es el uso que dan a estos hallazgos, una utilización sistemática y casi planificada, que acabará cristalizando en la idea de la eficacia de la inventiva humana y en la creencia de que el conocimiento puede permitir utilizar la naturaleza en provecho propio. En eso consiste básicamente la invención, en la capacidad para utilizar ciertos hallazgos conocidos en situaciones inesperadas o con fines distintos a los inicialmente supuestos y, sobre todo, articularlos en mecanismos de diseño más o menos complejo para controlar, reproducir, e incluso mejorar, fenómenos naturales [7].

Ciertamente, estos planteamientos no se desarrollarán definitivamente hasta pasado el s. XVI y a su generalización contribuirán no sólo el desarrollo de esta idea de invención, sino también otros supuestos derivados de la filosofía hermética y la alquimia, pero su germen se encuentra ya en esta época. El caso más claro está en los escritos de R. Bacon (que, como su homónimo posterior, habla de máquinas voladoras, automovientes, etc, destinadas al mejoramiento de las condiciones de vida

7. El ejemplo arquetípico de una invención es, en este sentido, un mecanismo con el que ya soñaron los medievales del s. XIII, que atrajo la atención de todos los grandes ingenieros renacentistas y modernos (desde Leonardo a Stevinus) y que nunca podrá ser construido: la máquina de movimiento perpetuo; pero también son ilustrativos el reloj de pesas desarrollado entre los siglos XIV y XV o los autómatas, que arrancan de las tradiciones cabalísticas y gozaron de gran popularidad hasta el s. XIX.

e incluso al perfeccionamiento moral humano), pero también puede rastrearse en algunos otros tratadistas del s. XIII, como Alberto Magno, Neckam, etc. Sin embargo, y a pesar de estas excepciones, la ciencia y la tecnología medievales tienen en general poca relación y se desarrollan por separado, la primera utilizada por los eruditos para comprender el mundo, la segunda por los artesanos para hacer cosas. Sólo a partir de los siglos XV y XVI empezerán a conectarse estrechamente.

No obstante, en términos generales, este desarrollo técnico tendrá influencia en el desarrollo de la ciencia del s. XIV, tanto por dar origen a problemas y descubrimientos teóricos nuevos (magnetismo, proyectiles, ciertos problemas de medición de intensidades en óptica a partir de la invención de las gafas, etc), como en tres aspectos metodológicos básicos:

a) Favorecerá el interés en la experiencia y la experimentación como componentes importantes del conocimiento humano y, al mismo tiempo, el éxito de sus invenciones mecánicas apoyará la idea de que no todos los conocimientos clásicos son perfectos y acabados, ni su autoridad indiscutible, sino que pueden ser discutidos y perfeccionados a partir de la observación detenida de la naturaleza y el libre juego de la imaginación en experimentos mentales (secundum imaginationem los llamará Ockam).

b) La precisión de los artefactos técnicos construidos y su eficacia contribuirán a desarrollar la idea de que el conocimiento de la naturaleza debe ser igualmente preciso y cuantitativo, lo que favorecerá el interés en la medición de los cambios naturales y, en último término, la pretensión de utilizar las matemáticas en el análisis de las cualidades.

c) Igualmente, la constatación de la efectividad de estos mecanismos técnicos y su utilización en procesos muy diferentes contribuirán a desarrollar la idea de que ciertos procesos naturales pueden explicarse más adecuadamente mediante causas que mediante fines y, también, que procesos aparentemente diferentes (como los movimientos natural y violento de Aristóteles) pueden considerarse aspectos distintos de un mismo proceso y explicarse de forma semejante.

El desarrollo de las Universidades

A pesar de la importancia de los tres elementos anteriores, sin duda el aspecto más fundamental para el desarrollo de la ciencia en el s. XIV será la constitución de las Universidades y su progresivo distanciamiento de la autoridad eclesiástica. En sus comienzos las «universidades» consistían en gremios escolásticos, constituidos a imitación de los gremios de artesanos, integrados por comunidades de «escolares», generalmente extranjeros, que se agrupaban para protegerse mutuamente en tierra extraña y gozaban de cierto reconocimiento por parte de las autoridades civiles y eclesiásticas, así como de ciertos privilegios e inmunidades (protección contra arresto injusto, juicio ante cortes especiales, etc). En estos comienzos eran simplemente sociedades privadas sin competencias académicas que funcionaban dentro de las escuelas catedralicias medievales (los studia generalia).

Las escuelas catedralicias eran escuelas de enseñanza regidas por clérigos que funcionaban en las ciudades, inicialmente para la formación de otros clérigos y, posteriormente, a medida que las ciudades prosperaron, también para laicos (mercaderes, personal de la administración real o municipal, etc). El control inicial por parte de la iglesia era bastante fuerte, pues se requería el permiso de un obispo para abrir una escuela; a partir del s. XII, también era necesaria la venia docendi (otorgada generalmente también por la autoridad eclesiástica) para poder impartir enseñanzas y, posteriormente, un permiso real o papal para poder impartir títulos.

Las enseñanzas eran semejantes a las recibidas por los clérigos y se articulaban en tres niveles:

1) Latín, Sagrada Escritura y canto de los servicios religiosos.

2) Las llamadas Artes Liberales, integradas por el Trivium (Gramática, Retórica y Lógica —también llamada Dialéctica—) y el Cuadrivium (Geometría, Aritmética, Música y Astronomía).

3) Filosofía, que se articulaba en cuatro grandes ramas:

a. Teórica, integrada por Matemáticas, Física y Teología.
b. Práctica, consistente en Moral o Etica (a todos los niveles, desde el personal al político).
c. Lógica, consistente básicamente en análisis del discurso y una profundización en las disciplinas del Trivium.
d. Mecánica (o Técnica), consistente en distintas habilidades técnicas, desde la Medicina o la Navegación al procesamiento de la lana o la agricultura.

Evidentemente, nadie cursaba todos estos estudios. La mayoría de los estudiantes se especializaban en el estudio de alguna de las artes liberales en virtud de sus aficiones, el prestigio del maestro, etc, y sólo algunos pocos llegaban al último nivel (alguna de las ramas de la Filosofía) [8]. El prestigio adquirido por algunas de estas escuelas hizo que acudieran a ellas estudiantes de toda Europa y que, por esa razón, el Papado o el Imperio les concedieran bulas y fueros especiales en virtud de los cuales los títulos que otorgaban debían ser reconocidos en cualquier lugar de Europa,

8. Las propias escuelas se especializaban en alguna de esas enseñanzas, que era la que les proporcionaba prestigio; así, París era especialista en el Trivium, Chartres en el Cuatrivium, etc.

como ocurrió con Toulouse, Salerno o Bolonia [9]. Algunas, incluso, no necesitaban estas bulas especiales y se basaban sólo en su reconocimiento y prestigio, como Oxford o París. A medida que se extendió ese reconocimiento universal, las escuelas iniciales y las «universidades» de académicos integradas en ellas se fundieron constituyéndose las Universidades en sentido estricto.

La estructura misma del sistema de enseñanza se modificó respecto al tradicional de las escuelas generales. El primer nivel, básicamente eclesiástico se eliminó, y las enseñanzas se articularon en dos niveles integrados por 4 facultades:

a) Un nivel inferior integrado por la Facultad de Artes Liberales (también se llamó Filosofía), que era común y pre-requisito básico para todos los demás estudios.

b) Un nivel superior integrado por tres facultades que, en orden de importancia, eran Medicina, Leyes y Teología.

El nivel inferior no solía terminarse antes de los 21 años (a los que luego se añadía el doctorado) y consistía esencialmente en el estudio del sistema aristotélico [10]. La continuidad en las facultades superiores dependía de la disponibilidad y medios del estudiante, pues los estudios de Teología, por ejemplo, no se terminaban antes de los 35 años. Como es lógico, no todas las universidades dispusieron de todas las facultades desde sus inicios, esa prerrogativa la tenían sólo las muy reconocidas, como París u Oxford. Las restantes disponían inicialmente de alguna facultad, en la que basaban su prestigio, y sólo posteriormente introdujeron otras. De este modo, Bolonia comenzó con la facultad de Leyes, Salerno o Montpellier con Medicina, etc. La misma creación de facultades e incluso universidades dependió en estos comienzos de factores externos [11].

La pérdida de autoridad papal y las disputas entre filosofía y teología, constituyeron el caldo de cultivo en el que se desarrollaron estas universidades y, dentro del cual, a lo largo del s. XIII se aseguraron su independencia tanto intelectual, como económica (posesión de propiedades, edificios, etc), respecto al gobierno eclesiástico

9. Las monarquías podían hacerlo sólo para un país, como ocurría en Castilla con Valladolid y Salamanca.

10. Así, p. ej., los textos comentados en el s. XIV en la Facultad de Artes de París eran: los Analíticos, la Física, el De Coelo, la Meteorología y el De Generatione de Aristóteles; el De Sphera de Sacrobosco y la Teoría de los Planetas, una compilación anónima de la teoría ptolemaica escrita en el s. XIII; los Elementos de Euclides, la Aritmética de Boecio y el Algorismo de Sacrobosco.

11. Así, la Peste Negra contribuyó a la proliferación de facultades de Medicina; la crisis entre el Imperio y el Papado y el desarrollo de las monarquías impulsaron las facultades de Leyes; universidades como la de Toulouse fueron creadas casi directamente de la nada mediante una bula papal especial para contraponerse a los residuos de la herejía cátara, tan extendida en la zona, y actuar como contrapeso de París, etc.

externo, reclamando para sí la máxima autoridad tanto en asuntos internos, como en cuestiones de conocimiento. Frente al sacerdocio religioso y al poder político, las Universidades se presentaban como los centros específicos de estudio dedicados a la búsqueda del conocimiento sin aceptar en este campo otra autoridad que la suya propia. Los feroces enfrentamientos entre «filósofos» (profesores de las facultades de artes liberales) y «teólogos» (de la facultad de Teología) durante los s. XIII y XIV, los interdictos de los obispos de París o Toulouse y del mismo Papa prohibiendo ciertas enseñanzas o negando la venia docendi, las emigraciones masivas de profesores y alumnos de una universidad a otra ciudad que los acogiera y donde fundar una nueva universidad o reforzar la existente (como le ocurrió a París con Oxford y a Oxford con Cambridge) o el rechazo radical por parte de los averroístas latinos de la fé como forma de conocimiento y la revuelta contra la interpretación tomista, llegando incluso a invocar la protección del Emperador contra el Papa, como hizo Ockam, no son más que episodios en esta lucha de las Universidades por su independencia y en defensa de la llamada «libertad de cátedra».

En el s. XIV una Universidad era ya una comunidad de profesores y estudiantes cuya existencia compartida era reconocida por la autoridad. En este sentido, funcionaba como una corporación con privilegios legales y una función intelectual autónoma reconocida y consagrada. Aunque en todos los casos la búsqueda del conocimiento seguía sometida a la Teología (que continuaba siendo el máximo título otorgado), la constitución definitiva de las Universidades supuso la aparición de un marco de relativa libertad de pensamiento dentro de la sociedad medieval y, en tal sentido, jugaron un papel esencial en la divulgación del conocimiento clásico, el gusto por la ciencia y la filosofía natural y el desarrollo de las contribuciones más críticas y originales de la ciencia y la filosofía del s. XIV [12].

La polémica de los universales y el desarrollo del nominalismo

La influencia de los cuatro factores que acabamos de ver se combina precisamente en el s. XIV y esa es la marca característica de la época. Esa influencia

12. Sin embargo, esta contribución de las Universidades no se extenderá más allá del s. XIV. El aumento de la rigidez en sus estructuras a medida que avance el siglo y, sobre todo, su forma interna de funcionamiento basada en disputas retóricas a base de analizar los pros y los contras verbalmente acabarán convirtiéndolas en guetos cerrados en los que el pensamiento original no encontrará acomodo. Basta considerar el proceso de degradación progresiva que sufren universidades como Oxford desde Grosseteste, su primer canciller, y su discípulo R. Bacon, en el s. XIII, pasando pr Occam y los «calculadores» del Merton College, en el s. XIV, hasta su decaimiento intelectual en el s. XV. En el mismo sentido, no es sorprendente que el Humanismo se desarrolle fuera del medio universitario, que continuaba siendo medieval, o que la mayoría de los que construyeron la ciencia moderna lo hicieran fuera de la institución (Copérnico, Kepler, Bacon, Descartes, etc., siendo Galileo la gran excepción).

se aprecia especialmente en una de las polémicas filosóficas más típicas de la Edad Media que adquiere nuevas formas a lo largo de este siglo: la polémica sobre los universales.

El origen de la disputa se encuentra en unos comentarios de Boecio acerca de los planteamientos de Aristóteles sobre la naturaleza y el status ontológico de los nombres comunes y las ideas universales [13]. En el análisis de Boecio el problema consiste en determinar la relación de estas ideas o formas universales con los objetos individuales, los números y la mente del sujeto que conoce. Las posiciones clásicas ante el problema eran tres:

a) Las ideas universales son ideas eternas separadas de las cosas particulares y con el mismo tipo de existencia real que éstas (salvo que no son directamente observables). Más aún, las cosas concretas son como son porque participan de esas ideas universales, que serían ontológicamente previas. Se llamaban en este caso universalia ante rem. Esta posición, atribuida tradicionalmente a Platón, fue modificada por S. Agustín para adaptarla al cristianismo. Así, las consideraba ideas eternas en la mente divina, siendo los objetos concretos, y en general la materia, simples sombras de esas ideas. Esta posición fue la dominante hasta la irrupción del aristotelismo en el s. XII y continuó posteriormente con modificaciones en las propuestas más místicas. Suele llamarsela Realismo Fuerte.

b) Las ideas universales existen realmente, pero de forma diferente a los objetos concretos. Subsisten en las cosas individuales y sólo en ellas, no tienen existencia separada. Pero esto no impide que sean tan reales como las cosas concretas; son formas distintas de existencia y se accede a ellas por caminos distintos, en un caso la absracción y la razón y en el otro la experiencia. Precisamente es la existencia de esos principios y formas en las cosas lo que las hace ser como son. Se llamaban, en este caso, universalia in re. Atribuida a Aristóteles se hizo popular, sobre todo, en el s. XIII, aunque adoptó numerosas variaciones (desde el determinismo de los averroístas latinos hasta el refinado realismo de Duns Scoto, pasando por algunos planteamientos de Tomás de Aquino). Suele llamarse Realismo Moderado.

c) Las ideas universales no tienen existencia real, sino que son conceptos, abstracciones de las cosas concretas o meros nombres. Se llamaban ahora universalia post rem y según se eligiera una posición u otra surgían, sin embargo, 2 enfoques diferentes, que suelen englobarse bajo la etiqueta de Nominalismo a pesar de sus profundas diferencias:

13. Los ejemplos que analiza Boecio, y que luego cita Wittgenstein en el Tractatus, son «jinete», «caballo» y «rosa», pero lo mismo vale para cualquier otro más genérico, como «verdad», e incluso para los técnicos, como «movimiento», «siete» o «infinito».

c1. Estas ideas son conceptos racionales con existencia mental que no dependen de los sujetos individuales, sino de las reglas internas de la racionalidad e incluso de la estructura racional del mundo. En cierto modo, se puede decir que son conceptos mentales o racionales que tienen su correlato en las cosas o están en ellas como propiedades, cualidades, etc. Esta posición se llama Conceptualismo y mantiene una estrecha conexión con la anterior, hasta el punto que algunos autores oscilan entre ellas (Sto. Tomás, el propio Aristóteles). Igualmente, muchos otros que se denominan Nominalistas por oposición al Realismo se sitúan también en esta posición [14].

c2. Las ideas universales son simplemente nombres sin referente o, en el mejor de los casos, simples abstracciones de semejanzas entre los objetos individuales y las usamos los sujetos para designar esas semejanzas (a modo de abreviaturas). En este sentido, su referencia son sencillamente otras palabras, no entidades reales, pues sólo existen las cosas individuales. Este es el Nominalismo estricto, cuyo principal representante es Ockam.

Planteada en estos términos, la polémica puede parecer excesivamente metafísica y poco interesante para la ciencia. Sin embargo, tras ese lenguaje retorcido y plagado de sutilezas propias de la época, se están planteando muchas cuestiones metodológicas y filosóficas referidas a la naturaleza misma de la ciencia y los conceptos científicos. Por citar sólo algunas:

— La naturaleza de la estructura del mundo, su racionalidad y la posibilidad de explicarla mediante la ciencia (es decir, de descubrirla, comprenderla o inventarla, según el caso).

— El status de las leyes e hipótesis de la ciencia (o de los conceptos que las integran) y la mejor forma de llegar a ellos (a priori, abstracción, experiencia o experimentación).

— La naturaleza última de la Física y las Matemáticas, la prioridad entre ellas e incluso su posible conexión. En el mismo sentido, la naturaleza esencial de la geometría y el lenguaje o, por contra, su convencionalismo y la posibilidad de inventar un formalismo sin referencia que pueda usarse útilmente para la descripción y análisis de la naturaleza (de modo semejante a como usamos el lenguaje ordinario, plagado de nombres comunes, según los nominalistas sin referencia, para describir la realidad).

— La explicación y justificación de nuestras clasificaciones de la naturaleza. Igualmente, si las cualidades pueden medirse (la cuantificación de las cualidades) y, en su caso, cómo. En el mismo orden de cosas, la necesidad o el posibilismo y falibilismo de los constructos científicos.

14. P. ej., Roscelino, que llevó a cabo la primera formulación del Nominalismo allá por el s. XII.

— La posibilidad de encontrar un standard de verdad para el conocimiento humano, incluyendo el científico, y distinguir lo real de lo aparente. Una parte de este problema es el papel de la autoridad en el conocimiento y la licitud de criticar, discutir y plantear alternativas al conocimiento generalmente aceptado.

— La naturaleza de la causalidad y la existencia misma de causas, así como los métodos para descubrirlas a partir de sus efectos o postularlas instrumentalmente. Igualmente, la conveniencia de que las explicaciones sean por causas esenciales, por causas eficientes inmediatas o, simplemente, descripciones acerca de cómo se producen los fenómenos (lo que ya contiene en sí mismo la explicación de por qué). En todos los casos, esto supone plantearse el papel de la experiencia y de la inducción.

Estos, y otros problemas semejantes, se encuentran en los textos de los escolásticos como derivaciones de su discusión acerca de la naturaleza de los universales. El que los presenten como argumentaciones de segundo orden no les quita importancia, ni significa que no fueran influyentes. La propia forma de argumentación medieval y su gusto por la jerarquización de los problemas es la responsable de que no se escribieran tratados específicos sobre estos temas y que aparecieran como flecos en la polémica de los universales. La misma polémica general está subsumida en otra, mucho más importante en la época, que constituye la columna vertebral de toda la cultura medieval: la polémica sobre la filosofía y la teología, o sobre la razón y la fé [15]. Incluso el desarrollo del Nominalismo es una derivación de esa disputa. En 1277 se condenaron las 219 tesis aristotélicas (la mayoría aristotélico-averroístas) que chocaban con el dogma cristiano. Esa condena marca toda la concepción filosófica del mundo del s. XIV. Hasta entonces, la influencia del aristotelismo había llevado a dos planteamientos alternativos:

a) El clásico tomista, según el cual razón y fé se complementan (o la primera complementa a la segunda y no pueden entrar en conflicto si la primera se ejerce rectamente). En tal caso, el mundo tendría una estructura que puede ser racionalmente conocida y comprendida, precisamente por ser creación divina. Aunque las verdades necesarias que rigen la estructura del mundo están limitadas por la libertad divina, la racionalidad constituye una de las características fundamentales de la divinidad, por tanto tales verdades necesarias están dadas y son racionalmente descubribles por la ciencia y la filosofía.

15. Las mismas contribuciones científicas de la época están insertas en esa jerarquía y, con frecuencia, se presentan al hilo de discusiones consideradas más fundamentales. P. ej., la primera formulación de la virtus impresa (un antecedente directo del ímpetus) la formula Marchia dentro de una discusión acerca de si los sacramentos pueden proporcionar la gracia o si eso es potestad directa de la divinidad. Y las críticas astronómicas de Oresme a Aristóteles se enmarcan en su intento de demostrar que la mera razón no puede proporcionar conocimiento indiscutible, y mucho menos absoluto, frente a la fe.

b) El averroísta, para el cual en los asuntos de conocimiento lo fundamental es la racionalidad, por encima incluso de la fé. Cada una atiende a sus asuntos y en cuanto al conocimiento del mundo no hay criterio superior a la razón. La ciencia debe descubrir esas verdades necesarias que determinan la estructura de la realidad. De este modo, ciertas tesis aristotélicas, como la eternidad del mundo, etc, son perfectamente aceptables si se demuestran suficientemente, aunque choquen con el dogma. A raíz de la condena de 1277, esta posición tan radical se debilitará y dará paso a la «teoría de la doble verdad», que separa tajantemente los ámbitos de la razón y la fé, de manera que cuando entren en conflicto, las posiciones de ambas se considerarán verdaderas al mismo tiempo. Otra forma de decirlo era considerar que el conocimiento del mundo es competencia sólo de la razón, en el sentido de que su estructura racional no puede ser limitada ni por la voluntad, ni por la libertad humanas o divinas.

No obstante, la posición más extendida después de la condena fue la separación tajante entre razón y fé, pero sin considerarlas en plano de igualdad, sino concediendo toda la fuerza a la segunda: la estructura del mundo no es racional, en el sentido de sometida a verdades necesarias que puedan descubrirse por la razón, ni tan siquiera está claro que el mundo posea una estructura permanente cognoscible más allá de los fenómenos empíricos, y la razón humana es incapaz de conocerlo completamente e incluso de discernir entre las distintas explicaciones posibles que pueden dar cuenta de los fenómenos. La razón última que se aducía para afirmación tan contundente era que la característica fundamental de la divinidad no era la racionalidad, sino la voluntad (infinitamente libre, según Scoto) o la libertad (en el caso de Ockam): el mundo es como es porque la divinidad así lo ha querido y si hubiera querido que fuera de otra forma, lo sería, como puede serlo y cambiar en cualquier momento, si así lo quiere. El único límite a este voluntarismo es la contradicción. De esta forma, no sólo en los asuntos teológicos y vitales se le concedía prioridad a la fé, sino que la propia uniformidad de la naturaleza en la que se fundamentan las leyes científicas estaría sustentada en último término en la libre voluntad de la divinidad.

Lo paradójico es que esta posición tajante no constituyó un freno, sino un impulso para el desarrollo de la ciencia. Primero, porque dejó sin justificación teórica al aristotelismo. Si la naturaleza de la realidad está sometida de tal forma a la voluntad divina y no hay verdades necesarias racionales, nada impide someter a crítica la filosofía natural aristotélica, formular alternativas e incluso, en un libre juego de la imaginación, discutir y analizar cuestiones que podrían haber ocurrido si la divinidad lo hubiera querido (desde la pluralidad de universos al movimiento en el vacío y desde la composición del continuo o la infinitud del espacio hasta la naturaleza del tiempo). Así, no es extraño encontrarse a Alberto de Sajonia planteándose si podría existir una línea espiral infinita dentro de un cuerpo finito y a Nicolás de Autrecourt afirmando que el tiempo está constituido por instantes discretos indivisibles. Segundo, porque impulsó los estudios y discusiones metodológicas como las citadas más arriba, el análisis de la naturaleza y función del conocimiento científico y, sobre todo, el desarrollo de ciertos métodos aplicables al análisis de casos y fenómenos empíricos específicos (como la cuantificación de cualidades usada para medir la intensidad de la luz según el ángulo de incidencia y la distancia, o la velocidad uniformemente acelerada, o los análisis de Ockam de la causa inmediata) en lugar de la postulación tradicional de esencias o especies imponderables como causas necesarias de los fenómenos. Tercero, y principalmente, porque desplazó el punto de atención de la filosofía natural tradicional al estudio empírico y cuantitativo de la naturaleza y favoreció el desarrollo del Nominalismo, que tuvo una positiva influencia sobre los científicos de la época, desde Bradwardine a Oresme y Buridán.

En el caso de Ockam, el paso al Nominalismo es muy simple. Si la creación y naturaleza del mundo no dependen de ideas preconcebidas o naturalezas comunes, sino de la libertad divina, entonces es innecesario suponer que existan esencias comunes que se «realicen» en los individuos, sino sólo cosas individuales concretas. Dado que estos individuos son más o menos parecidos, eso nos permite formarnos conceptos universales de ellos y usar nombres generales, pero ambos sólo se refieren, en el mejor de los casos, a esas semejanzas de los objetos o incluso a otros conceptos y términos derivados de los objetos individuales. De esta forma, sólo los hechos singulares son reales, pero no su coherencia o su estructuración racional (ambas las suponemos y construimos los sujetos), y sólo pueden ser experimentados, pero no deducidos de principios necesarios. El conocimiento, por tanto, se deriva de la experiencia directa, sin conceptos, ni formas interpuestos. Solo en un segundo paso se abstraen sus semejanzas o se establecen correlaciones, pero éstas no tienen realidad objetiva, sino que sólo son abstracciones mentales del comportamiento de los objetos individuales. Por esta razón distingue Ockam entre la «ciencia real», que son proposiciones acerca de cosas particulares, y la «ciencia racional», que son las teorías en las que los nombres representan abstracciones y no algo real. De aquí obtiene Ockam tres principios fundamentales:

a) El principio de economía o navaja de Ockam, que es un principio de simplicidad y economía de explicaciones y entidades, según el cual no hay que postular la existencia de más entidades que las estrictamente necesarias para dar una explicación y entre explicaciones alternativas siempre será preferible la más sencilla. En última instancia, es una extrapolación a todo el conocimiento de los supuestos de simplicidad y elegancia corrientes incluso en la matemática griega. Su utilización en la física medieval no sólo tuvo consecuencias devastadoras para la proliferación de imponderables y especies postuladas comúnmente, sino que ayudó a la conexión entre matemáticas y física. Del mismo modo, su influencia posterior en el nacimiento de la ciencia moderna o en el empirismo inglés es incuestionable.

b) El estudio de la causalidad y la definición de la causa inmediata. El fuerte empirismo ontológico sustentado por Ockam lo llevaba a mantener una especie de infradeterminación del conocimiento, según el cual el mismo efecto puede existir por muchas causas diferentes (y, en el mismo orden de cosas, el mismo fenómeno puede tener también muchas explicaciones diferentes), por tanto las conexiones causales sólo pueden fijarse en casos concretos. Define, así, la causa inmediata como aquella que si está presente, se sigue el efecto, y si no lo está, no se produce el efecto, siendo todas las demás cosas iguales. Si aparecen otras causas alternativas, hay que eliminarlas a partir de la observación, la experimentación, etc. En cualquier caso, nunca hay evidencia de alguna relación metafísica o esencial entre causa y efecto (la única «prueba» es la citada para la causa inmediata), sino sólo la asociación empírica entre sucesos. Por ello, no pueden probarse de ninguna forma las causas finales aristotélicas y, aunque puede hablarse de la causa total como la suma de todos los antecedentes que bastan para producir un suceso, las únicas causas reales son las inmediatas. Pese a todo, y en términos generales, las conexiones causales establecidas empíricamente a partir de esas causas inmediatas son válidas por la uniformidad de la naturaleza [16]. Estos análisis ockamistas de la causalidad, que recuerdan los de Hume, son los precedentes de la sustitución de las causas finales por las causas efectivas que caracterizarán los orígenes de la ciencia moderna.

c) El probabilismo. Es una consecuencia de todo lo anterior y consiste en afirmar que la filosofía (y la ciencia, en su caso) puede ofrecer explicaciones probables, pero no necesarias. Por eso, es natural que existan distintas explicaciones del mismo fenómeno y, además, es lícito y conveniente buscar otras nuevas. De entre ellas hay que elegir siempre la más probable a la luz de la experiencia y del principio de economía. Por eso, es importante la proliferación de alternativas para mejorar nuestras explicaciones de la naturaleza. Este probabilismo se encuentra a la base de la teoría del ímpetus, de los trabajos de los calculadores oxonienses y de las discusiones de Oresme respecto a la inmovilidad de la Tierra. Pero, además, el probabilismo tiene una consecuencia metodológica importante para todas las teorías citadas: el uso de los supuestos «secundum imaginationem», es decir, imaginar todo tipo de posibilidades

16. Recuérdese que para Ockam la voluntad y libertad divinas sólo están limitadas por el principio de no contradicción y esa ausencia de contradicción es suficiente para garantizar la uniformidad natural, a lo que hay que añadir el uso de la «navaja de Occam», que también apoya esa uniformidad.

sin tomar en consideración su realidad física o su posible aplicación. Esto permite analizar los fenómenos en forma hipotética y recurrir sin restricción a experimentos mentales e imaginarios, factores ambos importantes en el análisis de las variaciones de intensidad de las cualidades y los movimientos y en la Teoría del Impetus.

El problema de la intensificación y disminución de formas y cualidades.

Precisamente el análisis de las variaciones de intensidad de las cualidades y movimientos o, para abreviar, la cuantificación de las cualidades, es uno de los logros más importantes de la ciencia del s. XIV y se ha considerado, tradicionalmente, como el primer paso hacia la construcción de la Física Matemática. La tarea la llevaron a cabo un grupo de matemáticos de Oxford, todos ellos sucesivos profesores del Merton College, de donde viene su nombre colectivo: Calculadores de Oxford o Mertonianos. Entre ellos se encuentran Bradwardine, Heytesbury, Swineshead, Dumbleton, etc. y centraron su trabajo en lo que llamaron «el problema de la intensificación y disminución de formas y cualidades».

El origen del problema está en las críticas de Ockam y los nominalistas al tratamiento aristotélico de las cualidades. Para Aristóteles cantidad y cualidad son cuestiones completamente distintas. Aunque ambas son dos formas de cambio, ni pueden combinarse, ni tienen ninguna relación entre sí. La razón es que el cambio cuantitativo consiste en la adición o sustracción de partes homogéneas, sean continuas (p. ej., la distancia espacial), sean discontinuas (p. ej., los números). Por eso, no hay cambio de especie, puesto que la mayor contiene a la menor. En otras palabras, todas las partes que se añaden o se restan poseen las mismas propiedades y atributos y son idénticas entre sí; la entidad sometida a cambio (sea una distancia que aumenta, una serie creciente de números, un objeto que crece o disminuye, etc) conserva a través del proceso tanto su identidad esencial, como el conjunto de propiedades que la identifican y la hacen ser como es. El estado final del proceso, si es de aumento, contiene el estado inicial, o está contenido en él, si es de disminución.

Por el contrario, el cambio cualitativo no se debe a la adición o resta de partes homogéneas, sino a la pérdida de una especie y la ganancia de otra. Es decir, en este cambio la entidad conserva su identidad esencial, pero pierde una propiedad o atributo y la sustituye por otra diferente, aunque pueda ser muy parecida. Esto vale, p. ej., para el cambio de color, pero también para procesos más oscuros, como el aumento o disminución del calor, la intensidad de la luz e incluso el movimiento (si se considera que el lugar ocupado por el cuerpo determina una especie o cualidad y por tanto el paso de un lugar a otro implica perder una especie y ganar otra distinta; esto no es sorprendente en Aristóteles si se tiene en cuenta que concibe el universo integrado por lugares cualitativamente diferentes —arriba, abajo, etc). En favor de su rechazo de la homogeneidad del cambio cualitativo, Aristóteles aduce como ejemplo que el añadir un cuerpo caliente a otro no lo hace más caliente, lo que debería ocurrir si fueran partes homogéneas (añadir una distancia a otra sí la hace más grande).

Esta concepción implicaba una multiplicación de especies y atributos que chocaba frontalmente con el Nominalismo y la navaja de Ockam. De ahí que Ockam lo rechazara, considerando que la intensidad de una cualidad puede ser medida en grados numéricos. En tal caso, todas las diferencias reales se reducirían a diferencias en cantidad y la intensidad de una cualidad podría medirse igual que la magnitud de una cantidad [17]. Rechazaba el ejemplo aristotélico de los cuerpos calientes afirmando que el problema estaba en que se añaden también los cuerpos; si se pudiera añadir sólo la cualidad —calor— a la otra cualidad —calor, también—, el resultado sería un cuerpo más caliente. Concluía, de ahí, que las diferencias cualitativas consistían en diferencias de la estructura geométrica, del número o del movimiento [18].

Lo que hacía falta era encontrar un método adecuado que permitiera la cuantificación de las cualidades y, de esta forma, la conexión de Matemáticas y Física, el estudio matemático de la naturaleza. Este es el trabajo que llevan a cabo los Calculadores de Oxford y tiene dos características importantes:

a) Se centran en el estudio del movimiento, lo que contribuirá al desarrollo, o a demostrar la posibilidad del desarrollo, de la Cinemática mediante la definición de algunos conceptos fundamentales (movimiento uniforme, aceleración uniforme, etc);

b) Hacen el análisis en términos de distancia y tiempo, dos nociones cuya combinación era rechazada por Aristóteles, y usan matemáticas en lugar de geometría. La base del análisis tiene, nuevamente, resonancias ockamistas: suponen que hay una variación concomitante entre causa y efecto, de manera que, al modo de la causa inmediata de Ockam antes citada, el efecto se explica en función de las condiciones necesarias y suficientes que lo producen y así se relacionan sus cambios. Pero lo hacen matemáticamente, considerando que la velocidad (variable dependiente) se explica en una función algebraica de distancia y tiempo (variables independientes). En general, se utilizaban dos métodos diferentes para conseguirlo, uno desarrollado por Bradwardine y los Calculadores de Oxford y otro por Oresme y la Escuela de París.

17. Lo que plantea Ockam es la diferencia entre lo que hoy llamamos magnitudes extensivas e intensivas y metrización de proporciones y metrización de intervalos.

18. Todo esto tenía, además, un punto de apoyo en la Óptica donde, desde Grosseteste y Witelo, se había intentado probar que la diferencia en los efectos cualitativos de la luz se debía a diferencias cuantitativas. Así, el debilitamiento de la luz blanca se debería a la refracción, los cambios en la intensidad y el calor al ángulo de incidencia y a la concentración luminosa, etc.

El primer método utilizado es el «álgebra de palabras» de Bradwardine en la que se emplean letras del alfabeto para sustituir a las cantidades de las variables, mientras las operaciones se describen con palabras. Este recurso a las letras del alfabeto permite evitar el problema aristotélico de la imposibilidad de combinar cantidades no comparables y representa uno de los primeros intentos conscientes de introducir un formalismo algebraico, aunque a niveles aún muy elementales. Esto permite a Bradwardine reformular las afirmaciones aristotélicas acerca del movimiento violento relacionando *v* (la velocidad) con *f* y *r* a la vez (la fuerza motriz y la resistencia) [19].

Los restantes «calculadores» perfeccionaron el método y lo utilizaron para estudiar estas proporciones en distintos campos (movimiento local, calor, luz, etc). Lo que pretendían era expresar los grados en que aumenta o disminuye una cualidad respecto a una escala fijada previamente. Llaman *forma* a cualquier cualidad o cantidad variable en la naturaleza y suponen que la *intensio* (intensidad) de una forma es el valor numérico que hay que asignarle. A su vez, hablan de la velocidad con que cambia la intensio con respecto a otra forma conocida, a la que llaman *extensio* (extensión). También las llaman, respectivamente, *latitud* y *longitud*. P. ej., se puede fijar la intensio de la velocidad (y la velocidad con que esta intensio cambia) por referencia a la extensio de la distancia y el tiempo. Todo esto les permite definir una serie de conceptos fundamentales, como el movimiento uniforme y la aceleración, aunque los formulan en general como formas de cambio para aplicarlos a la velocidad con que cambia una intensio cualquiera:

a) Cambio uniforme (movimiento uniforme, en su caso): cuando se recorren distancias iguales en intervalos sucesivos de tiempo iguales o el recorrido de distancias iguales en cualquier intervalo de tiempo.

b) Cambio disforme (aceleración): cuando se recorren distancias desiguales en intervalos de tiempo iguales.

c) Cambio uniformemente disforme (uniformemente acelerado): movimiento en que se adquiere un incremento igual de velocidad en cualquier intervalo igual de tiempo.

d) Cambio disformemente disforme: incrementos desiguales de velocidad en tiempos iguales.

e) Velocidad instantánea: la distancia recorrida por un punto en movimiento si ese punto fuera impulsado uniformemente durante un periodo de tiempo con la misma velocidad que poseía en ese instante.

19. Lo que afirma es que v está relacionado con la proporción f/r y la duplicación de v está relacionada con el cuadrado de f/r. La diferencia con Aristóteles es que éste se veía obligado a considerar f y r por separado, afirmando que la velocidad es proporcional a la fuerza impulsora e inversa a la resistencia —no a la relación (f/r)—; de ahí que para duplicar la velocidad considerara que debía duplicarse la fuerza o reducirse a la mitad la resistencia. Además, para Aristóteles la velocidad no es una magnitud, sino una cualidad que no se puede medir porque eso implicaría combinar distancia y tiempo, dos magnitudes no comparables.

Además de todo esto, hacen desarrollos concretos, el más importante de los cuales es el teorema de la velocidad media, también llamado teorema de Merton [20]. En nuestros términos, el teorema es: $S = 1/2\ V_f t$, es decir, la distancia recorrida por un cuerpo que parte del reposo con velocidad uniformemente acelerada equivale a la mitad de su velocidad final multiplicada por el tiempo. Pero su formulación es mucho más reveladora. Primero, afirman que un cuerpo que inicia la aceleración uniforme a partir del reposo recorre cierta distancia en cierto tiempo. Segundo, postulan el lema que debe ser probado: si el mismo cuerpo hubiera de estar en movimiento durante el mismo intervalo de tiempo con una velocidad uniforme igual a la velocidad instantánea en el instante intermedio de su aceleración uniforme, recorrería una distancia igual. De esta forma se equiparan un movimiento acelerado y un movimiento uniforme al expresar la distancia recorrida por el primero en términos de la recorrida por el segundo.

La prueba de este teorema la da Oresme en su libro «De las configuraciones de las cualidades» y eso nos lleva al segundo método utilizado para cuantificar cualidades. Utilizado en la universidad de París era básicamente un método geométrico que recurría al uso de gráficas. La extensio se representa mediante una línea recta horizontal (longitud) y cada grado de la intensio se representa mediante una línea vertical de altura determinada (latitud). La línea que une los extremos de estas líneas verticales determina la velocidad y el modo del cambio de la intensio. Lo que se pretende con este método gráfico de «representación de las latitudes de formas» (este nombre le da Oresme) es construir figuras que representen la cantidad de cualidad, de manera que las propiedades de las figuras (equivalencias, etc) representen propiedades intrínsecas de la cualidad. En esto consiste su demostración del teorema de la velocidad media: como las áreas de las figuras resultantes del movimiento uniforme y del uniformemente acelerado son iguales, ambos movimientos tienen que ser equivalentes. Si el método anterior de los oxonienses recuerda al de Galileo, éste de Oresme recuerda la geometría analítica cartesiana, pero con una diferencia básica: su interés se centra en la figura, por lo que no hay una asociación sistemática de una relación algebraica con una representación gráfica.

Ambos métodos, y el intento mismo de cuantificación de las cualidades, dan una idea clara del cambio acontecido en el s. XIV con respecto a toda la época anterior y muestran la importancia del Nominalismo para muchas cuestiones metodológicas que afectaron al desarrollo de la ciencia. Su interés es el de haber sido precursores de muchos de los planteamientos que condujeron a la construcción de la ciencia moderna. Sin embargo, tienen una diferencia fundamental con los trabajos de los siglos

20. También se le llama teorema de Oresme por la prueba gráfica que éste dio.

XVI y XVII: son absolutamente teóricos. El estudio de los problemas cinemáticos en Oxford está basado en esperimentos mentales y supuestos «secundum imaginationem»; en París está más cerca del movimiento natural real, porque los miembros de esta escuela fueron los creadores de la teoría del ímpetus, pero no hay ninguna referencia a experimentos. Basta recordar la insistencia de Galileo en la importancia de los experimentos como parte del método científico (y, en otro sentido, su fuerte realismo matemático) para constatar que, aún siendo precursores en muchos aspectos, los analistas de las intensidades y formas siguen siendo medievales.

La teoría del ímpetus

El otro gran desarrollo de la ciencia del s. XIV es la Teoría del Impetus desarrollada en París por filósofos naturales de tradición nominalista, especialmente Buridán. Aunque las repercusiones de esta teoría son muy inferiores a la del análisis de las cualidades y los estudios metodológicos de Ockam, sin embargo fue muy influyente en su época y marca el comienzo de una línea que llega hasta Galileo a través de Benedetti y otros autores renacentistas. Pero antes de pasar a la exposición de la teoría conviene señalar los problemas con que se encontraba la teoría aristotélica del movimiento, los cuales constituyen el origen de la propuesta de Buridán.

Aristóteles había considerado el movimiento local como uno de los tipos de cambio y había establecido una distinción entre dos movimientos radicalmente diferentes:

a) Movimiento natural: Es el movimiento de los cuerpos hacia su lugar natural (arriba, abajo, etc) según su composición a partir de los cuatro elementos. Su característica básica es que está gobernado por causas finales (la tendencia natural) o, si se definen como eficientes, por causas internas (apetitos, potencias naturales, etc). En último término, el comportamiento de cualquier objeto viene dado por la posesión de 'pesadez' o de 'ligereza'. En cuanto al comportamiento de los cuerpos en el movimiento natural, su velocidad es proporcional a su peso e inversa a la resistencia del medio y el tiempo sería proporcional a la resistencia del medio e inverso al peso. Este principio, en cualquier caso, es cualitativo (la cuantificación y las fórmulas que hoy conocemos provienen del s. XIV).

b) Movimiento violento: Es el comportamiento de un cuerpo resistente cuando se le aplica una fuerza impulsora exterior, es decir, cualquier movimiento distinto al natural. Se caracteriza por estar regido por causas eficientes externas (el motor, la fuerza impulsora, etc). Está sometido a dos requisitos metodológicos importantes: 1) hay una diferencia esencial entre causa y efecto, lo que las hace distinguibles en cualquier momento (precisamente porque la causa es externa); 2) la causa debe permanecer en contacto con el efecto, pues en otro caso éste cesaría (dicho de otra manera es imposible ejercer una acción a distancia). Cuando el móvil se separa del motor que proporciona la fuerza impulsora para su movimiento en el primer instante, se sigue moviendo porque el motor comunica la fuerza impulsora al aire que actúa como nuevo motor. Dada su prohibición de combinar nociones «incomparables», Aristóteles se ve obligado a dar cuenta del movimiento en términos de cuatro conceptos básicos: fuerza (móvil, impulsora, etc), cuerpo resistente, distancia recorrida y tiempo, pero no usa la velocidad, que no se formula con precisión hasta los calculadores de Oxford. A efectos de simplicidad, sin embargo, puede decirse que la velocidad en este movimiento sería proporcional a la fuerza impulsora e inversa a la «propia resistencia» del cuerpo [21]. Como la descripción de Aristóteles no es una ecuación cuantitativa, puede establecer una importante restricción al principio general: si la fuerza se debilitara hasta el punto de no poder impulsar al cuerpo (o a su resistencia propia), entonces el movimiento cesaría inmediatamente. Aceptada esta limitación, se puede aumentar o disminuir la velocidad, p. ej. duplicarla, aumentando la fuerza impulsora y duplicándola o reduciendo la resistencia propia a la mitad. El movimiento no es eterno porque la fuerza impulsora se «disipa» debido a su forma de transmisión: el primer motor impulsa tanto al objeto que mueve, como al aire que se convertirá en nuevo impulsor; a su vez, la primera fracción de aire impulsa al objeto y a la siguiente fracción de aire y así sucesivamente. Como resultado de este doble trabajo, la fuerza impulsora va disminuyendo progresivamente hasta que no puede impulsar a la siguiente fracción de aire, momento en que deja de actuar la causa externa y comienza el movimiento descendente natural [22]. Pero, además de todo esto, el medio, supuestamente homogéneo en Aristóteles, actúa como un medio resistente que frena el movimiento del objeto. La razón es que, de otro modo, el movimiento sería infinito, o casi-infinito, e instantáneo, lo cual es imposible [23].

El análisis detallado de esta teoría del movimiento aristotélica revelaba numerosos problemas e inadecuaciones, como ya habían señalado comentaristas grecolatinos y árabes. P. ej., Filopón, un comentarista del s. VI, había señalado la inconsistencia de poner el aire como motor y como freno a la vez en el movimiento violento. Supuso, entonces, que la causa del movimiento es una fuerza incorpórea impresa al móvil. De la misma forma, pensaba que el movimiento no puede ser inverso a la resistencia

21. Obsérvese que no es la resistencia del medio, como en el movimiento natural, sino la resistencia propia del cuerpo, aunque nunca define esta noción; en cuanto al medio, se supone que es homogéneo.

22. Curiosamente, el cambio debería ser brusco, como señalaba Autrecourt y la caída casi rectilínea, pues si ya no actúa la causa, sólo queda el movimiento natural.

23. Recuérdese que Aristóteles rechazaba la existencia del vacío (incluyendo la de intersticios vacíos en el continuo material o el atomismo) por este motivo.

del medio o a la propia, porque en tal caso debería existir un movimiento mínimo incluso en el caso de que el peso o la fuerza impulsora fueran inferiores a la resistencia. Por eso consideraba que la resistencia era sólo un factor limitador que se restaba al peso o a la fuerza (es decir, $v=p-r$ y $v=f-r_p$). Parecidos argumentos se encuentran en los árabes (Avempace, Averroes, etc) [24].

En todos estos casos, sin embargo, los análisis eran sólo fragmentarios y parciales. Es en el s. XIV cuando se hace un estudio exhaustivo de los problemas y se intenta darles solución. El recurso a los supuestos «secundum imaginationem» y experimentos mentales es importante en este proceso, al igual que el probabilismo, pues permitió plantearse el problema de las características del movimiento en el vacío (algo perfectamente imaginable, aunque siguiendo a Aristóteles negaran su existencia real). Del mismo modo, la influencia del principio de economía de Ockam y sus análisis de la causalidad contribuyeron a considerar excesivos ciertos supuestos aristotélicos básicos, como la distinción tajante de dos tipos de movimiento con dos causas diferentes o la multiplicación de entidades que implicaba la postulación de un impulsor diferente en cada punto recorrido por el móvil en el movimiento violento [25]. El resultado de todo esto fué la detección e intento de solución de algunos problemas importantes y, sobre todo, la construcción de una teoría completa —la del impetus inserta en la tradición aristotélica, pero alternativa.

Un problema del movimiento violento era la indefinición aristotélica de la noción de resistencia propia, lo que hacía casi imposible medir con una mínima precisión el movimiento del objeto. Igualmente, eran discutibles las exigencias aristotélicas de que fuera imprescindible un medio resistente para que tuviera lugar el movimiento y que ese medio actuara a la vez como motor y freno, e incluso no estaba claro el supuesto de que el movimiento en el vacío tuviera que ser infinito, sino que podía ser achacado a la formulación cualitativa aristotélica. Precisamente, analizando «secundum imaginationem» el movimiento en el vacío y basándose en su análisis cuantitativo de las cualidades, los calculadores de Oxford enfocaron el problema de manera distinta a la aristotélica: asumían que si un cuerpo está formado por una combinación de elementos, tales elementos combinados tendrían que estar formados por partes o grados que son los que se combinan. Cada una de esas partes tiene su propia tendencia

24. Así, para Avempace la ausencia de resistencia no implica velocidad infinita, como prueban los planetas moviéndose en el éter, por tanto el movimiento no es inverso a la resistencia, sino que será sólo lo que quede de movimiento «libre» inicial una vez restada la resistencia del medio.

25. Ockam llegaba a afirmar que estas entidades intermedias postuladas para evitar la acción a distancia y mantener el contacto entre causa y efecto eran innecesarias para dar cuenta de los fenómenos observados, porque la fuerza motriz no necesita acompañar al cuerpo; por tanto, la acción a distancia era posible, tal como ejemplificaban el imán o la luz del Sol.

hacia arriba, hacia abajo, etc. La suma de todas ellas indicaba el predominio del peso o la ligereza y determinaba el movimiento esencial, pero cada una de las partes actuaba realmente en el movimiento afectando al resultado final. Esto los llevó a formular la noción cuantitativa de resistencia interna. Aunque el elemento que prevalece determina el movimiento esencial, los otros también actúan funcionando como resistencia a ese movimiento esencial y modificándolo. Esta resistencia interna se podía medir recurriendo a los métodos de análisis de cualidades. Esto implicaba que ni siquiera en el vacío podía darse un movimiento infinito, porque lo impedía la resistencia interna, y que no era necesario postular un medio resistente que fuera motor y freno, sino que ambas eran cuestiones diferentes: el motor sería el aire, pero el freno era la propia resistencia interna cuantificable. Además, sus métodos semiformales les permitían considerar que el movimiento tenía que ser proporcional a la relación entre fuerza y resistencia interna o a la de peso y resistencia, y no considerarlas cualitativamente separadas, como hacía Aristóteles. Lo fundamental era esa proporción de manera que en el movimiento natural, p. ej., dos cuerpos de distinto peso caerían al mismo tiempo si las proporciones entre el peso y la resistencia interna de cada uno fueran iguales (siempre que fueran homogéneos, lo hicieran en el mismo medio, etc). De este modo la velocidad estaba regida por un factor intensional (sea la relación F/Ri o la relación P/R). Incluso consideraban también el peso como la expresión de una fuerza impulsora medible, aunque interna.

La contribución esencial, sin embargo, es la Teoría del Impetus de Buridan y Oresme. Dispuestos a eliminar la multiplicación de causas movientes necesarias para explicar el movimiento violento en la teoría aristotélica, supusieron que la causa del movimiento de un objeto una vez separado del motor impulsor era solamente una que se mantenía a lo largo del movimiento. Esta fuerza impulsora, a la que llamaron *impetus* se transmitía del impulsor al cuerpo en movimiento y quedaba impresa en el móvil actuando como causa de su movimiento, de tal manera que incluso en el vacío el movimiento sólo era posible mientras persistiera ese impetus. Aunque tal impetus (como toda virtus impressa) sólo podía medirse ex post facto, la velocidad del cuerpo y su cantidad de materia determinaban la potencia del impetus transmitido (impetus=cantidad de materia x velocidad). De esta forma, si un cuerpo más denso y pesado era impulsado con la misma velocidad que otro más ligero, el primero recorrería más distancia porque podía recibir más impetus y retenerlo más tiempo [26].

El impetus se desgasta y corrompe por la resistencia del medio, lo que hace que el móvil acabe cayendo, pero duraría indefinidamente si no hubiera resistencia (la re-

26. Este recurso a la cantidad de materia y a la velocidad es fundamental, porque entronca directamente con los desarrollos de la ciencia moderna y plantea por primera vez el problema de la relación entre fuerza y energía (proceso que culminará en la polémica entre Newton y Huygens sobre la vis viva).

sistencia incluye tanto la del medio, como la tendencia natural del objeto). Además, el impetus es la misma entidad a lo largo de todo el movimiento: no hay impetus adicionales en ausencia de alguna causa identificable. Por tanto, si se eliminara toda resistencia, el cuerpo se movería indefinidamente en la misma dirección y con velocidad constante. Esto, sin embargo, no lo consideraban posible por la finitud del universo y la inexistencia real del vacío y de elementos puros, era sólo un supuesto secundum imaginationem. Sin embargo, el movimiento circular indefinido de los planetas sí se debería realmente al impetus: al comienzo del universo se aplica una cantidad fija de impetus a cada planeta y el movimiento continúa ya indefinidamente porque no hay resistencia. De este modo, la teoría del impetus establece la primera conexión entre los dos mundos aristotélicos: el movimiento en ambos es producido por la misma causa, el impetus.

Pero, además, el impetus permite explicar otro gran problema de la teoría aristotélica: el de la aceleración en el movimiento natural. Era un hecho conocido por observación que los objetos que caen aceleran en su caída. Aunque Aristóteles no había tomado en cuenta el problema y se había limitado a considerar este movimiento como uniforme o promediable, los comentaristas medievales comprendieron que se necesitaba una causa que diera cuenta de esta aceleración. Así, postularon la «excitación de la tendencia» con la proximidad al lugar natural (lo que relacionaría, en nuestra terminología, la aceleración con la distancia recorrida), la rarificación del aire producida por el calor generado por el cuerpo al caer o la disminución de la resistencia del aire en función de la distancia recorrida (como si aumentara la penetración del objeto). Pero en todos los casos eran causas que no tenían conexión con la fuerza móvil, en este caso el peso. Buridán daba otra explicación. La causa de la caída de un cuerpo es su cantidad de materia, a la que llamaba gravitas. Esta gravitas es quien determina la caída uniforme natural. Pero, como en el caso anterior de la fuerza móvil, al iniciar el movimiento la gravitas genera un impetus (o gravitas accidental) que se añade al cuerpo e incrementa su velocidad. Este proceso es continuo, generándose a cada nuevo instante incrementos sucesivos de impetus que dan lugar a incrementos de velocidad y eso explica la aceleración de la caída. En el movimiento natural intervienen, pues, tres elementos, la gravitas, el impetus y la velocidad, el movimiento observado es resultado de la combinación de los tres. Aunque esto pueda tener resonancias galileanas, la explicación de Buridán es muy diferente, porque correlaciona la aceleración con la distancia recorrida y con el tiempo a la vez. Su mérito, sin embargo, es que su análisis permite conectar el movimiento natural con el violento (las causas intervinientes son las mismas). De este modo, la Teoría del Impetus es el primer intento de subsumir bajo la misma teoría todos los movimientos, terrestres y celestes, naturales y violentos.

BIBLIOGRAFÍA

CIPOLLA, C.M. (ed), 1972. Historia económica de Europa: la Edad Media. Barcelona, Ariel, 1979.

CIPOLLA, C.M. 1974. Historia económica de la Europa preindustrial. Madrid, Alianza.

CLAGGET, M. 1959. The Science of Mechanics in the Middle Ages. Madison, U. Wisconsin P.

CLAGGETT, M. 1968. N. Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. Madison, U. Wisconsin P.

CROMBIE, A.C. 1959. Historia de la ciencia: de S. Agustín a Galileo. 2 vols. Madrid, Alianza, 1974.

DIJKSTERHUIS, E.J. 1961. The Mechanization of the World Picture. Princeton, Princeton U.P. 1986.

DUHEM, P. 1954. Le Systeme du Monde, vols. 7 y 8. Paris, Hermann.

GILSON, E. 1952. La filosofía en la Edad Media. Madrid, Gredos, 1965.

GODDU, A. 1984. The Physics of W. of Ockham. Leiden, Brill.

GRANT, E. 1971. La ciencia física en la Edad Media. México, FCE, 1983.

HASKINS, C.H. 1927. Studies in the History of Medieval Science. Cambridge, Harvard U. Press.

HASKINS, C.H. 1957. The Rise of the Universities. NY, Dover.

HODGETT, G.A.J. 1972. Historia social y económica de la Europa medieval. Madrid, Alianza, 1977.

KRETZMANN, N.; KENNY, A. & PINBORG, J. (eds) 1982. The Cambridge History of Later Medieval Philosophy: From the Rediscovery of Aristotle to the Disintegration of Scholasticism, 1100-1600. Cambridge, C.U.P.

LEFF, G. 1976. The Dissolution of the Medieval Outlook: An Essay on Intellectual and Spiritual Change in the XIV Century. NY, Harper & Row.

LINDBERG, D.C. (ed) 1978. Science in the Middle Ages. Chicago, U. Chicago P.

LONG, P.O. (ed) 1985. Science and Technology in Medieval Science. NY, Annals of the NY Academy of Sciences, vol. 441.

PIRENNE, H. 1969. Las ciudades en la Edad Media. Madrid, Alianza, 1972.

TACHAU, K.H. 1988. Vision and Certitude in the Age of Ockham. Leiden, Brill.

VIGNAUX, P. 1938. El pensamiento en la Edad Media. México, FCE, 1954.

WHITE, L. 1962. Tecnología medieval y cambio social. Barcelona, Paidós, 1973.

WILSON, C. 1952. W. Heytesbury. Medieval Logic and the Rise of Mathematical Physics. Madison, U. Wisconsin P.

EL RENACIMIENTO Y NICOLÁS DE CUSA

José L. Prieto Pérez
Profesor de Filosofía
I. B. Rafael Arozarena

I. Introducción

Hace ya tiempo que se ha impuesto una visión nueva del Renacimiento como prolongación y culminación de la Edad Media. El corte radical entre una edad oscura, la medieval, y otra luminosa que los propios renacentistas (así Vasari) quisieron propagar, fue seguida durante algún tiempo por los historiadores [1]. Pero hoy en día el enfoque que se impone es el de un avance continuado de una serie de fuerzas que se aceleran en los siglos XIV y XV, con precedentes, como ha señalado Panofsky [2], en la Renovación Carolingia del S.IX y el protorrenacimiento del S. XII.

Si bien es cada vez más impreciso fijar el cúando se entra en el Renacimiento, si parece haber consenso en que la salida del mismo se produce en la década comprendida entre 1520 y 1530, contando como fenómenos detonantes el estallido de la Reforma Protestante y el Saqueo de Roma por las tropas del Emperador Carlos. En

1. Herederos del Romanticismo, como la obra clásica de J. Burckhardt, de 1860, «La cultura del Renacimiento en Italia».

2. En «Renacimiento y Renacimientos en el arte occidental». En especial el Cap. I: «Renacimiento, ¿autodefinición o autoengaño?», y el Cap. II «Renacimiento y Renacimientos». Ed. Alianza Universidad. 3ª ed. 1981.

cualquier caso, con la desaparición de los dos Papas de la familia Medici —León X (+ 1521) y Clemente VII (+ 1534)— asistimos al fin de la simbiosis entre Cristianismo y Cultura clásica que animó el Renacimiento. Si cuando Miguel Ángel terminó los frescos de la bóveda de la Capilla Sixtina para Julio II en 1512 aún permanecíamos dentro de él, cuando en 1541 finaliza «El Juicio final», ya estamos decididamente fuera.

El Renacimiento es un período proteiforme, de enorme complejidad y riqueza, que difícilmente se deja disciplinar en esquemas o puntos de exposición, y menos en la brevedad que ésta en particular exige. Por ello, ante la alternativa de dar algunas generalidades o elegir algún aspecto más concreto que pueda interesar a los fines específicos de este Seminario, he preferido decidirme por la segunda opción acompañada de una breve recomendación bibliográfica.

La elección que he hecho es la de aproximarme al período desde la óptica de la conformación de una nueva concepción del espacio. Creo que esta supone uno de los avances decisivos del Renacimiento y abre el camino que lleva a Descartes y la Revolución Científica del S.XVII. Por demás me permite enlazar con la figura a tratar en la segunda parte de la conferencia, la del Cardenal de Cusa. Es la andadura de la construcción de un espacio continuo e ilimitado que subyace a toda la mecánica moderna.

Las obras sobre el período renacentista que me permito recomendarles para los interesados en él son las siguientes:

— De E. Cassirer: «Individuo y Cosmos en la Filosofía del Renacimiento». Agotada la edición en español desde hace tiempo, se puede conseguir en francés en Les Editions de Minuit 1983. El original es un poco antiguo, de 1927, pero sigue siendo insustituible. A falta de él se puede leer del mismo autor el Tomo I de «El problema del conocimiento», editado por el F.C.E y del que existen reediciones recientes.

— De F. Antal: «El mundo florentino y su ambiente social». Ed Guadarrama. 1967. Publicado originariamente en 1947, es uno de los mejores estudios sobre los aspecto económicos y sociales del período.

— De A. Heller: «El hombre del Renacimiento». Ed Península 1980. Obra muy completa sobre el humanismo y la ética. La edición originaria es de 1978.

— El autoridad más reconocida hoy en día acerca de la filosofía y la ciencia de la época es Eugenio Garin . De él se han publicado varios estudios en castellano, entre ellos «Medioevo y Renacimiento» y «Ciencia y vida civil en el Renacimiento italiano», «El zodíaco de la vida» y «La revolución cultural del Renacimiento».

— Finalmente para quien desee disfrutar con el período siguen siendo insustituibles, la «Historia de Florencia», de N. Maquiavelo, publicada en «Clásicos

Alfaguara» en 1979, «El Cortesano» de Baltasar de Castiglione, del cual hay una edición en Austral, y también, la clásica de Burckhardt, ya citada, «La cultura del Renacimiento en Italia».

Alianza Diccionarios tiene publicada una «Enciclopedia del Renacimiento Italiano», dirigida por J.R. Hale, cuyo manejo puede ser de utilidad.

2. *La representación del espacio*

El arte y la ciencia han venido transcurriendo, en cuanto disciplinas intelectuales, por caminos separados, aunque paralelos, en nuestra cultura. Ello es así por razones obvias de especialidad. Sin embargo, nada más alejado de lo que ocurre en la realidad, y en especial en dos momentos históricos claves:

El primero de ellos, la revolución del espacio que dio lugar a la revolución científica moderna y que vino preparada por la revolución en las técnicas de representación del espacio que se originaron en el Quattrocento italiano.

El segundo, la revolución de las coordinadas espacio-temporales, y en especial del tiempo, que llevó a cabo la teoría de la relatividad, y que fue precedida y acompañada por las revoluciones plásticas, literarias y filosóficas de finales del S. XIX y principios del XX. El impresionismo, el cubismo, Bergson, Proust o Joyce se encuentran en el mismo ojo del huracán que el propio Einstein.

Las transformaciones decisivas en matemáticas, física o arte, los cambios de paradigma, son cambios sociales en las concepciones espacio-temporales. Pierre Francastel en una obra espléndida escrita en 1950, titulada «Pintura y sociedad [3]» explica como nace una concepción del espacio en el Quattrocento y como se destruye en el S.XIX. Su tesis, que comparto ampliamente, es que esta concepción del espacio que iluminó la perspectiva lineal en arte, y la revolución newtoniana en Ciencia, no es sino «un modo de expresión convencional correspondiente a un cierto estado de las técnicas, la ciencia y el orden social del mundo en un momento dado [4]», cuya aparición y decadencia están ligadas al nacimiento y declive de un estado de civilización.

Vamos a tratar aquí, superficialmente claro está, el primero de estos momentos históricos, que podría iniciarse con la paradoja que supone el que la naturaleza y la realidad respondan a una representación artificial del espacio (continuo, homogéneo e infinito); artificio no muy lejano al del método galileiano: la Naturaleza nos contestará según nosotros le preguntemos.

3. Ed. Cátedra 1984.

4. En obra cit. pág. 11.

Esto es algo tan irreal que resultaba incomprensible para la observación y el sentido común aristotélico. Y, sin embargo, se trataba del espacio euclídeo: un espacio-sistema en el que los objetos ocupan situaciones precisas entre sí de modo ordenado y unitario. Un espacio que sólo se puede entender desde la geometría, el estudio de las proporciones y el cálculo de las dimensiones aparentes.

¿Porqué cuando observamos una tabla medieval, en la que se representa de acuerdo con la noción aristotélica del espacio, se nos aparece como una mera aglomeración o yuxtaposición de cuerpos y objetos encerrados en el fondo opaco de la tabla, dando sensación de una total irrealidad, y, por el contrario, se nos aparece tan real una obra del pleno Renacimiento elaborada según el espacio euclídeo?

Es imposible aquí dar una explicación pormenorizada de todos los pasos en virtud de los cuales se rompe con el espacio aristotélico y se consolida el espacio moderno, sin embargo creo que seguir ese itinerario es una de las aventuras más interesantes que puede emprender nuestra mente. Pintores, filósofos y científicos debieron aunar sus esfuerzos para poner fin a la idea de que hay un centro absoluto del mundo y de que hay lugares naturales a los que tienden los seres, un espacio cualitativo y heterogéneo. Mas de quince siglos de vigencia avalaban una autoridad canonizada además por la palabra divina. Brunelleschi y Alberti, Nicolás de Cusa y Descartes, Galileo y Newton transformaron esa noción del espacio, y al hacerlo dieron un nuevo rumbo a nuestra historia.

La aventura creo que podemos hacerla arrancar con el descubrimiento y formalización de la perspectiva [5] lineal, en Florencia y en el primer cuarto de siglo del Quattrocento. En esos años coinciden allí Brunelleschi, Masaccio, Ghiberti, Donatello y Alberti. Cabe hablar antes de ese momento de escarceos e intuiciones, naturales en todo proceso de gestación, como el uso de las denominadas «cajas de zapatos», los suelos ajedrezados, los techos con vigas, que permiten una cierta geometrización del espacio [6].

Brunelleschi (1377-1446), el arquitecto de la cúpula de la Catedral de Florencia, que alumbró una nueva forma de hacer y de concebir el espacio arquitectónico, realizó el siguiente experimento óptico para demostrar que era posible crear una apariencia de profundidad en el plano:preparó dos paneles, uno que representaba el

5. El término perspectiva designaba en la E. Media la ciencia de la óptica. En el Quattrocento el conjunto de especulaciones y técnicas relacionadas con la representación razonada del espacio. Ver. Panofsky, E. «La perspectiva como forma simbólica». Ed. Tusquets. 4ª ed. 1983 pág. 27.

6. Vasari en su «Le vite de piú eccellenti architetti, pittori, et scultori italiani, da Cimabue insino a'tempi nostri». nos cuenta ya de la pasión por la perspectiva de artistas de ese momento como la conocida anécdota de Paolo Uccello que a la invitación de su mujer a que acudiera al lecho conyugal respondió «O che dolce cosa é questa prospettiva». En Ed. Einaudi. Torino. 1986. pág. 241.

Baptisterio y otro que representaba la plaza de la Signoria; en ellos abrió un agujero y obligaba al espectador a ponerse detrás del panel pintado y mirar por el agujero por medio de un espejo. El presupuesto, esencial, del florentino era que el artista y el espectador deben adoptar una situación fija con respecto a los objetos a reproducir y contemplar. Para crear geométricamente la ilusión de la tercera dimensión, hay que partir de un punto de vista definido. La obra se representa para un espectador que debe colocarse en un lugar fijo y privilegiado. Lo mismo le sucede al mundo galileiano-newtoniano: las leyes de la naturaleza se representan para un científico-espectador-medidor que ocupa un lugar fijo y privilegiado en el Universo.

Masaccio pintó en 1425 para la Iglesia de Sta María Novella el fresco de «La Trinidad», considerada como la primera aplicación rigurosa del punto de fuga.

Alberti (1404-1472) formaliza los hallazgos de Brunelleschi y Masaccio en la primera teoría de la perspectiva que se conoce expuesta en su tratado «De la pintura [7]». Su tratamiento es fundamentalmente matemático y demuestra profundos conocimiento de geometría y óptica. A él debemos la comparación del cuadro a una ventana a través de la cual nos asomamos a una parcela del mundo visible:

«Lo primero, dibujo en la superficie a pintar un cuadrángulo de ángulos rectos, grande cuanto me place, que me sirva de ventana abierta desde la cual se ve la historia, y determino cuán grandes quiero que sean los hombres que pinto [8].

Panofsky expresa en términos precisos lo que la misma significa en la obra de Alberti:

> «En principio esta construcción geométrica exacta [...] sigue estando fundada sobre dos premisas que tanto la óptica clásica como la medieval tuvieron por axiomáticas: la primera que la imagen visual es producida por unas líneas rectas (rayos visuales) que unen el ojo con los objetos vistos formando así la configuración entera lo que se denominaba «pirámide visual» o «cono visual»; la segunda que el tamaño y la forma de los objetos tal y como aparecen en la imagen visual vienen determinados por la posición relativa de los «rayos visuales». Lo que es fundamentalmente nuevo es el supuesto de que todos los puntos que integran la imagen visual se sitúan sobre una superficie que no es curva, sino plana; en otras palabras, que sólo se puede obtener una representación perspectiva correcta proyectando los objetos sobre un plano de intersección de la pirámide o cono visual.
>
> Esta proyección, central por definición se puede construir por métodos geométricos elementales; y una representación basada en esta construcción se puede

7. La edición que he manejado es la de Fernando Torres. Valencia 1976.

8. En obra cit. Lib. I pág. 105.

definir como transformación proyectiva exacta de un sistema espacial caracterizado por esas dos cualidades que distinguen el «quántum continuum» del «quántum discretum».

La infinitud va implícita —o mejor dicho visualmente simbolizada— en el hecho de que cualquier conjunto de líneas paralelas, independientemente de su ubicación y dirección, converjan hacia un único «punto de fuga» que por lo tanto viene a ser literalmente un punto en el que las paralelas se encuentran, es decir, un punto situado en el infinito; lo que con escaso rigor llamamos «el punto de fuga» de un cuadro no tiene otro privilegio que el de estar situado exactamente frente al ojo y constituir así el foco de sólo aquellas paralelas que son objetivamente perpendiculares al plano pictórico, y el propio Alberti afirma explícitamente que la convergencia de estas «ortogonales» indica la sucesión y alteración de las cantidades «quasi persino in infinito». La continuidad, por otra parte, va implícita —o mejor dicho visualmente simbolizada— en el hecho de que cada uno de los puntos de la imagen perspectiva viene exclusivamente determinado, como en Descartes, por tres coordenadas; y de que mientras que una serie de magnitudes iguales y equidistantes que se suceden unas a otras en profundidad se transforma en una serie de magnitudes decrecientes separadas por intervalos decrecientes, esa disminución es constante y puede ser expresada mediante una formula recurrente [9]».

Lo auténticamente característico de Alberti es que para él, frente a los métodos empíricos inventados por Brunelleschi o el propio Durero, las estructuras del cuadro deben definirse y controlarse matemáticamente.

Respecto a la cuestión del punto de fuga como lugar donde se encuentran las paralelas en el infinito, Alberti no dice nada acerca de si se trata de una ficción matemática, un punto dotado de realidad física o un mero símbolo. Leonardo no vio nunca claro este principio y parece que no fue hasta Kepler y Desargues que fue explícitamente analizado.

3. *Contra Euclides*

Euclides en el Teorema Octavo de su «Óptica» había establecido que «la diferencia aparente entre magnitudes iguales vistas desde distancias desiguales no es en absoluto proporcional a estas distancias», sino que el tamaño aparente de los objetos estaba determinado por el ángulo desde el que eran vistos [10].

9. En «Renacimiento y Renacimientos» cit. págs. 187 a 191.

10. Afirma Panofsky en «La perspectiva como forma simbólica» cit., Nota 17, que esta contradicción con los principios de la perspectiva desorientó tanto a los traductores de Euclides que estos no vacilaron en corregirle, para hacerle concordar con las exigencias de esta.

Ptolomeo, por contra, en su «Óptica» matizó a Euclides al no limitarse a tomar en consideración sólo el ángulo visual, sino que tuvo en cuenta también las longitudes. Según esta concepción, adoptada por Brunelleschi, la magnitud aparente del objeto es inversamente proporcional a su distancia al ojo.

Expresado de manera simple: un objeto dos veces mayor es un objeto cuya medida en el plano de proyección es dos veces mayor. Según Euclides, en cambio, un objeto dos veces mayor es un objeto que es visto con un ángulo doble. Se puede simplificar según el siguiente esquema:

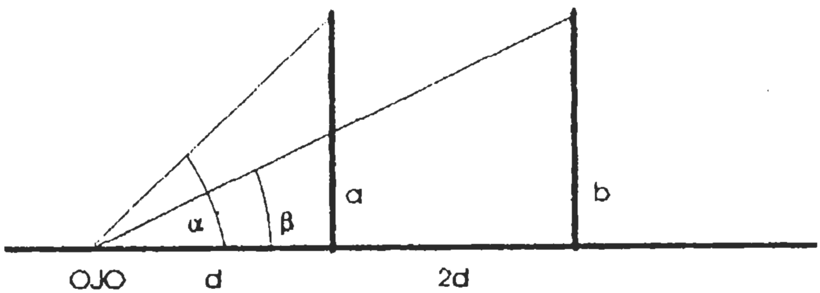


Fig. 1

Si vemos dos líneas verticales iguales a y b desde distancias d y 2d, b aparecerá en la imagen perspectiva la mitad de larga que a. Desde la óptica clásica dado que las magnitudes aparentes son directamente proporcionales a los ángulos visuales α y β de modo que (dado que β es mayor que $\alpha/2$, la magnitud aparente de b será mayor que a/2.

La diferencia entre una y otra concepción no es banal, como se puede imaginar, pues mientras que la óptica euclidea consideraba la visión como una esfera, la segunda lo hacía como lineal.

4. El renacimiento de la Matemática

Esta concepción racional del espacio no es patrimonio exclusivo de los artistas sino de todo un conjunto de prácticas industriales, comerciales, militares y políticas.

Fueron ellas las que obraron un renacimiento social de la matemática. Estas escaparon al control de unas Universidades que empeñadas aún en viejas disputas escolares no supieron encauzar los cambios que se estaban produciendo en la sociedad. Fueron los negociantes y mercaderes, los ingenieros, los artistas, los constructores, quienes desarrollaron las técnicas del cálculo y la medición.

Así se explica que al margen de aquellas instituciones educativas aparecieran unas escuelas especiales, llamadas escuelas de ábaco. Eran centros laicos y prácticos donde se enseñaba una matemática aplicada a las necesidades del momento. Baxandall [11] ha demostrado cómo el análisis de las formas geométricas se convirtió en preocupación común a comerciantes, ingenieros y artistas. El propio Alberti escribió sus «Juegos matemáticos» en el que divulga una serie de recetas matemáticas para uso común. Piero della Francesca, junto al tratado más riguroso y técnico sobre la perspectiva —«La perspectiva pictórica», publicó un manual de matemática para comerciantes— «El tratado del Ábaco».

Es tal grado de difusión de las matemáticas prácticas lo que nos permite entender la intensa geometrización que alcanzaron los esquemas mentales de los hombres de aquel período, la reorganización del espacio real y la representación de ese espacio.

Otra actividad que alcanzó un gran apogeo durante este período y que igualmente ejerció una influencia de primera mano fue la cartografía. Desde principios del siglo XV, en la Toscana se desarrollo una amplia actividad geográfica y cartográfica. El primer diseñador florentino de mapas fue Cristóforo Buondelmonte, que publicó el primer Atlas del Mar Egeo y sus Islas. Pero el gran impulso para profundizar en los estudios geográficos y cartográficos fue dado por el renovado interés por la obra de Ptolomeo. En 1397 llegó a la ciudad, invitado por Coluccio Salutati, el profesor bizantino Manuele Crisolara, quien arribó portando una verdadera biblioteca. Entre estas obras estaba la Geografía de Ptolomeo, integrada por un texto teórico y un atlas que fue objeto de intensos estudios. Gracias a ello Florencia se convirtió en el más importante centro de difusión de la obra de Ptolomeo. Las primeras observaciones científicas fueron las de Paolo del Pozzo Toscanelli, nacido el año que Crisolara llegó a Florencia. En ese tiempo los Turcos habían interrumpido las tradicionales vías de comunicación terrestres que unían Europa y Asia. Los países europeos quedaron obligados a utilizar las rutas marítimas. En 1474 Toscanelli preparó un mapa en el cual y en base a cálculos astronómicos llegó a la conclusión de que era posible llegar a Asia a través de Occidente. Envió dicho mapa a Fernando Martines, consejero del rey de Portugal. En 1478 un naufragio llevó a Colón a las costas portuguesas, donde pudo acceder a una copia del mapa de Toscanelli. (Tampoco hay que olvidar que este fue íntimo amigo de Copérnico durante el período que éste pasó en Italia). El paralelismo entre la ciencia cartográfica y la perspectiva es evidente ya que ambas

11. En «Pintura y vida cotidiana en el Renacimiento». Ed. Gustavo Gili. Barcelona 1978.

tratan de construir la imagen de un conjunto dado respetando las proporciones entre sus elementos. La topografía, la cartografía y la perspectiva aparecen como distintas ramas de una ciencia general de la representación espacial.

No es difícil de entender la influencia que la obra de Ptolomeo pudo tener en Brunelleschi y Alberti. En ella se expresaba la idea de utilizar sistemáticamente una reja para descomponer, medir y representar el espacio. Proponía varios métodos de proyección cartográfica. El tercero y último de ellos se presentaba, al parecer, como una construcción perspectiva. Consideraba un observador ideal a una distancia determinada del globo terrestre cuyo ojo se encuentra en el plano de un paralelo convenientemente elegido. Ptolomeo representaba sobre un plano la superficie terrestre así observada mediante una observación similar a la que hacia Alberti. Era la primera vez que se daban instrucciones precisas para constituir una imagen de este tipo a partir de un punto fijo que representa el ojo del espectador-medidor.

Parece ser que el análisis de Ptolomeo conducía fácilmente a las nociones básicas de la perspectiva clásica. Máxime cuando sabemos que Alberti fue un apasionado de la cartografía, como lo demuestra el mapa que hizo de la ciudad de Roma entre 1432 y 34 siguiendo las técnicas de Ptolomeo. J. Gadol, en su obra «León B. Alberti» (University of Chicago Press. 1969), demuestra como la construcción clásica y fundacional de la perspectiva clásica que hace Alberti, es una síntesis entre los experimentos de Brunelleschi y las técnicas geográficas de Ptolomeo. Ahora bien lo que el primero deba al segundo queda de momento en el misterio.

En el mismo momento en que arquitectos y pintores descubrían una espacialidad infinitamente extensa, el pensamiento abstracto iniciaba la ruptura con la concepción aristotélica del mundo y el abandono del cosmos edificado alrededor de la Tierra, considerado como un centro absoluto y encerrado por la esfera celeste, considerada como un límite igualmente absoluto. El punto de arranque lo encontramos en la obra de Nicolás de Cusa (1401-1464).

5. Nicolás de Cusa; vida y obra

Nacido en Cusa en 1401, estudió en las Universidades de Heildeberg y Padua, donde conoció e inició una larga amistad con el matemático y geógrafo Toscanelli [12], quien ejerció una amplia influencia sobre él.

12. Paolo Toscanelli (1397-1482). Quizás fue uno de los personajes clave del S. XV, aunque aún desconocemos bien su influencia. Sabemos que escribió un tratado sobre la perspectiva en 1420. Fue nombrado, tras estudiar en Padua, astrónomo oficial de la Signoría de Florencia. Elaboró un mapa para llegar a China a través del Atlántico que levantó amplia expectación entre sus coetáneos y que se supone fue el que utilizó Colón.

Hombre renacentista y universal. Político y teórico, comenzó a significarse a partir del Concilio de Basilea de 1432. Su vida y acción estuvo dedicada a la concordia entre las Iglesias y a impulsar la integración de la Iglesia Católica dentro del movimiento renacentista.

En este contexto escribió durante el bienio 1433-34 «De concordantia catholica», en la que para preservar la unidad cristiana se adhería a los conciliaristas, partidarios de acentuar el carácter asambleista de la Iglesia, mediante la potenciación de la posición y derechos de los Concilios Generales. Convencido de los derechos naturales de la soberanía popular, no sólo en el Estado sino también en la Iglesia, era partidario de las teorías políticas renovadoras según las cuales en el Estado el monarca no recibía su autoridad directa e inmediatamente de Dios, sino del pueblo, y en la Iglesia el Concilio General era superior al Papa, que solo poseía un primado administrativo, pudiendo ser depuesto por aquel cuando hubiere razones para ello.

Acudió a Bizancio en la comitiva para recoger a los representantes de la Iglesia Ortodoxa que iban a acudir a Florencia al Concilio para la reunificación de las Iglesias en 1439. Aún hoy podemos ver en el Palacio Medicis, la comitiva llegando a la ciudad de Cosme el Viejo, en un mural pintado por Benozzo Gozzoli.

El viaje fue fundamental en su obra, como él mismo reconoce. Allí, en Bizancio, entró en contacto con las obras neoplatónicas de primera mano. En la comitiva hacia Florencia viajaban también Gemisto Pleto y Demetrios Calcondilas quienes prendieron la llama del saber griego y del neoplatonismo en Italia. Acudieron con las obras originarias de Platón, Plotino, Proclo, Jámblico, e impulsaron a través de Marsilio Ficino la fundación de la Academia neoplatónica de Florencia, ubicada en la Villa de Careggi, y cuya producción final más significativa fue «El tratado sobre la dignidad del hombre» de Pico della Mirándola. La vida del Cardenal de Cusa y la de M. Ficino corren paralelas durante casi treinta años, y la relación del Cusano con la Academia fue constante hasta el punto que cuando Lorenzo el Magnifico llamó a Pico para incorporarlo a la Academia este se hallaba en tránsito hacia Cusa para visitar la biblioteca de Nicolás, que gozaba entonces de un gran prestigio, dada su continua búsqueda de manuscritos originales.

En 1440, al regreso de Bizancio, publica su obra clave: «La docta ignorancia» acompañada de «Sobre las conjeturas».

En 1448 es nombrado Cardenal y se va inclinando progresivamente a favor de la primacía del papado. Continua hasta su muerte, en 1464, publicando obras que desarrollan lo expuesto en «La docta ignorancia». Entre las referidas a las matemáticas están: «De transmutationibus geometricis» (1450), «De mathematicis complementis» (1453) y «De mathematica perfectione» (1458).

N. de Cusa se sitúa en el tránsito del Medioevo al Renacimiento; en él encontramos aún profundas convicciones escolásticas junto con audacias que escapan a dicho período y se abren hacia la nueva época.

6. La actualidad del problema del Infinito: el legado de Duns Scoto y Guillermo de Occam

Duns Scoto y Guillermo de Occam reinterpretaron en el S. XIV las nociones bíblicas adaptándolas a las nuevas estructuras emergentes en esos momentos: el mercado y el individuo. Estructuras que poseían como nota en común la separación entre razón y poder.

En esa nueva teología la noción del infinito juega un papel clave ligada a la aparición de la voluntad y la libertad sobre las que se ahorma el nuevo hombre europeo.

El planteamiento esquemático de la cuestión se presenta en los siguientes términos: la relación entre Dios y el hombre se nos ofrece como relación entre infinitud y finitud. Para Tomás de Aquino esa relación es aún viable a través de una reinterpretación del concepto aristotélico de analogía: el conocimiento que lo finito tiene de lo infinito no es completo pero si semejante en distintos grados. No sucede lo mismo para Escoto y Occam que sustituyen el concepto de analogía por el de univocidad: el lenguaje de lo infinito (Dios) y de lo finito (hombre) son distintos. Todas las representaciones que el hombre se haga nacen de su voluntad, de su querer hacerse esas representaciones, no porque sean, ya que no posee ningún instrumento que le permita determinar que el pensamiento que tiene sobre la infinitud de Dios sea de la manera que él se la representa. Dicho de otra manera nuestras palabras y conceptos carecen de correspondencia con el lenguaje divino, lo que impide cualquier tipo de analogía y encierra a dios y al hombre en lenguajes unívocos para cada uno de sus ámbitos.

Pero semejante noción de infinitud, a la vez que recrea la distancia entre Dios y el hombre, abre el espacio autónomo de éste; hace aparecer el sujeto humano que piensa y habla según sus propias leyes. Eso se constituye como autonomía de la razón.

Consecuentemente este planteamiento conduce a la filosofía occidental hacia el protagonismo de la voluntad y el poder (la acción). Cerrado el camino que le puede conducir a Dios, a través de la razón, a esta sólo le resta una certidumbre: el mundo es, posee existencia.

Nos vemos enfrentados aquí al meollo de la cuestión clave en el pensamiento occidental moderno: el divorcio entre razón y realidad, entre sustancia pensante y extensa. Dicho en términos escolásticos entre esencia y existencia.

Para Scoto, Dios ha creado el mundo. Para ello primeramente ha generado las Ideas en las que están configuradas lo que va a ser la creación. Esas Ideas son formas posibles. De entre esas infinitas formas posibles ha elegido unas y no otras por un acto de voluntad, de manera que la existencia no es otra cosa que un producto de la voluntad divina. La esencia pertenece así al mundo de las Ideas mientras que la existencia al de la voluntad. En la esencia las cosas viven en su posibilidad, en la existencia en su realidad. Entre ellas media un acto de elección.

La finitud del hombre se manifiesta en su incapacidad para alcanzar la esencia por lo que el significado, el sentido de lo existente se le escapa, (sólo es accesible a la «potentia infinita dei»), le queda tan sólo la mera realidad, los entes individuales.

¿Qué número de modelos puede concebir la mente divina?: infinitos desde el punto de vista de la posibilidad, pero los que existen y podemos percibir son finitos. Destruida toda posibilidad de relación con Dios por la vía del conocimiento, al hombre sólo le queda el recurso de la fe y explicar el mundo por la causa segunda (la Naturaleza, pues la primera es Dios), para lo cual se nos ha dado la autonomía de la razón.

La imposibilidad de acceder a un conocimiento positivo de Dios hace retornar en el siglo siguiente la vía del conocimiento negativo, la teología negativa: el no conocimiento es una forma de conocimiento. Nicolás de Cusa recurre a beber a las fuentes tradicionales del mismo. Pero él profundiza en ella transformándola en metodología. Finalmente para abrir un acceso limitado al conocimiento divino se ve obligado a incurrir en un cierto panteísmo por medio de grados de identificación de Dios con el Universo.

6. El arte de la paradoja: Teología y Conocimiento

Nicolás, saltando por encima del platonismo y el aristotelismo medieval, acude a beber a otras fuentes distintas: las del neoplatonismo, especialmente de Proclo, y la teología negativa, Dionisio Areopagita y el Maestro Eckhart.

Escribe en 1459 el Tratado «El principio» sobre el Parménides de Platón, y el comentario de Proclo al mismo diálogo. Este comentario ejerció en su momento una gran influencia entre los dominicos alemanes discípulos de Alberto el Grande, tales como Ulrico de Estrasburgo, Dietrich de Friburgo y, sobre todo, Berthold de Mosburgo, hacia 1340. Su conocimiento le llega a Nicolás a través del jefe de filas del albertismo colonés del S.XV Heymeric de Campo, del que aquel fue discípulo. El Cusano mantiene pronto un diálogo directo con el texto proclusiano, y a decir de uno de sus estudiosos, Klibansky, este Diálogo ejercerá siempre una fascinación especial sobre él. Consigue acceder al original en 1440. Jean A. de Bussi en un panegírico del Cardenal le presenta a la caza asidua de los manuscritos de Proclo.

Recordemos que las construcciones intelectuales de los griegos se levantan siempre a base de dualidades (materia-forma, potencia-acto, lleno-vacío, quietud-movimiento) de las que la decisiva o última es ser-no ser. Este es su límite. Aquí no cabe el Dios-Uno de los cristianos. Cuando el neoplatonismo obra el primer sincretismo entre platonismo y cristianismo a través fundamentalmente de Plotino (Proclo es un seguidor suyo), coloca por encima de esa dualidad griega de ser y no-ser la unidad, el Uno, y lo hace con la siguiente paradoja: Ese que Es, no Es; Ese que no Es, Es. Este principio no es otra cosa, dirá N. de Cusa que «la coincidencia de los opuestos». Por tanto, si el ser es el principio de determinación, el Uno es el principio de indeterminación.

Si rememoramos el «Timeo», nos topamos allí con la coexistencia de tres principios: el Demiurgo o causa eficiente, las Ideas, o modelos, y la Materia. El Demiurgo es la Primera Causa. Pero para los neoplatónicos la lógica de Platón es insuficiente y se preguntan. ¿Quién es la causa del Demiurgo?, ¿Quién es la forma de esa forma?. Si el Dios-productor es la primera forma de determinación, lo primero verdadero es lo indeterminado, lo Uno. Pero puesto que el intelecto humano se mueve por el principio de no contradicción —algo no puede ser y no ser a la vez— ese Uno es incognoscible. Lo Uno es aquello que no puede saberse lo que es; sólo se puede percibir por vía negativa: sabemos lo que no es —el ser— pero no podemos saber lo que es . En esto consiste la teología negativa: el no conocimiento es una vía de conocimiento. La condición humana es la de no saber, lo que sabemos es que nunca sabremos nada:

> «Conviene negarlo todo radicalmente ya que esta Causa es preexistente y transciende todas las cosas —y aquí no juzgamos que exista contradicción entre la afirmación y la negación— ya que esta Causa es anterior a todas las cosas y existe por encima de toda afirmación o negación [...]
>
> «No poseyendo para ella ni discurso ni inteligencia, ya que sobrepasa superesencialmente a todo lo creado [...]»
>
> «Decimos, sin embargo, que la Causa universal y que está por encima de todas las cosas no tiene esencia, ni vida, ni razón, ni mente, ni posee cuerpo, ni figura, ni cualidad, ni cantidad, ni anchura, ni está en algún lugar, ni tiene vista, ni tacto sensible, ni puede sentir, ni está bajo los sentidos, ni admite cualquier desorden o perturbación excitada por pasiones materiales, ni está sometida a la debilidad por causa de lo sensible, ni existe faltada de luz, ni con cambios, corrupciones o debilidades, ni fluye (o se derrama), ni es nada de las cosas que son, ni posee el ser, ni nada posee [13]».

13. En Pseudo Dionisio Areopagita: «Teología mística» Caps. I y IV. Ed. Antoni Bosch. 1980 págs. 54 y 59.

La Teología negativa deriva hacia la mística y una de las vías de penetración de la misma en la cultura alemana, sino la principal, es el Maestro Eckhart (S. XIV).

La vía negativa es teología, pero es también metodología, o se transforma en metodología, como es el caso de la obra de N. de Cusa y del propio Descartes: es duda sobre el conocimiento humano, sus límites y posibilidades.

Para el Cusano, Dios es la «coincidentia oppositorum», la síntesis de los opuestos en un Ser único y absolutamente infinito. Las cosas finitas son múltiples y diversas y poseen diferentes naturalezas y cualidades, mientras que Dios transciende todas las distinciones y oposiciones que se encuentran en las criaturas reuniéndolas en sí mismo de manera incomprensible. El Uno trascendente prima sobre el Uno coordinado al Ser. Se pasa del Uno al múltiple o todo concebido como Ser. Del absoluto inefable al universal inteligible.

> «Las oposiciones convienen sólo a aquellas cosas que admiten algo que excede y algo que es excedido. Nunca al máximo absoluto, porque está por encima de toda oposición. Y esto es así porque el máximo es absolutamente en acto todas las cosas que pueden ser, y ello sin ninguna oposición; entonces, sobre toda afirmación hay, de modo semejante, una negación, y todo aquello que se concibe que es, no es menos que no ser. Y todo aquello que se concibe como que no es no es más no ser que ser.
>
> No significa cosa distinta decir Dios.
>
> Este transciende a todo nuestro entendimiento, que no puede combinar las cosas contradictorias por vía racional en su principio puesto que discurrimos por las cosas que se nos hacen manifiestas por la naturaleza mínima, la cual, estando apartada de esta virtud infinita, no puede coordinar simultáneamente las cosas contradictorias.
>
> Por encima, pues, de todo discurso racional vemos incomprensíblemente que la absoluta maximidad es infinita, a la cual nada se opone y con la cual coincide el mínimo [14]».

El máximo y el mínimo son Uno:

> «Y puesto que todas las cosas existen del modo mejor que pueden existir, sin número no podría entonces existir la pluralidad de los entes. Quitado el número cesa la discreción, el orden, la proporción, la armonía e incluso la misma pluralidad de los entes.

14. En «La docta ignorancia». Libro I, Cap. IV. Ed. Aguilar 5ª ed. 1981 págs. 33 y 34.
Una parte del pensamiento de su época, personalizada en el rector de la Universidad de Heildeberg, Wenck, le acusó de arruinar la Filosofía y la Teología con sus teorías. Les contestó en sus «Tres tratados sobre la docta ignorancia y la concordancia de los opuestos (1449). París. Les editions de Cerf. 1991.

> Si ascendiendo en los números se llega en acto a su máximo, no se llega, sin embargo, puesto que el número es finito, al máximo mayor que el cual nada pueda haber, puesto que este sería infinito. Por lo cual es evidente que el ascenso de un número es finito en acto y ha de estar en potencia con respecto a otro, y que en el descenso el número se comporta de forma semejante. Por lo cual es necesario llegar en el número a uno mínimo, menor que el cual no pueda haber ninguno y que es la unidad. Y como menor que la unidad no puede haber nada, la unidad será el mínimo absolutamente, el cual coincide con el máximo.
>
> La unidad absoluta le conviene propiamente al innombrable Dios y que Dios es de tal modo Uno, que es en acto todo aquello que es posible ser. La deidad es unidad infinita [15]».

De esta forma N. de Cusa afirma los límites al conocimiento humano. Este procede por medida mediante una ecuación que se establece entre el contenido indagado y determinados elementos ya conocidos; funciona por relación o comparación. La razón afirma o niega, está gobernada por el principio de no contradicción, de incompatibilidad o exclusión mutua de los opuestos, de manera que sólo puede conducirnos a un conocimiento por relación y aproximación. El lenguaje y el concepto, dice Cassirer en su estudio sobre nuestro personaje [16], permanecen vinculados al ser dependiente y limitado, no pueden determinar la esencia de su objeto en sí y para sí, sino sólo en lo que lo diferencia de otros contenidos y se contrapone a ellos. De manera que su conocimiento se mueve en el término de lo referencial del cual poder extraer un grado de certeza probabilística que se mueve entre el más y el menos.Ese saber es progresivo y por lo tanto provisional. Nos movemos entre hipótesis más o menos convincentes, o en sus propios términos, entre conjeturas. A la única verdad a que podemos aspirar es una verdad por aproximación o por medición.

En efecto, un saber referido al mundo de los cambios y de la multiplicidad no puede encontrar en sí mismo un punto de apoyo y quietud.

Su propuesta es ya profundamente moderna y en ella apreciamos las primeras resonancia criticas kantianas.

> «El llegar a la exactitud de las combinaciones en las cosas corporales y a una adaptación adecuada de lo conocido a lo desconocido es algo superior a la razón humana [...]. Por eso a Sócrates le parecía que no sabia nada, a no ser que era un ignorante [...]. Deseamos verdaderamente saber que somos ignorantes. Si consiguiéramos alcanzar esto plenamente habríamos alcanzado la docta ignorancia [17]».

15. En Obra cit. Libro I, Cap. V págs. 35 y 36.

16. En «El problema del conocimiento». Vol. I. Ed. Fondo de Cultura Económica. 2ª Reimp. 1974 pág. 66.

17. En «la docta ignorancia» cit. Libro I Cap. I «De qué manera saber es ignorar». Pág. 26.

Pero ese carácter siempre inconcluso y abierto del conocimiento humano es a la vez su fuerza, su potencia, pues se convierte en una actividad, en un proceso que no tiene fin, en un progreso indefinido.

> «Así pues, el entendimiento, que no es la verdad, no entiende la verdad con exactitud. aunque se dirija hacia la verdad mediante un esfuerzo progresivo infinito.
>
> Es evidente, pues, que nosotros no sabemos acerca de lo verdadero, sino que lo que exactamente es en cuanto tal es algo incomprensible y que se relaciona con la verdad como necesidad absoluta y con nuestro entendimiento como posibilidad.
>
> La equididad de las cosas, por consiguiente, que es la verdad de los entes, es en su puridad inalcanzable [...] y cuanto más profundamente doctos seamos en ésta ignorancia tanto más nos acercaremos a la verdad [18]».

¿De qué manera se relaciona Dios con el mundo?. El mundo es una explicación de Dios. La divinidad se explica a través del Universo. El Uno se convierte en pluralidad por contracción. El Universo es el máximo contracto. Dios es la forma ontológica absoluta de todas las formas contractas. Es gracias a la diferenciación que la Naturaleza manifiesta sus virtualidades y singularidades. Por ello a través del Universo podemos tener un acceso limitado al conocimiento de Dios.

> «Todos nuestros más sabios, más divinos y más santos doctores están de acuerdo en que realmente las cosas visibles son imágenes de las invisibles y que nuestro creador puede verse de modo cognoscible a través de las criaturas como en un espejo o en un enigma [19]».

Y el instrumento idóneo para ese acceso es la matemática. Frente al agustinismo medieval que afirmaba el acceso a Dios por la vía interior o del alma, la Escolástica abrió el camino hacia la ciencia o el estudio de la naturaleza, considerando que era lícito acceder al conocimiento divino por medio del estudio de la naturaleza. El Cusano da un paso más allá hacia el Dios matemático de Kepler, Galileo y Newton, al establecer la vía del acceso al conocimiento divino a través de la matemática.

> «Los sabios buscaron hábilmente en los objetos matemáticos, por medio del entendimiento, ejemplos para la indagación de las cosas. Y ninguno de los antiguos a quien se considere importante, buscó otra semejanza que la matemática para las cosas difíciles. De tal modo Boecio, el más ilustre de los romanos,

18. En «La docta ignorancia» cit. Libro I. Cap. III «Que la verdad exaxta es incomprensible». Pág. 31.

19. En «La docta ignorancia» cit. Libro I. Cap. XI «Que la matemática nos ayuda mucho en la aprehensión de las distintas cosas divinas». Pág. 48.

sostenía que nadie que no se ejercitara profundamente en las matemáticas podría alcanzar la ciencia de las cosas divinas. ¿Acaso Pitágoras, el primer filósofo, no puso en los números toda investigación de la verdad ?. En tanto que siguieron a éste los platónicos y nuestros filósofos más importantes como Agustín y el propio Boecio afirmaron indudablemente que *el número había sido en el ánimo del creador el primer ejemplo de las cosas que habían de crearse.*

Siguiendo este camino de los antiguos y coincidiendo con ellos decimos que como la vía de acceso a las cosas divinas no se nos manifiesta sino por medio de símbolos, podríamos usar con ventaja de los signos matemáticos a causa de su incorruptible certeza [20]».

«Aquellos que se vuelven hacia el infinito Uno-Trino, se elevan desde las figuras matemáticas a las figuras teológicas por adicción del infinito a las figuras matemáticas y se libran a continuación de las figuras teológicas a fin de contemplar mentalmente el único infinito uno y trino; por tanto les está permitido discernir que todo es unidad bajo modo complicativo y que la unidad es todo bajo modo explicativo [21]».

7. La Matemática

En el Cap. XII de «La docta ignorancia», N. de Cusa expone cómo hay que usar las matemáticas para llegar al infinito. Las figuras matemáticas devienen símbolos matemáticos del infinito, y las figuras infinitas que la inteligencia se da como hipótesis no son, a su vez, sino una ayuda a fin de elevarse al infinito sin figura. Este método llamado «Transsumptiva proportio», consta pues de dos fases que comportan cada una un salto cualitativo. En la primera de ellas la inteligencia opera una transmutación de las figuras finitas en infinitas, en la segunda la transmutación se opera hacia el infinito sin figuras.

> «Puesto que consta que el máximo absoluto no puede ser ninguna de aquellas cosas, que son sabidas o concebidas por nosotros, de ahí que como nos proponemos investigarlo simbólicamente es necesario trascender la simple similitud. Pues como todas las cosas matemáticas son finitas y no pueden imaginarse de otro modo, si queremos usar cosas finitas como ejemplo para ascender al máximo absoluto, en primer lugar es necesario considerar las figuras matemáticas, con sus propiedades y razón.
>
> En segundo lugar trasladar adecuadamente estas figuras a tales infinitas figuras.
>
> En tercer lugar, llevar aún más altas las razones mismas desde las figuras infinitas hacia el simple infinito absolutisimo desde cualquier figura [22]».

20. En «Docta ignorancia» VK. Lib. I. Cap. XI VK. Págs. 49 y 50.

21. En «Complemento Teológico». París Les editions du Cerf. 1991. Cap I pág. 98.

22. En «Docta ignorancia» cit. Lib. I. Cap. XII «De que modo hay que usar los signos matemáticos a este proposito». Pág. 51.

El intento del Cusano de usar la matemática finita trasladada a una opción infinita termina obviamente en la paradoja. La razón no admite en matemáticas la coincidencia de los opuestos, pues se basa en el principio ya señalado de no contradicción, cosa que ya resaltó el propio filósofo en lo que se refiere a la geometría de Euclides en su obra «De conjecturis» (II,1):

> «Nada en matemáticas podrá ser conocido por otro principio. Todo aquello que es demostrado como siendo verdadero procede, pues, de él, si tal no fuere el caso se introduciría la coincidencia de los opuestos y esto sería salirse de los límites de la razón [...] y puesto que este principio brilla en las matemáticas, sus demostraciones son exclusivamente racionales y absolutamente verdaderas por la razón».

Admitido esto, el Cardenal intenta salirse de la geometría euclidea por medio de una meta-geometría no euclidiana, que él llama intelectual, frente a lo racional, y fundada sobre la coincidencia de los opuestos. Tal se daría en la primera de las fases arriba mencionadas, y consistiría en apartar mentalmente por la inteligencia una figura matemática definida hasta llegar a un límite máximo, es decir, a infinitizar sus propiedades. Entonces coincidiría con sus opuestas, de manera que sus propiedades se invertirían en las de sus contrarios. Así el máximo es tal que el mínimo está en el propio máximo, por lo que radicalmente se supera tal oposición mediante el infinito.

> «Cualquiera que busca conocer es estimulado por el conocimiento infinito y si se considera el problema aún más de cerca, se constatará que cuando se añade la infinitud a un término cualquiera, su adición al término provoca la supresión de la terminación, de suerte que aquello que es denotado como terminado por una palabra o un término, es captado por la intuición mental como infinito, es decir, como siendo sin término.
>
> Y cuando la inteligencia capta así intuitivamente el límite, bajo modo ilimitado, es decir, lo finito bajo un modo infinito, ella lo discurre entonces como estando por encima de toda oposición, de toda alteridad, los cuales se encuentran solamente al nivel de lo limitado, pues la limitación no puede existir sin la diversidad. Y se encuentra entonces en ella esta variedad que recibe nombres diversos según que sea grande o pequeña. Si pues se retira la limitación, la diferencia se transforma en concordancia, la desigualdad en igualdad, la curva en recta, la ignorancia en ciencia y las tinieblas en luz. Y se comprende entonces como, una vez suprimidos los limites nosotros descubrimos la pluralidad de los seres limitados, bajo modo no plural, en un Principio Unico, Ilimitado e Inefable [23]».

23. En «Complemento Teológico» cit. págs. 101 y 102.

Veamos algunos ejemplos de su forma de operar:

Dice: Si hubiera una línea infinita sería recta, sería triángulo, sería circulo y también esfera. Y del mismo modo si hubiera una esfera infinita, sería triángulo, círculo, línea; y lo mismo puede decirse del triángulo infinito y del círculo infinito.

Que la línea infinita sea recta se manifiesta así: la línea de un círculo es una línea recta y la circunferencia es una línea curva mayor que el línea. Cuanto mayor sea el círculo menor será su curvidad, por tanto la circunferencia del circulo máximo, mayor del cual no puede haber otra, es mínimamente curva por lo cual es máximamente recta. Coincide por lo tanto el máximo con el mínimo de modo tal que la línea máxima e infinita es necesariamente rectilinea, a la cual no se opone la curvidad; más aún la curvidad misma de la máxima línea es la rectitud [24].

Otro: En un triángulo, uno de cuyos lados sea infinito, los otros dos no pueden ser menores, porque cualquier parte del infinito es infinito, de modo que es necesario que en todo triángulo, uno de cuyos lados sea infinito, los otros lo sean igualmente. Y como no puede haber varias cosas infinitas, se entiende transcendentemente que el triángulo infinito no puede estar compuesto por varias líneas. Y como el verdadero triángulo es aquel que no puede existir sin tres líneas será necesario que la misma y única línea infinita sea tres y que las tres sean una y simplicisima línea. Lo mismo en cuanto a los ángulos, puesto que no habrá en él sino un ángulo infinito. Pero una y la misma cosa será la línea infinita y los ángulos, de modo que también la línea es ángulo porque el triángulo es línea [25].

Una más: Supóngase que a b c sea un triángulo construido mediante el desplazamiento de la línea ab hasta alcanzar c, permaneciendo a inmóvil. Si la línea a b fuera infinita y b se desplazara totalmente hasta alcanzar su punto de origen, se formaría un círculo máximo del cual b c es una parte, y como esta parte lo es de un arco infinito, b c es entonces una línea recta y como toda parte del infinito es infinita, b c, por tanto, no es menor que todo el contorno de la circunferencia infinita, y b c será también no sólo una parte sino una completa circunferencia. Por lo cual sería necesario que el triángulo sea círculo máximo, y como la circunferencia b c es una línea recta no es mayor que la línea infinita a b, puesto que nada hay mayor que el infinito; ni hay dos líneas porque no puede haber dos infinitos, por lo cual la línea infinita que es triángulo, es también círculo [26].

24. En «La docta ignorancia» cit. Lib. I Cap. XIII «De las propiedades de la línea máxima e infinita». Págs. 53 y ss.

25. En «La docta ignorancia» cit. Lib. I Cap. XIV «Que la línea infinita es triángulo». Pág. 56 y ss.

26. En «La docta ignorancia» cit. Lib. I. Capj. XV «Que el triángulo es círculo». Págs. 59 y ss.

Para terminar: Se remarcará que cada polígono está limitado por un cierto número de ángulos situados a igual distancia del centro y recibe su nombre o el término que le conviene conforme al número de ángulos en razón del cual se le califica de polígono.

Si se concibe el círculo por relación a los polígonos, él comporta un número infinito de ángulos. Pero si se observa el círculo sólo en sí mismo, no se descubrirá ningún ángulo pues él es sin término y sin ángulo. Y sin embargo el círculo sin ángulo y sin término desarrolla en sí todas las determinaciones angulares, todos los polígonos existentes y todos los polígonos posibles. Pues si el triángulo es contenido en el rectángulo, el rectángulo en el pentágono, y así de seguido, se constata que todos los polígonos existentes y los aún posibles son precontenidos en el círculo.

Consideremos atentamente cómo el círculo infinito encierra en él cada figura o forma limitada, pero no como el círculo finito. Pues, puesto que este es la figura más extendida, precontiene en sí las figuras menos extendidas como el todo contiene a las partes. No es sin embargo de esta manera que el círculo infinito encierra cada figura o forma limitada sino más bien a la manera de la verdad o de la igualdad, y tras abandonar las figuras múltiples capta intuitivamente la potencia infinita del Primer principio y de las otras figuras encerradas en él así como sus diferencias.

Cuando el matemático traza un polígono, contempla el prototipo infinito. Pues cuando él dibuja un triángulo cuantificado, no contempla un triángulo sometido a la cantidad sino el triángulo simple, desnudo de toda cantidad y cualidad, de toda medida y multiplicidad. Por consecuencia cuando traza un triángulo cuantificado, él no recibe esta cantidad del prototipo y no tiene la intención de producir un triángulo cuantificado; sino porque él es incapaz de trazar sensiblemente la cantidad, sin la cual no puede existir el triángulo sensible; él lo escoge por accidente con el fin de hacer advenir el triángulo que él ha concebido mentalmente. El triángulo que contempla el matemático no es pues ni grande ni pequeño, ni limitado en tamaño o en multiplicidad. Es, pues, infinito. Es por lo que ese triángulo infinito, que es el prototipo en el cual la inteligencia del matemático contempla el triángulo que él desea trazar, no difiere del prototipo que contempla la inteligencia para trazar un rectángulo, un pentágono o un círculo. Pues ese circulo hacia el cual se vuelve la inteligencia para trazar un círculo, no estando cuantificado, no es ni más grande ni más pequeño que el triángulo no cuantificado, sino la igualdad ontológica misma. Hay, pues, una sola Igualdad ontológica infinita que yo contemplo cuando trazo las distintas figuras.

Se discernirá mejor si se observa cómo se traza el círculo. Se parte de un punto que sirve de centro, después se extiende este punto hasta la línea, en fin se traza la línea alrededor del punto. Y así del punto y de la línea nace la curva.

Se procede de la misma manera si se considera la Igualdad ontológica. Pues ese círculo que se puede nombrar con el nombre de todas las figuras, tiene también un centro, de donde procede la línea, de las cuales procede la circunferencia. Pero puesto que él es infinito, el centro, la línea y la circunferencia son la Igualdad misma. Por consiguiente el centro no existe antes que la línea, ni el centro y la línea antes que la circunferencia [27].

8. *La Física*

El valor e influencia de las apreciaciones cosmológicas del Cardenal de Cusa han sufrido diversos vaivenes históricos. Así, mientras Cassirer tendía a ubicarlo en una posición central en el desenvolvimiento del Renacimiento. A. Koyré [28] se inclinó por negar excesivo relieve a unas intuiciones que consideraba de origen metafísico y teológico.Finalmente E. Garin observa que:

1. La figura del Cusano comienza a ejercer una influencia real a partir de la recuperación que de él hace G. Bruno al unir sus tesis a las de Copérnico.
2. Koyré se equivocó al contraponer dos tipos de platonismo:
— El de los filósofos platonizantes entreverado de motivos mágicos y místicos.
— El de los científicos que van desde Arquímedes a Galileo.

Según el historiador italiano, y su obra tiende a probarlo así, los dos supuestos son indisociables y resulta imposible separarlos. En este contexto se asiste a una recuperación de la obra del Cusano, que sabemos, no fue desconocida ni mucho menos por Copérnico.

Es cierto que ya antes de que Copérnico publicara su obra había ido ya madurando durante casi un siglo, la idea de un Universo en el que la Tierra ya no era el centro, en el que quedaban relativizados los movimientos celestes y sus puntos de referencia, en el que desaparecía la antítesis peripatética entre perfección supralunar y corrupción sublunar, es decir, entre planos de realidad física radicálmente distintos. Pero téngase en cuenta que «La docta ignorancia» (1440) antecede en un siglo nada menos a la publicación de «Las revoluciones de los orbes celestes» (1543), (aunque pudiera haber estado terminada hacia 1530), y en ella encontramos ya cuestionados todos estos temas [29].

27. En «Complemento teológico» cit. Cap. V.

28. «Del mundo cerrado al universo infinito». Ed. Siglo XXI. 1979.

29. «No cabe duda de que, cuando el Cusano escribía que la máquina del mundo tendrá «el centro en cualquiera de sus puntos y la circunferencia en ningún lugar» no hacía más que recuperar un texto hermético del «Liber XXIV philosophorum», texto que Pascal hará suyo («Une sphere infinie, dont

Sin embargo, por lo que el pensador alemán fue más conocido durante los S. XVI y XVII fue por ser el primero al que se le atribuyó la osadía de haber afirmado la infinitud del Universo. Así lo hicieron constar Bruno, Kepler y el propio Descartes [30]. Si bien cabe afirmar , como hace Koyré [31], la ambigüedad en el uso que Nicolás hace del término «infinito».

En el Libro II de «La docta ignorancia», tras haber tratado en el I lo que se refiere a Dios y la Matemática, expone su concepción del Universo.

El Universo es concebido como un despliegue emanativo de la unidad divina en lo plural. Es «contracto» y «explicativo». En frases que recuerdan la doctrina de Escoto Erígena, explica que el mundo es una teofanía, una construcción del ser divino. El Universo es el «conctractum máximum» que llega a la existencia mediante la emanación a partir del absoluto.

> «En el Primer Libro, se muestra un máximo absolutamente incomunicable, inmezclable e incontraible en ninguna cosa, que persiste idéntico a sí mismo en sí, eterna, igual e inmovilmente. En segundo lugar manifiestase, después de lo anterior, la contracción del Universo, pues ninguna cosa existe sino de modo contracto. La unidad del Máximo está, pues, absolutamente en sí. La unidad del Universo está de modo contracto en la pluralidad. Pero a la pluralidad, en la que el Universo está contracto en acto, nunca le puede convenir la suma igualdad, pues entonces dejaría de ser pluralidad. Es necesario, pues, que todas las cosas difieran mutuamente bien en genero, especie y número, bien en especie y número, bien en género y número, de tal modo que cada una de ellas subsista con su propio número, peso y medida. Para lo cual las cosas del Universo se distinguen entre sí por grados.

---

le centre est partout et la circonference nulle part»). Sólo que en el Liber XXIV philosophorum, la esfera infinita era Dios, mientras que N. de Cusa al desplegar con osadísima pirueta el acento sobre el mundo hace estallar toda la visión del Cosmos. Cusano se había construido con ello una palanca con que hacer saltar la doméstica visión del mundo conservada por el aristotelismo medieval, sobrepasando sus antítesis al tiempo que reconquistaba junto a los nuevos platónicos, una concepción matemática de la ciencia». En «La revolución cultural del Renacimiento». Ed. Critica. 1982 pág. 290.

30. Quien ante los reparos de la Reina Cristina de Suecia acerca de si en el Universo indefinidamente extenso cartesiano le cabía al hombre seguir ocupando el lugar central que la religión cristiana enseñaba, se apoyó en la autoridad previa del Cardenal de Cusa.

31. «Su universo no es infinito (infinitum) sino interminatum (interminado) por lo que atañe a sus constituyentes; es decir que carece expresamente de precisión y determinación estricta. Nunca alcanza el límite; es indeterminado en pleno sentido de la palabra. Por consiguiente no puede ser objeto de conocimiento preciso y total, sino tan sólo de un conocimiento parcial y conjetural. Es precisamente el reconocimiento de este carácter necesariamente parcial y relativo, de nuestro conocimiento, de la imposibilidad de construir una representación única y objetiva del Universo, lo que constituye uno de los aspectos de la «docta ignorancia», invocada como medio para trascender las limitaciones del pensamiento racional». En «Del mundo cerrado al Universo infinito». Cit. pág. 12.

Todas las cosas contractas están constituidas, por tanto entre el máximo y el mínimo, de manera que pueda darse un grado mayor o menor de contracción que cualquier otro dado, sin que por ello este proceso se haga infinito en acto porque la infinidad de grados es imposible.

Así pues, el Universo no alcanza el término de maximidad absoluta [...] en cuanto que las cosas son del mejor modo lo que son entre el máximo y el mínimo [32]».

¿Es infinito el Universo? Ni finito ni infinito:

> «El Universo como comprende todas aquellas cosas que no son dios, no puede ser negativamente infinito, aunque no tenga límites y sea privativamente infinito. Y por esta razón no es ni finito ni infinito [33]».

Es ilimitado, y privativamente infinito. Es la materia lo que impide su infinitud en acto:

> «Por oponerse la posibilidad de ser o materia, que no es extensible en acto infinito, el Universo no puede ser mayor [34]».

Es ilimitado porque no hay

> «algo mayor que él en acto que lo limite y es por tanto privativamente infinito [35]».

También lo es en cuanto al tiempo, o inacabable. La duración del mundo es la imagen de la eternidad divina y puede ser llamado en algún sentido infinita. Es potencialmente inacabable. No es la absoluta eternidad de Dios, pero no tiene por sí mismo unos límites necesarios.

Y es uno:

> «El Universo o mundo es uno, cuya unidad está contraída por la pluralidad en cuanto es unidad en la pluralidad. Y puesto que la unidad absoluta es primera, y la Unidad del Universo es por ésta, la unidad del Universo será la unidad segunda, la cual consiste en una cierta pluralidad [36]».

32. En «La docta ignorancia» cit. Lib. II Cap. I págs. 171 y ss.

33. En «La docta ignorancia» cit. Lib. II Cap. I «Observaciones preliminares para inferir un único Universo infinito». Pág. 105.

34. En «La docta ignorancia» cit. Lib. II. Cap. I pág. 105.

35. E. «La docta ignorancia» cit. Lib. II Cap. I. pág. 105.

36. En «La docta ignorancia» cit. Lib. II. Cap. VI «Sobre la complicación y grados de complicación del Universo». Pág. 124.

Significativamente es partiendo del movimiento de dónde N. de Cusa extrae la descentralidad del Universo. Nada hay en el Universo que no esté afectado por el movimiento. Invirtiendo la concepción física aristotélica que prima la inmovilidad sobre la movilidad como lo natural, de él sale un Universo distinto, el de la modernidad, presidido por las idea de acción, cambio y proceso. El movimiento está en todo y no existe el reposo. El Universo está en perpetua transformación, de manera que debe ser abierto, procesual, infinito y relativo.

> «No hay ninguna cosa en el Universo que no esté formado por la potencia, el acto y por el movimiento de conexión, los cuales no pueden subsistir uno sin el otro de tal manera que necesariamente están en todas las cosas y según muy diversos grados, y, por lo tanto de modo diferente. Pero no puede haber en absoluto dos cosas iguales en el Universo. Por lo cual es imposible que haya alguna máquina mundana, ya sea la tierra sensible, o el aire, o el fuego, o cualquier otra cosa, como centro fijo e inmóvil con relación a los varios movimientos de los orbes. Pues no se llega en el movimiento a un mínimo absoluto, tal como un centro fijo, porque es necesario que el máximo y el mínimo coincidan».
>
> «El centro del mundo, en éste caso coincidiría con la circunferencia. Pero no tiene el mundo una circunferencia pues si tuviera centro y circunferencia, y tuviera dentro de él mismo su principio y su fin, él mismo estaría limitado por otra cosa y habría fuera del mundo otros, cosas todas ellas carentes de verdad [37]».

Sacando la conclusión de la relatividad de la percepción del espacio y del movimiento afirma que como la imagen del mundo de un observador debe estar determinada por el lugar que este ocupa en el Universo, y como ninguno de sus lugares puede aspirar a tener un valor absolutamente privilegiado, son admisibles distintas imágenes del mundo y todas ellas relativas. Es imposible tener una imagen objetiva del Universo.

> «Es evidente que la Tierra verdaderamente se mueve, aunque nosotros no nos demos cuenta porque no percibimos el movimiento sino por medio de una comparación con algo fijo. Y por ésto siempre le parece a cualquiera que, lo mismo si estuviera en la Tierra, en el Sol o en las estrellas que está en el centro casi inmóvil y que todas las demás cosas se mueven [38]».

El mundo carece de términos entre los que estar comprendido por lo que la Tierra no puede ser el centro ni carecer de movimiento, ni puede existir un centro.

37. En «La docta ignorancia» cit. Lib. II. Cap. XI «Corolarios sobre el movimiento». Pág. 150.

38. En «La docta ignorancia» cit. Lib. II. Cap. XII «De la condición de la Tierra». Pág. 155.

«Así pues la Tierra, la cual no puede ser el centro, no puede carecer de todo movimiento, pues es necesario que esta se mueva de tal manera que siempre infinitamente sea posible que se mueva menos. Y así como la Tierra no es el centro del mundo, tampoco lo es la esfera de las estrellas fijas u otras cosas de su circunferencia.

Ni la Tierra ni ninguna esfera tiene centro pues como el centro es un punto equidistante de la circunferencia y no es posible que haya una esfera o círculo que sea la más verdadera sin que pueda haber otra más verdadera, es evidente que no puede darse un centro.

Además no hay en el cielo polos inmóviles y fijos.

Pues es necesario que toda parte del Cielo se mueva aunque desigualmente en comparación con los círculos descritos por el movimiento de las estrellas. Y así algunas estrellas parecen descubrir un círculo máximo y otro mínimo pero no hay estrellas que no describan alguno.

Por estas cosas se hace manifiesto que la Tierra se mueve [39]».

No hay órbitas circulares perfectas ni lugares absolutos:

«Ni el Sol, ni la Luna no la Tierra ni esfera alguna pueden describir un círculo verdadero puesto que no se mueven sobre al fijo [40]».

«Por lo cual la máquina del mundo tendrá el centro en cualquier lugar y la circunferencia en ninguno, pues la circunferencia y el centro es Dios, que está en todas partes y en ninguna [41]».

De no menor importancia es la supresión de la división del Universo en dos mundos o esferas distintas, la supralunar y la infralunar, que tanto platónicos como aristotélicos habían admitido como innegable, junto con la superioridad de aquella sobre ésta, aquejada de corrupción y cambio frente a la pureza e inmovilidad de aquella. Resulta significativo de la época la recuperación de la dignidad de nuestro mundo en igualdad de condiciones con otros mundos. Lo que salta hecho añicos es la jerarquización de los lugares del Universo.

«De ello se manifiesta que no es cognoscible por el hombre si la región de la Tierra sea más perfecta en grado o más innoble con respecto a las regiones de las demás estrellas, que la del Sol o la de la Luna y las restantes. Tampoco con respecto al lugar, porque este lugar del mundo sea habitación de los hombres, animales y vegetales, que son más innobles que los habitantes de la región del Sol y otras estrellas. Pues aunque Dios sea el centro y la circunferencia de todas las regiones de las estrellas, y procedan de El las distintas naturalezas de

39. En «La docta ignorancia» cit. Lib. II. Cap. XI. Págs. 151 y 152.

40. En «La docta ignorancia» cit. Lib. II. Cap. XI. Pág. 153.

41. En «La docta ignorancia» cit. Lib. II. Cap. XII. Pág. 155.

las noblezas, en ninguna región deja de haber habitantes y no hay ningún lugar de los cielos ni de las estrellas que esté vacío, y no parece ser sólo esta Tierra la habitada por cosas menores. Sin embargo, por la naturaleza intelectual que habita en esta Tierra y en su región no parece que pueda darse más noble y perfecta según esta naturaleza, aunque haya habitantes de otro género en otras estrellas [42]».

En N. de Cusa aparece ya explícitamente evidenciada la asimilación de Dios a la matemática, que va a ser habitual después durante la Revolución Científica. Es una idea feliz que tiene antecedente en el Timeo platónico pero cuya traslación al Dios cristiano no deja de ser más difícil de integrar que en el Demiurgo de Platón. Si Dios usó la matemática para la creación del mundo, esta se convierte no sólo en la llave de acceso para la comprensión de la Divinidad sino también y sobre todo de la Naturaleza y su funcionamiento.

«Dios usó en la creación del mundo de la aritmética, de la geometría y de la música, y también de la astronomía, artes de las cuales también usamos nosotros cuando investigamos las proporciones de las cosas, de los elementos y de los movimientos. Por medio de la aritmética reunió estas cosas. Por la Geometría les dio figura, y en consecuencia, firmeza, estabilidad y movilidad.

Y así todos los elementos han sido constituidos por Dios con un admirable orden, pues los creó según número, peso y medida» [43].

9. Derivaciones humanísticas de su obra

La obra de N. de Cusa derivó en un especial hincapíe en lo individual, como manifestación única de Dios.

En primer lugar no hay dos cosas individuales exactamente semejantes. Sigue al occamismo al negar la existencia real de los universales y afirmar su orden conceptual. Sólo existen seres individuales. Pero ese individual, cada uno de ellos, refleja el universo entero. Toda cosa existente «contrae» todas las demás cosas, de modo que el Universo existe contracto en cada cosa finita.

El Universo es una contracción del ser divino, y cada ser es una contracción del Universo. Esto es así, especialmente en el caso del hombre, que combina en sí mismo materia, vida orgánica, vida animal sensitiva y racionalidad espiritual. El hombre es el microcosmos, un mundo en pequeño que comprende en sí mismo las

42. En «La docta ignorancia» cit. Lib. II. Cap. XII. Pág. 159.

43. En «La docta ignorancia» cit. Lib. II. Cap. XIII. «Del admirable arte divino en la creación del mundo y de los elementos». Pág. 163.

Estas serán las cualidades consideradas por Galileo como primarias por ser matematizables, frente a las no matematizables o secundarias.

esferas intelectual y material de la realidad. En consecuencia puede decirse del hombre que es «un mundo perfecto, aunque es un pequeño mundo, y una parte del mundo grande». («De ludo Globi», 1). Al reunir en sí mismo atributos que se encuentran por separado en otros seres es una representación finita de la «concordantia oppositorum» divina.

LA GEOMETRÍA Y EL ARTE RENACENTISTA LEONARDO-LUCA PACCIOLI

María Luisa Hodgson Torres
Facultad de Bellas Artes.
Universidad de La Laguna

Pero contra magos y cabalistas, que en la inquietud de esa espera se atormentaban con mil y una fórmulas de torvo simbólico, *Leonardo* se entretiene en su más audaz analogía; el ojo como espejo del cosmos y ámbito de todas sus maravillas. Y un ojo que no es ya distancia o medio entre el sujeto contemplador y el objeto contemplado, sino otro de los infinitos puntos donde las infinitas imágenes luminosas de los cuerpos se cortan, para reconstruir la totalidad de lo que es: *Cada cuerpo es visto como un todo en el aire todo, y como todo en cada una de las menores partes de éste; todas ellas por todo el aire y todas en cada parte.*

Todo está en todo, —dice un aforismo de Anaxágoras que Leonardo recoge en sus cuadernos, y pienso que dice bien y que no hay tan atinado paradigma de su visión conciliadora de la unidad y la multiplicidad, del reposo y el movimiento, del orden y el caos. Porque cerrando los mapas astrológicos y desdeñando las tretas de los magos, *su ojo supo ver catástrofes y armonías, y su pintura no tuvo que renunciar a la medida y al artificio para anunciar los primores del sfumato.*

Comienzo ahora esta parte de «notas» sobre Arte y Ciencia precisamente con el final de la introducción que presenta, en el *Tratado de Pintura* de Leonardo da Vinci, la edición del profesor Ángel González García; y buscando quizá, un ambiente cálido que nos lleve a reflexionar sobre, —me atrevería a decir— el asunto más inquietante del Renacimiento. Leonardo, tiene mucho que ver con este espíritu.

Vamos a familiarizarnos antes con el trazado de la historia en: años, lugares, hechos; y retomaremos rápidamente: conceptos, definiciones, ideas y personajes.

El Quatrocento italiano

Volver a nacer, reencontrar, reencarnar en el presente la Antigüedad Clásica. Refiriéndose a esto un escultor del siglo XV, Lorenzo Ghibert [1], utiliza en sus comentarios el verbo *rinascere* que significa: renacer. Y dice que hay que retomar la Grecia helénica a partir de Lisipo (escultor que representa la definición del paso del Clasicismo al Arte Helénico). Se verá en su *canon* la mezcla de *realismo* e *idealismo*, cosa que numerosas imágenes de Renacimiento evocarán.

Petrarca y Boccaccio coinciden en la expresión italiana *rináscita* cuando hablan de que el hombre debe tomar conciencia de sí mismo. Pero corresponde a Vasari, pintor y primer historiador del Arte Italiano, desarrollar el término conceptualmente.

Tales proposiciones fueron hechas por Petrarca anteriormente, cuando aconseja buscar en lo antiguo y leer en su idioma original a los *clásicos*; incluso ve en esto la forma de llegar al fundamento de la verdad cristiana.

Se rescata lengua, literatura y arte, y sobre todo, se siguen de cerca los relatos de Plutarco y Cicerón. Se cuenta además con verdaderos hallazgos intelectuales: Platón, Virgilio, Ovidio, Séneca. Así pensar, vivir y concebir las cosas, configurará la renovadora expresión de la realidad visible según unos condicionantes. El matiz más importante en cuanto a sus características, será dejar a un lado el idealismo y trascendentalismo Medieval y volver a la naturaleza, al origen de lo *perfecto* sin necesidad del *ideal divino*; es necesario pues, el conocimiento de las Ciencias y la autoridad de los *clásicos*.

Con ellos se van a producir encuentros importantes que darán nuevo impulso hacia la Filosofía cosmológica, Antropología (del hombre y de la sociedad), se buscará sistematizar todo, planteamientos sobre la *conducta* y el *saber* harán que el hombre tenga un encuentro consigo mismo.

1. Lorenzo Ghiberti redacta unos comentarios (no se consideran tratados) en donde se presenta el devenir del Arte moderno con la suavidad de un Gótico que aún caracteriza su obra de escultor, orfebre y arquitecto, y en general a todos los que comienzan el «nuevo estilo». Fue probablemente el primer autor en acudir a Vitruvio, pues como éste, pretendía desde un principio que se considerara la labor del pintor y del arquitecto por no trabajar por un salario.

Aspectos geográfico y político

Veamos también, que las características geográficas y políticas de la *rinàscita* son tremendamente propiciadoras para que ocurran estas cosas:

Roma se convierte en sede de lo antiguo hasta la invasión de los bárbaros, pueblos romanizados. Mientras que lo *romano* se ausenta de Roma y se dirige hacia Constantinopla y Aquisgrán, en Roma se produce arte y cultura, parte bárbara, parte eclesiástica: el Románico.

Esto más tarde provocará una rivalidad entre un *estilo* del norte y un *estilo* del sur: surge irresistible el Gótico. Por lo que Italia, ante estos hechos se propone recuperar dos cosas: su identidad, lo romano; y su origen o centro, Roma. Pero la Roma pontifical no responde a las inquietudes de la *rinàscita*, la Roma anhelada por los humanistas no es esta, sino aquella que guardaba compromisos con el pasado, con la Edad Antigua y no con la Edad Media. Pues bien, Roma reaparece pero desde Florencia.

Sin duda el símbolo más fuerte de esta historia lo representa la cúpula de la catedral florentina Santa María del Fiore, donde la arquitectura de Brunelleschi es toda una profecía.

Mientras la Roma de los papas busca *autoridad*, la Florencia de los humanistas busca *identidad*. Ambas cosas tienen que ver con lo romano, pero sólo lo segundo propicia el Renacimiento.

Si la *cúpula* brunelleschiana propone un cuerpo representativo del resurgimiento de la manera antigua, sería conveniente dar directamente con los personajes que muy bien pueden responder a los conceptos que aquí se han expuesto. Tracemos con ello un recorrido y situemos a Vitruvio como final de la Antigüedad o Edad Antigua y a Brunelleschi como comienzo del Renacimiento o Edad Moderna.

El período intermedio al que llamamos Edad Media es una etapa de *estilos artísticos*, no podemos considerar así al Renacimiento, pues como mencionamos antes se define como una forma de pensar y concebir la vida, y se expresa a partir de lo que realmente se vive: la crisis de la estructura feudal y el deseo de independencia de la tutela eclesiástica para solucionar problemas relacionados con la conciencia y con la existencia del propio hombre; son el reto del renacentista.

Al pensamiento de esta época se llega a través de sus intelectuales, a estos se les conoce como humanistas, eran: los literatos, historiadores, filósofos y gramáticos. La formación del artista se basaba por lo tanto en el *ideal* de la formación humanista.

Pero la élite de aquéllos provoca una jerarquizada valoración social, y el acceso a ella fue la tarea más ardua del Arte: alcanzar el justo reconocimiento a la labor práctica e intelectual del artista. A éste se le consideraba como perteneciente a un gremio y poseedor de dotes o talento especial. Únicamente tomó cierta posición social al lado de la figura de un mecenas, que hacía las veces de padre y de tutor de su persona y su trabajo. Mientras, el personaje gobernante, rodearse de sabios y artistas la daba cierto prestigio de poder y sabiduría. Esta relación de intereses mútuos, no cabe duda que era de las pocas formas con la que cuentan los artistas para tomar su escalafón, pues es así como el mecenas impulsa y reconoce la formación de sus artífices.

Tanto el pintor, como el escultor o el arquitecto aspiran al conocimiento de las Artes Liberales, a la vez que luchan porque sus campos sean considerados como tales. Y no olvidemos que casi siempre que nos encontramos ante las obras de los clásicos —arte grecorromano y renacentista— contemplamos a grandes geómetras de la historia del arte. Sabemos que en muchas ocasiones el pensamiento científico parte de la observación de los planteamientos del dibujo, la pintura, la escultura y la arquitectura.

Arte y Ciencia

Una de las cuestiones fundamentales del *quattrocento* fue equiparar Arte y Ciencia. En la Edad Media importaba más el sentido trascendente de la figuración y su expresión de belleza *ideal* como espejo de la bondad divina, que las cualidades técnico-plásticas de la propia figuración, y en el Renacimiento éstas adquieren especial relevancia.

No sólo se preocupan por lo que se pinta, se esculpe o proyecta sino «cómo». Pues claramente en los tratados de aquellos que ocuparon su tiempo con el quehacer literario, vemos como se obedecía a unas leyes propias, autónomas y ligadas a los principios de la Ciencia, cuyo motivo de estudio parte de la naturaleza misma; todo ello sería el material de investigación del artista renacentista.

Si hay una meta común de científicos y artistas, es el conocimiento y dominio del mundo a través de la visión empírica y deducción de leyes racionales. Y pensamos, que el hacer práctico o la vida contemplativa no dan siempre con el ejercicio intelectual en la Ciencia, y en este Arte del Renacimiento sí.

En el siglo XV el *método analítico* se pone en práctica, los renacentistas desarrollan, como nunca se dio en la historia, el medio para conocer y explicar científica y plásticamente la realidad. Conocen Ciencia y aplican, sus obras así lo evidencian. De ahí que sea la gran época de la tratadística del arte, el contenido de esta faceta es: la Matemática, la Óptica, la Perspectiva, la Mecánica, la Anatomía y la Fisionomía; se preocupan también por la teoría de la luz y de los colores.

Antes mencionábamos a Vitruvio como el último de los clásicos y continuando con las reflexiones que acabamos de hacer, pasemos a saber por qué.

La fuente: el tratado de Vitruvio

Para el arte del Renacimiento Marco Vitruvio Pollion (primer arquitecto romano, s. I a. JC) es realmente la fuente primigenia de conocimiento. Y existen muchas razones para considerarlo así, lo que a continuación expongo es un resumen de las principales ideas recogidas de su *tratado*.

Como todo romano que recibe educación liberal, Vitruvio se forma con *Los Elementos*, lee y escribe en la lengua de los antiguos; es el primero que escribe en latín acerca de lo que Euclides nos dice, aplicándolo al arte: *Los Diez Libros de Arquitectura*.

Esta obra representa las claves del *sistema clásico*, del cual se deduce la verosimilitud de toda una Teoría Universal. Queda patente además, de su doctrina filosófica, el conocimiento que Vitruvio posee sobre los restos arqueológicos conservados en Roma. Hasta entonces el valor de estas preciosas fuentes era relativo, pues hacía falta un *código referencial* válido para poder llegar al verdadero significado de los *elementos* y del *sistema de composición* del Arte Antiguo; pues hasta este momento se conocía el *vocabulario* pero no la *gramática*.

El *De Architectura* de Vitruvio (obra concebida y estructurada como decálogo, al constar de diez capítulos) es la primera gramática clásica de los elementos geométricos y compositivos, que los renacentistas conocen por *normas vitruvianas*. Por lo tanto podemos considerarlo como primer filólogo y filotécnico del Arte. (Fig. 1)

Las primeras copias que circularon en latín datan de la segunda mitad del cuatrocientos, llegan al Renacimiento sin apenas ilustraciones. Es en el primer cuarto del siglo XVI cuando se ilustra (por Fra Giocondo; Venecia, 1511) y se traduce (Cesare Cesariano; Milán, 1521). Junto a la obra de Euclides, *Los Diez Libros de Arquitectura* de Vitruvio forman la primerísima Enciclopedia de saberes del campo artístico.

En todo el *tratado* elogia a la Filosofía griega. En el Noveno Libro concretamente hace referencia a Platón y a su modo geométrico de doblar una superficie por medio de la diagonal del cuadrado (dieciséis siglos más tarde Alberti lo vuelve a plantear). Observa Vitruvio que esta operación se resiste a la *Aritmética* y se soluciona fácilmente con la Geometría. En el mismo Libro, cuando habla de la *Escuadra-Norma*, cita a Pitágoras y a su famoso *teorema*; aconseja el uso del triángulo de lados 3, 4 y 5, por su importantísima relación *catetos-hipotenusa* a partir del *ángulo recto*. Y dice: *la Norma de Pitágoras es norma de proporción*. Por esta razón le interesa también Arquímedes y su espiral. Fig. 2

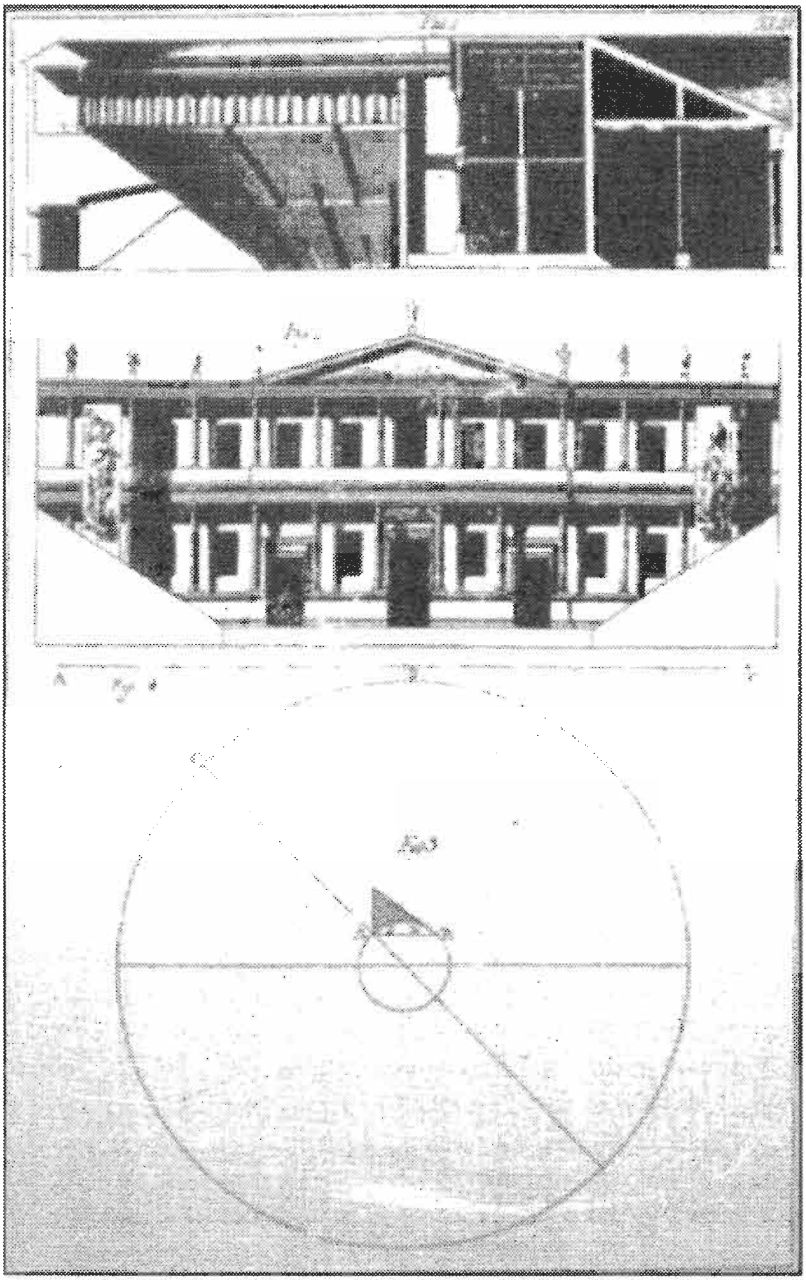


Fig. 1. Vitruvio, *Diez Libros de Arquitectura*

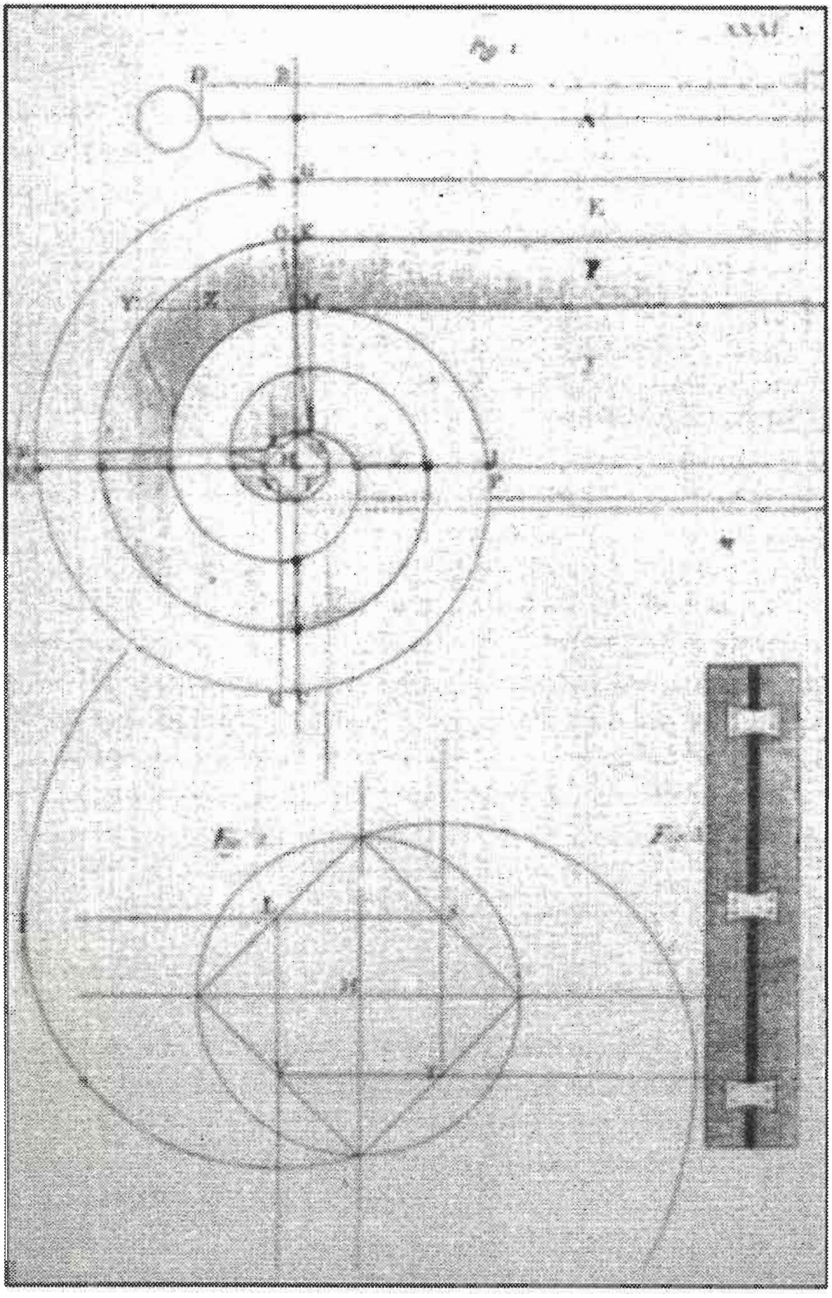


Fig. 2

Con postulados tan fundamentales y el testimonio de las ruinas, afirma *los órdenes son las claves de la proporción*. A raíz de esta importante consideración, Vitruvio define sus conceptos sobre *Orden* y *Composición*: el *Orden* viene de la Aritmética y la *Composición* de la Geometría. El acuerdo de ambas nos da una razón: la *Proporción*, partiendo de estos elementos se construye la *escala* y se pasa al uso controlado de la *regla* y el *compás* sobre la superficie en la cual se describe la Forma (se *diseña*) para la Edificación.

En el *Libro Séptimo* se ocupó del asunto más locuaz del Renacimiento: La Perspectiva [2]. No utiliza el mismo término, habla de la *proporción de la visión espacial* cuando se preocupa de *la escena*. No cabe duda de que aunque sean primeras intuiciones, es todo un comienzo.

Los artistas que conocen a Vitruvio, como Brunelleschi, Alberti, Palladio, Bramante, Uccello, Piero della Francesca y Leonardo da Vinci, saben y conocen estas cosas a cerca de sus intuiciones; y además, que para dominar el lápiz hay que estar instruido en Geometría, estar familiarizado con la Historia y seguir de cerca a los filósofos. También entender de Música, Medicina, Jurisdicción, Astronomía y *Teoría de los Cielos*.

Pues bien, aquellos renacentistas demuestran que cuentan con esos conocimientos, los poseen en sus obras y así queda reflejado; y por supuesto llegar a la Representación aporta y obliga a continuar. Por lo tanto la Ciencia cuenta con las investigaciones hechas por ese grupo importante de artistas del Renacimiento que dan con los grandes sistemas y técnicas de Representación Gráfica ya sea *plana*, *volumétrica* o *espacial*; su geometría es una Matemática dibujada y complemento en el campo de la certeza, compartiendo los criterios de las verdades científicas.

Etapas del renacimiento italiano

Se sucedió a lo largo de tres GRANDES PERÍODOS; abarcando los siglos XV y XVI; desde Brunelleschi (1401) hasta la muerte de Tintoretto (1594):

1ª PERÍODO. Primer Renacimiento

2ª PERÍODO. Alto Renacimiento o EDAD DE ORO

3ª PERÍODO. Renacimiento Tardío (manierismo). Desde el segundo tercio del XVI.

2. Nos puede asombrar como en el *Libro Séptimo* de la obra magna de Vitruvio aparece algo que muy bien podríamos considerar como la primera aproximación de representación de la ilusión óptica de la *Perspectiva*. Alude a Esquilo, y dice que éste para la escena de una de las tragedias pide ayuda al decorador Agatarco, el cual mediante la pintura sobre tabla o tela, conseguía escenas fingidas (ver Séptimo, *Los Diez libros de Arquitectura*).

Pero se define sobre todo por dos ETAPAS bien diferenciadas:

1ª ETAPA: La conquista del espíritu renacentista. Se comienza a cuestionar la formación del artista.

2ª ETAPA: Edad del Clasicismo, se puede afirmar que la estructura científica e intelectual estaba ya erigida por sus precursores (artistas de la Primera Etapa). Cuenta con: Leonardo, Bramante, Rafael y Miguel Ángel. Ya no buscan *modos* y *modelos* en la Antigüedad. Sus propias obras, nuevas, serán paradigma del Arte.

Leonardo da Vinci (1452-1519)

Cuando me presentaron a Leonardo fue como dije al principio: un espíritu inquieto e inquietante. A partir de ese momento no he podido dar con una biografía o documentación más o menos completa que arroje luz acerca de su personalidad y de la *universalidad* de sus *teorías*. La labor aquí ha consistido en reunir y reconstruir sin añadir ni restar mérito. La obra que según sus biógrafos nos acerca con más detalle a él es la de Giorgio Vasari, primer biógrafo del Renacimiento.

En general de su obra, se conservan unos siete mil apuntes, entre notas y dibujos en forma de *hojas sueltas*, quedando después de su muerte desperdigados entre varios países de Europa. De su labor como pintor, tan solo unos doce cuadros se consideran terminados y auténticamente suyos. Es penoso intuir que gran parte de su producción esté perdida y destruida. Por otro lado sus *originales* son difíciles de interpretar, pues sabemos que la escritura de Leonardo no ayuda, esto impidió en su momento la divulgación de sus *ideas*. Muchos de sus *cuadernos* sin embargo, están desarrollados y ordenados como el borrador de un tratado y con la idea de formalizarlo como tal. Además debemos añadir que muchas de las cosas que se leen sobre el personaje están tergiversadas o mal contadas, lo cual hace que el acercamiento a él se haga difícil.

Esta genial figura es considerada por muchos expertos como el centro de miles de preguntas que dieron vueltas en esta época. Muchas de ellas las adelantó a esa revolución científica que supuso el renacer. Aparece siempre como un explorador de fenómenos, creador de planteamientos, métodos y soluciones; dotado de pulido sentir acerca de las ideas sobre lo *bello*, lo *perfecto*, y sobre la utilidad de ciertas *formas* que se encuentran entre el *mundo natural* y la *síntesis* de la razón. Era atrevido hasta lo insondable y tremendamente osado: Leonardo tuvo sus aciertos; y es tan difícil conocer cuáles y cuántos de esos aciertos fueron suyos realmente, como cuáles y cuántos aciertos posteriores derivan de él.

Tengo el sentimiento de estar ante un amante de la soledad cuando leo lo que él mismo escribe: *si estás solo te perteneces a ti mismo.* Pero hay cosas que siempre acompañarán a Leonardo: la observación y la discusión, y sobre todo su fluida imaginación que se traduce también a recursos prácticos. Le añadimos a esto el contrasentido de que rara vez termina lo que comienza, quizás por su carácter un tanto inconformista; parece que todo le interesa, pero no tuvo tiempo para casi nada.

Nuestro hombre nace en las colinas toscanas próximas a Florencia, en el pueblo de Vinci. La cuna de Leonardo no era aristocrática ni ilustrada al cien por cien. Su padre Pietro da Vinci, erudito notario le acoge de niño en su casa reconociéndolo como hijo legítimo. Comienza su educación como todo el que era de buena familia: aprende a leer y escribir en latín, adquiere conocimientos de Matemáticas y Música. Se inicia en arte en el taller de Andrea Verrocchio (escultor, pintor y gran geómetra), perteneciendo a distintos gremios, citemos por ejemplo el de San Lucas. Pero Leonardo fue siempre sensible y consciente a su escasa formación en humanidades y tuvo que defenderse ante los que no lo reconocían como hombre instruido. Recordemos lo poco considerado que estaba el artista de esta época, en la cual se le veía más como artesano; por ello Leonardo, al igual que Vitruvio (y luego más próximo a él Alberti), colaborará a promover un cambio, ese cambio de actitud del que hablábamos. Y sería absurdo considerar a los artistas del renacimiento solo como hombres dedicados a la artesanía de su oficio o aprendices de un taller, pues éstos luchan por poner de relieve el aspecto intelectual y espiritual de su obra, y no el manual [3].

A lo largo de su vida, Leonardo, se va haciendo con los escritos de las prácticas de los maestros, como Cennino Cennini, así como con los viejos tratados sobre Geometría y otras Ciencias. En cuanto a la *teoría* del Arte, fueron realmente pocos los que se dedicaron a la labor de escribir, evidentemente la dedicación plena a sus proyectos y a su obra les ocupaba caso todo el tiempo.

Sabemos más o menos, por las propias anotaciones del artista y por los bienes personales que se conservan, los libros de lectura y consulta que poseía; de unos treinta y seis a treinta y siete títulos, citaré algunos: los Tratados de Euclides y de Vitruvio; el *De Re Medica*, de Aulo Cornelio Celso; *De Re Militari, tratado* sobre construcción de armamento de Roberto Valturio; sobre Arquímedes tenía notas acerca

3. Baldassare Castiglione (erudito humanista, Mantua 1478 - Toledo 1529) hablaba del ejercicio intelectual que se realizaba con la práctica del dibujo (Alberti y Leonardo se expresan de modo semenjante al respecto), y respondía a la antigua controversia de la clasificación de las *Artes* en *Manuales* y *Liberales*. Las *Artes Liberales* eran consideradas como las que ennoblecían al hombre al ofrecerle una formación versada en todas aquellas materias que daban a su pensamiento un rango filosófico. Los artistas al utilizar sus manos en la ejecución de sus obras, eran considerados desarrollados en las Artes Manuales. Y éstos lógicamente veían que la mente era tan importante en su labor como en el músico o en el poeta.

de su *Geometría*, así como de su *Teoría de los cuerpos flotantes*; varias materias sobre Óptica y Matemáticas; las *Vidas de los Filósofos*, de Diógenes Learcio; *las Décadas*, de Tito Livio; *Vidas paralelas*, de Plutarco; la *Historia Universal*, de Plinio; leía además a Dante, Séneca y La Biblia; conocía los escritos científicos de Ptolomeo, Aristóteles y Galeno. Estaba también familiarizado con el Tratado sobre Perspectiva de Alberti. En su propio trabajo, toca casi todo pues queda patente en sus *dibujos* o conclusiones; muchas veces mezclando aforismos filosóficos y científicos del antiguo y de su época, que Leonardo manejaba muy bien.

Su primera estancia en Florencia (ciudad en la que surge la primera escuela de Arquitectura) fue importante para su formación, aunque no podemos decir que se trate de una etapa productiva para Leonardo.

Aprendió de Verrocchio Arte, Geometría y Música; participa en sus proyectos, como en la fundición y colocación de la inmensa bola de cobre y cruz que rematan la *cúpula* de la Catedral de Florencia. Son años de intensa actividad cultural para esta ciudad que vive el nacimiento de la de un Arte revolucionario que formulaba nuevas imágenes, convirtiendo las superficies de las pinturas y relieves en mágicas prolongaciones del *espacio real*.

Los Médicis eran por entonces los mecenas, humanistas neoplatónicos e interesados por al antigüedad, pero más bien con sensibilidad de anticuarios. Se consideraban herederos directos de los romanos; dominaban un pulcro latín, cosa que siempre se le resistió a Leonardo.

Se instala en Milán en el año 1482 (ciudad por entonces, más dinámica pero menos intelectual), con el mecenazgo de Ludovico Sforza, buscando que se le estime y confíe en tareas artísticas. Leonardo se anunciaba como especialista en cuestiones militares:

> *Tengo proyectos de puentes* —escribía— *muy ligeros y resistentes, y de fácil transporte. Planes para destruir cualquier fortaleza o bastión que no esté cimentado en la roca. Asimismo tengo planos para construir un cañón, para lanzar piedras pequeñas casi como granizo. Conozco el medio para llegar a un punto determinado mediante túneles y sinuosos pasadizos secretos construidos sin ruido, incluso cuando haya que pasar trincheras o el curso de un río. Construiré carros cubiertos, seguros e inabordables que puedan introducirse en campo enemigo con su artillería sin que haya fuerza militar que pueda derribarlo. Puedo construir cañones, morteros y artillería ligera, de formas útiles y bellas, catapultas, mandrones, trabucos y otras máquinas eficaces.*

¿Por qué los artistas del Renacimiento sabían tanto de armas? Un individuo capaz de fundir una estatua en bronce podía ocuparse también en esta tarea. Las fortificaciones eran además parte de la arquitectura.

Sforza sin embargo no le da la oportunidad de poner en práctica sus ideas, además desatiende y no sabe aprovecharlo. Las labores intelectuales de Leonardo en este tiempo quedan para él mismo, dedica casi todo este tiempo a las Matemáticas. Lo más penoso de su experiencia junto al soberano fueron los casi dieciséis años que pasó trabajando en la *estatua ecuestre de Francesco Sforza*, padre de aquél. El artista ve en la Escultura su oportunidad, y se marca un reto demasiado pretencioso: colosales proporciones, y la pose de alzada sobre los dos cuartos traseros. Jamás un escultor se había aventurado a esto.

Si se reúne todo el proyecto de la realización del caballo podríamos obtener un gran trabajo de investigación, en el que cada parte puede quedar desarrollada y resuelta, lista para llevar a cabo la gran hazaña. Pero tuvo realmente mala suerte justo al final; esa mala suerte que hace que Leonardo no termine nunca sus proyectos. Cuentan que el mecenas utilizó el bronce que había reunido durante años para la obra del caballo, en la fundición de un gran cañón. Y el modelo previo a la obra definitiva sufre serios daños cuando los franceses toman la ciudad (es el año 1494).

Sabemos que existe un *tratado* de bocetos y anotaciones de estudio anatómico del animal. Así como el planteamiento de un problema físico: busca un movimiento de compensación de masas para situar el *centro de gravedad de la figura*. Para ello, primero estudió al jinete sentado hacia atrás con un brazo levantado sosteniendo un arma, pero extendido sobre la grupa. Si nos imaginamos la pose en la realidad, nos damos cuenta de que le ayuda el continuo movimiento de sus patas delanteras; pero razonemos que así sólo puede estar unos segundos, pues el *punto de apoyo* es muy débil. Si sumamos además que se trata de una estatua en bronce pesada y estática; con lo cual el problema se hace muy complicado.

La parte del *tratado Acerca del Peso* de Leonardo está perfectamente resuelta y basada en las *Leyes de la Estática*, desconocidas en el primer Renacimiento; sus conocimientos sobre el tema de la *gravedad* son realmente valiosos y con ellos resuelve el asunto del *peso* vaciando partes internas del caballo. Diseña paralelamente un complejo armazón para el momento del vaciado. En fin, existen muchas pruebas de que pudo llegar hasta el final, ¡pudo conseguirlo!

Posterior a Leonardo sólo hay dos casos de estatuas semejantes a su desventurado caballo: el primero realizado en España por Pietro Tacca en honor a Felipe IV (1640), de menor tamaño; y otra, la de Etienne Maurice Falconet hecha en el año 1782, que representa a Pedro el Grande. Los problemas de Estática se los resuelve al primero su amigo Galileo con cálculos muy precisos.

Esta historia que acabamos de resumir nos dice mucho acerca del espíritu de perfeccionismo, de reto frente a la *realidad* y de su enorme curiosidad. Siempre existe en Leonardo algo que le empuja ir más lejos, más allá de lo superficial: le interesa siempre esa *estructura* sustentadora interna y unificadora; sujeta con ello, cada una de las *partes*, y a la articulación de éstas sin que se dañe el *conjunto*; pudiendo llegar así al «cómo funciona y por qué».

Apunta observaciones y se hace recordatorios tan geniales como: *El pájaro es un instrumento que obedece a una ley matemática, y el hombre posee la capacidad de reproducir ese instrumento y todos sus movimientos.*

Leonardo permanece en Milán hasta que Luis XII de Francia cae sobre Sforza y le arrebata el poder. Su idea es regresar a Florencia tras una ausencia de casi dieciocho años, pero antes se dirige a Mantua y luego a Venecia, le acompañan su aprendiz y su amigo Luca Paccioli. Este gran matemático del que nos ocuparemos más tarde, colaboró en sus trabajos, y su obra *La Divina Proporción* la escribe durante los años que pasan juntos en Milán. Paccioli cuenta con la ayuda de Leonardo, siendo éste quién realizara los dibujos de su *tratado.* (Fig. 3).

Sus estudios personales sobre Matemáticas y Arquitectura los lleva consigo cuando se aleja de Milán.

Las matemáticas de Leonardo

> *Ninguna humana investigación puede ser denominada ciencia si antes no pasa por demostraciones matemáticas; y si tú me dices que las ciencias que tienen su principio y su fin en la mente, participan de la verdad, esto no te concederé, que lo niego por muchas razones; la primera, porque en tales discursos de la mente no se accede a la experiencia, sin la que certeza alguna se produce.*

Los elementos y la perspectiva lineal

En su Tratado de Pintura, Leonardo establece su tesis con argumentos como el que acabamos de leer escrito por el propio artista y sobre el cual basa los fundamentos de su pintura. Además advierte: *que ningún hombre que no sea matemático lea los elementos de mi obra.*

En su Perspectiva trata de los cinco términos de las Matemáticas: el punto, la línea, el ángulo, la superficie, y el sólido.

Dice que un *punto* no forma parte de la *línea*, el punto natural más pequeño es mayor que todos los puntos matemáticos.

Y esto último puede probarse porque el *punto natural* tiene *continuidad*, y lo *continuo* puede dividirse *infinitamente*, pero un *punto matemático* es indivisible porque no tiene tamaño. También dice que si un *punto* situado dentro de un *círculo* puede ser el *punto inicial* de un número infinito de *líneas*, debe haber un número infinito de *puntos* separados de este *punto*, y dichos *puntos* al reunirse, vuelven a ser uno, de donde se sigue que: *la parte puede ser igual al todo.*

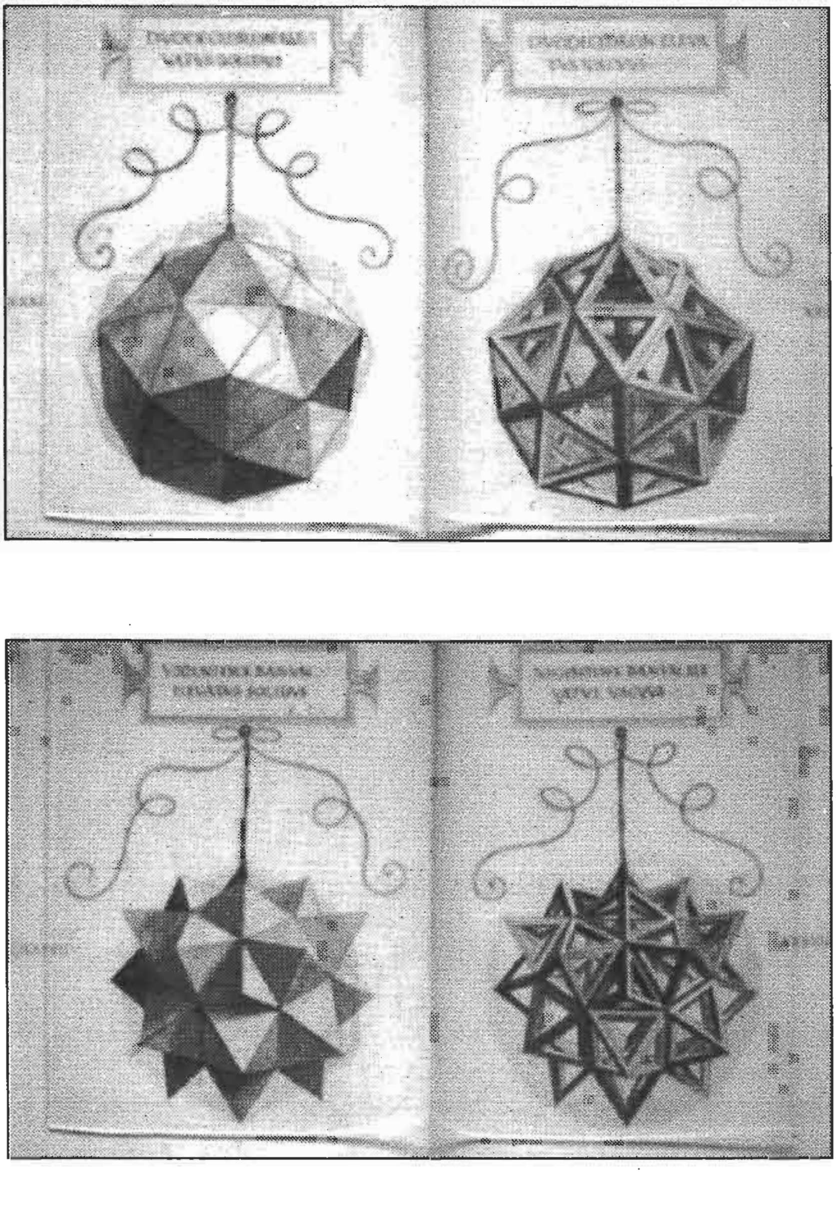


Fig. 3. Cuerpos Geométricos. Leonardo Da Vinci.
Ilustraciones par a la *Divina Proporción* de Paccioli.

Se refiere sin duda a una noción que aparece en Euclides: *El todo es mayor que cualquiera de las partes; y, un punto es aquello que no tiene partes.*

Para Leonardo esto es verdadero en un número finito de objetos, pero no para un conjunto infinito.

Tiene clara la idea acerca de la diferencia entre *punto físico* y *punto matemático.* Las consideraciones matemáticas acerca del *punto* —es importante decir— aparecen al comienzo de dos tratados: Della Pintura, de Alberti; y De Prospectiva Pingendi, de Piero della Francesca. El segundo de ellos (influyente en los matemáticos de la época) se caracteriza por la estricta *dimensión matemática* que da a todo lo que somete a estudio; muy próximas a las del maestro Piero van a ser las consideraciones Leonardinas.

Se ocupa de las *líneas* diciendo que éstas son: *recta, curva* y *sinuosa.* Sin altura, ni anchura, ni profundidad; y aunque son *invisibles* nos dan el concepto de *longitud,* tan necesario en la Representación.

Los contornos y límites

Metiéndonos con el asunto de la *perspectiva* y antes de ocuparnos plenamente de un problema *óptico,* abordamos otro concepto que tiene mucho que ver con ambos temas: ¿Qué nos cuenta cuando trata el *límite* de los cuerpos?

Dice sobre esto: *Los límites de los cuerpos son los menos importantes... así que ¡tú, pintor!, no perfilarás con líneas tus cuerpos.*

Sin duda se trata de una conceptualización de un *elemento visual.* Sin embargo, muchos tienden a traducir éste a *elemento gráfico* de representación como: el contorno o líneas de contorno. La censura del maestro Leonardo a esta costumbre (heredada de la Pintura Medieval) de rodear los cuerpos con *líneas,* va a ser su *principio del sfumato.* [4]

Sin abandonar el concepto de *límite,* pasa a describir la *superficie,* afirmando de ésta es: *la superficie es el límite del cuerpo*; y sigue, *el límite del cuerpo no es parte de ese mismo cuerpo.*

Por lo tanto, tenemos otro importante *elemento conceptual* del *campo visual*: Gracias a él, podemos no sólo ver la *forma,* razonamos con un elemento totalmente abstracto que la *realidad no posee materialmente*; es entonces, *realidad sensible* que puede, además, ser dibujada. E indudablemente el acto de dibujar acompañará siempre al pensamiento.

4. Véase en el tratado en Práctica de la Pintura (498. *Evita los perfiles o contornos netos en los cuerpos*: Fragmento según referencia al Codex Urbinas 46a-b.

Con lo cual, hemos de decir al tema: En la operación de *dibujar*, traducimos el elemento visual a elemento gráfico. Si así lo aceptamos, entonces podemos también entender que el *límite* de un cuerpo —recordemos que para Leonardo se trataba de la superficie— no es parte física de ese mismo cuerpo. Pues dice bien cuando añade: *Lo que no parte de cosa alguna nada es. Nada es lo que nada ocupa*; por lo que: *El límite de una cosa es el principio de otra.*

Me atrevo ahora a solidarizarme con mi amigo Leonardo, cuando vivo la experiencia y digo: El límite no es la línea, ¡oh, pintor!

Los Ángulos como generadores de superficies geométricas

Según el orden matemático, en el Tratado, el *ángulo* ocupa el tercer lugar; pero a la hora de ordenar las definiciones, Leonardo cambia. Esta necesidad se debe a que antes, cuestionaba de manera general la entidad *física* de los *términos matemáticos*; y decide, tal como presenta su exposición (desarrollo y explicación sobre cada *entidad*), dejar el *ángulo* para el final.

Un *ángulo* genera siempre una *superficie*, y a ésta llama Leonardo *superficie angular: La superficie angular se reduce a un punto cuando concluye en su ángulo.*

Gráficamente esto se resolvería utilizando rectas que se corten, y si éstas no concluyen en ese *punto* sino que continúan, harán nacer nuevas *superficies*. Dichas *superficies* pueden ser igual, mayor o menor. Y es precisamente de esta definición de donde se podría sacar el concepto tan recurrido para proyectar en geometría: el *plano*. Pasemos a ocuparnos de este último término, el cual tiene mucho que ver con las Matemáticas de Piero della Francesca, aunque ampliaremos algo más cuando lleguemos a Paccioli.

Los Sólidos y su estructura

El *sólido* para el artista es cualquier cuerpo, que una vez «razonado» puede ser representado gracias a los *elementos del dibujo* (elementos conceptuales de las Matemáticas). En Matemáticas corresponden a los *cuerpos geométricos*.

Considerando los *básicos* o *regulares* tenemos, desde el *tetraedro* a la *esfera*. Excepto la *esfera* (cuyo *límite* es una *superficie* formada por infinitas caras o infinitos *puntos*), los demás están configurados por: *superficies* o *caras*, y *líneas* o *aristas* que formando *ángulos* concluyen en *vértices*.

Elementos de la Geometría en la perspectiva

Recuerdo ahora una bellísima cita de Leonardo: *Tal es la naturaleza de la perspectiva que el plano parece relieve y el relieve plano.* He aquí el fenómeno de la visión. Considera nuestro artista que la perspectiva es la Ciencia de las líneas de visión. Tras ocuparse del estudio detallado del *ojo* y del *acto de ver*, pasa a describir cómo percibimos los cuerpos.

Explica cómo el *dibujo* permite, mediante la construcción *lineal*, configurar y limitar lo que vemos de la *realidad*, para representar. Hablamos aquí de la *primera parte* de la *Ciencia Perspectiva*. La segunda se ocupa de los *colores* en la relación a las distancias; y la tercera, de la pérdida del *límite* de los cuerpos según la distancia.

Para llegar la demostración racional hay que saber ver la construcción de *pirámides lineales* entre el *ojo* y el *objeto* antepuesto. Define la pirámide visual como: conjunto de líneas que, partiendo de las superficies externas del cuerpo, convergen desde una determinada distancia para concluir en un solo punto. Este *punto* es el *ojo*, y de él divergen infinitas *rectas*, que al intersectarlas con un *plano*, constituyen la *base* de la *pirámide*. (Fig. 4).

Brunelleschi había dado con este sistema de estructurar matemáticamente la visión cuando propone la Prospectiva Artificialis, con lo que mucho antes a Leonardo, se soluciona el problema de Representación del Espacio en donde se disponen los cuerpos; siendo Alberti quien dogmatiza sus *principios*.

Si comparamos ambos *tratados*, vemos como nuestro artista en su *Tratado de Pintura* se basa en la *estructura* del *ojo* y conoce la Óptica de Euclides; Alberti va sólo al *sistema matemático*, trabajando con *distancias* y *planos*. Leonardo es más riguroso, pues en su método lo importante son los *ángulos*.

En los cuadernos escribe sobre la *cámara oscura* y su construcción. No hay nada anterior, este estudio supone exactamente lo que hoy entendemos como cámara fotográfica. Con el invento confirma la existencia de los *puntos de fuga*. Pone además un ilustrativo ejemplo: *cuando andes por un camino observa cómo los surcos de los lados se acercan hasta juntarse en un punto.*

El artista añade al mundo sensible su matemática, que consistía principalmente en *geometría* y *proporción*, porque su gran preocupación fue establecer las normas para la correcta *representación del mundo físico*. Leonardo dibuja sus axiomas, pero le falta el formulismo algebraico, que no domina, y es por esto que continúa sufriendo el ataque de los matemáticos y la desconfianza de algunos críticos.

Otros asuntos destacados y tratados por Leonardo

1. Cuadrar la luna

En sus manuscritos encontramos un tema que parece obsesionar a Leonardo, y quizás le venga de ese tenaz empeño del Renacimiento por armonizar o regularizar el *caos* con el perfecto maridaje del *cuadrado* y el *círculo*. Preocupación que surge

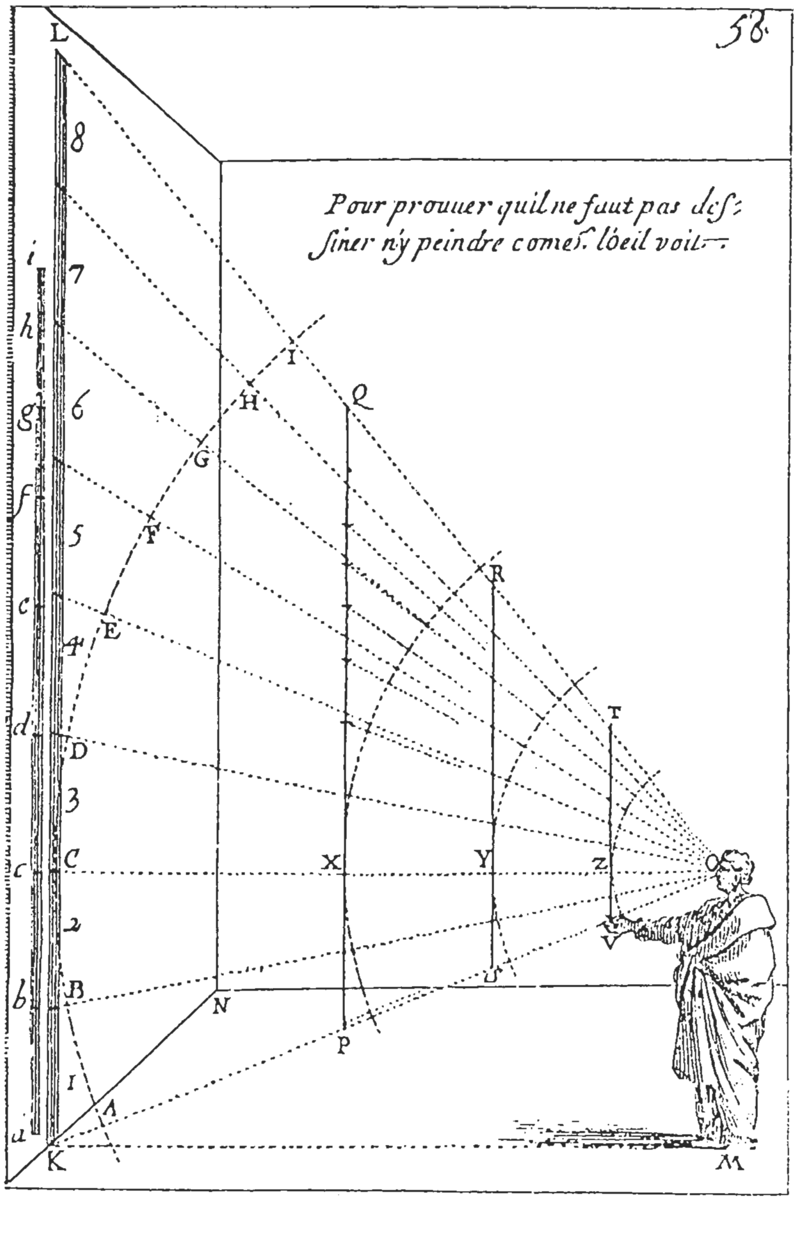


Fig. 4. *Práctiques Géometrales et Perspectives.*
Abraham Bosse. París 1665ç

mucho antes, incluso de Vitruvio y Euclides, pues el matemático griego Hipócrates de Quios (siglo V a J.C.) resuelve sobre el mismo asunto:

Hipócrates descubre la existencia de ciertas lunas, a las que él llama *lúnulas*, con las que se puede plantear la construcción de *cuadrados*. De tal forma que ambas figuras tengan el mismo área. Es decir, quizás sea posible *cuadrar* pequeñas porciones de círculo. (Fig. 5).

Pero definamos que debemos entender por dicho término: La *lúnula* es la figura que se forma por la intersección de dos arcos de circunferencia de distinto radio, y cuya superficie se encuentra limitada por éstos.

Leonardo tremendamente entusiasmado con la idea se anima a hacer sus propias comprobaciones con regla y compás. Tan apasionante le resultó el *tema* que deja páginas y páginas del *Codex Atlanticus* totalmente llenas de estos dibujos, donde puede parecernos que el genio descubre una «nueva vocación» a la que muchos de sus biógrafos llaman *Matemáticas Leonardescas* [5].

Como decíamos, se dispone a buscar la *cuadratura del círculo*: En su *De lunularum quadratura*, después de exponer el modo de *cuadrar* la *lúnula*, indica que con cuidadosas investigaciones se podría llegar a una solución para la *cuadratura* del *círculo*. Y en 1504 dice haber dado con la solución final: ésta se queda únicamente en el enunciado de *límite* (como principio del cálculo infinitesimal), lo cual no deja de asombrarnos. Leonardo continuará con sus abstracciones con: equivalencias de superficies *rectilíneas* y *curvilíneas*, y otros tantos asuntos en los que implica la construcción de los *polígonos regulares*, tema que entusiasmó a casi todos los artistas geómetras.

Volviendo a reforzar lo dicho hasta el momento, Leonardo como muchos artistas del Renacimiento, ve la certidumbre científica del Arte en sus planteamiento de Ciencia aplicando las Matemáticas. Quiere además —y esto también lo vemos— abrir nuevas puertas a la propia Ciencia, pero siempre con su *Matemática gráfica*: sus *dibujos* (representación de ideas y formas reales existentes), sus *diseños* (representación de sus propias creaciones e inventos).

2. *Método de construcción de un ángulo de 15º*

Pasamos aquí a describir la forma empleada por Leonardo en la construcción de un *ángulo* de 150 a partir de una *circunferencia*, utilizando las *herramientas euclidianas* y considerando fija la abertura del compás: (Fig. 5).

5. Augusto Marinoni, *Leonardo, Luca Paccioli e il «De ludo geométrico»*, Atti e Memorie dell'Accademia Petrarca di Lettere, Arti e Scienze di Arezzo 1970-72; y Augusto Marinoni, *La place des Manuscrits conservés à Institut de France dans lèvolution de la pensée mathematique de Léonard de Vinci*, Académie des Inscriptions & Belles Lettres.

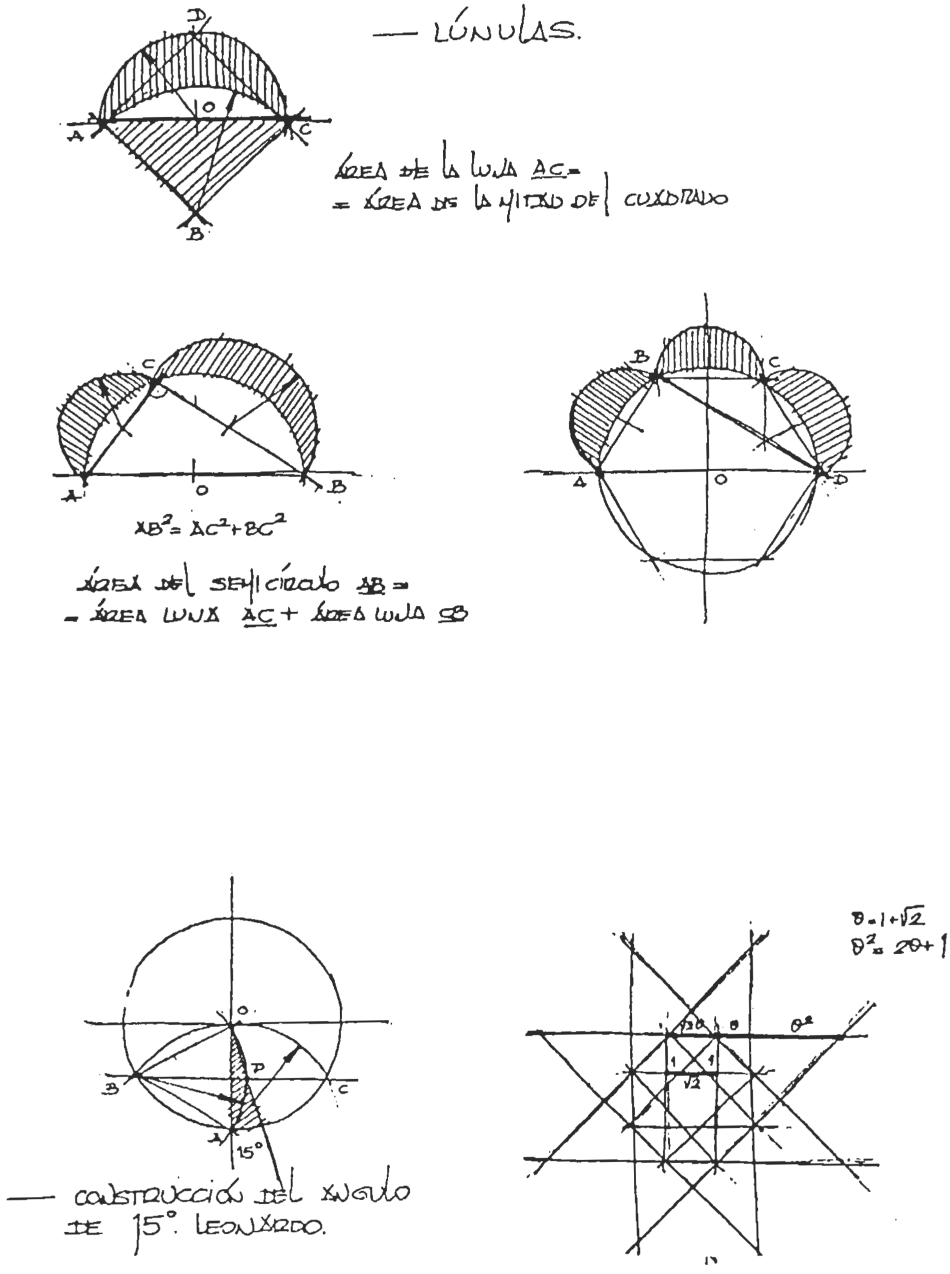

— LÚNULAS.
ÁREA DE LA LUNA AC =
= ÁREA DE LA MITAD DEL CUADRADO
AB² = AC² + BC²
ÁREA DEL SEMICÍRCULO AB =
= ÁREA LUNA AC + ÁREA LUNA CB
θ = 1+√2
θ² = 2θ+1
— CONSTRUCCIÓN DEL ÁNGULO DE 15°. LEONARDO.

Fig. 5

Dibujemos una circunferencia y tomemos un punto A cualquiera de ésta. Tracemos el radio OA. Aquí colocamos el compás para trazar el arco que cortará a la circunferencia en dos puntos, con ellos tracemos una cuerda. Uniendo un extremo de ésta con el centro de la circunferencia O y con el punto A, construimos un triángulo equilátero; y desde el mismo extremo de la cuerda trazamos el arco OA. Vemos que este arco corta a la cuerda en un punto P por el que pasará la semirrecta del ángulo que se forma con el radio OA y cuyo valor es 15°.

3. La geometría en la arquitectura de Leonardo

Brevemente paso a explicar en qué consiste su famoso Plan Central.

Continuando con su empeño de unir *cuadrado* y *círculo*, trabaja sus esquemas de *plantas*, basándose en tal idea. Con lo que no sólo encontramos en sus proyectos estas dos *figuras*, sino que mediante rotaciones llega a conseguir infinitas posibilidades de cuadros compositivos.

Parte de la *simetría radial* comenzando en la mayor parte de los casos por el *octógono* como figura central, y de ésta surgen las posibles *simetrías* que conjugarán: capilla central y capillas pequeñas anexas; pudiendo además añadir al conjunto pequeños nichos, remate central con linterna, etc. Esto le permite conservar el interés del núcleo central.

Desde su etapa junto a Bramante y otros arquitectos del Bajo Renacimiento (sobre el año 1488), tiende a adoptar esta *forma* en el diseño de las *plantas*. En general, casi todos los artistas llegan a compaginar su trabajo con la Arquitectura, y se les ve influenciados por el poderoso símbolo de la Gran Cúpula. En el Alto Renacimiento ya la *idea* y forma de diseñar está perfectamente madura con la utilización de estos esquemas de organización modular.

Buen ejemplo de este sistema de proyectar lo tenemos en los *planos* de la *planta* y la *cúpula*, de la Catedral de Milán; y en el *primer trazado* de la Iglesia de San Pedro, en Roma. (Fig. 6).

4. Ingeniería y Diseño

Muchos de sus inventos fantásticos más que por la idea en sí y su intento de ponerlos en práctica, merecen por la tremenda extracción de observación de la naturaleza y de la aplicación de la Física y de la Mecánica.

Aparte de su faceta de ingeniero militar y civil, iniciado en el siglo XVI Leonardo comienza a entusiasmarse con sus máquinas para volar. Pero sigue una vía errónea, no llega a solucionar la fuerza propulsora o fuerza motriz de sus instrumentos de vuelo. Aunque pequeños detalles están dentro de lo posible: como la estructura

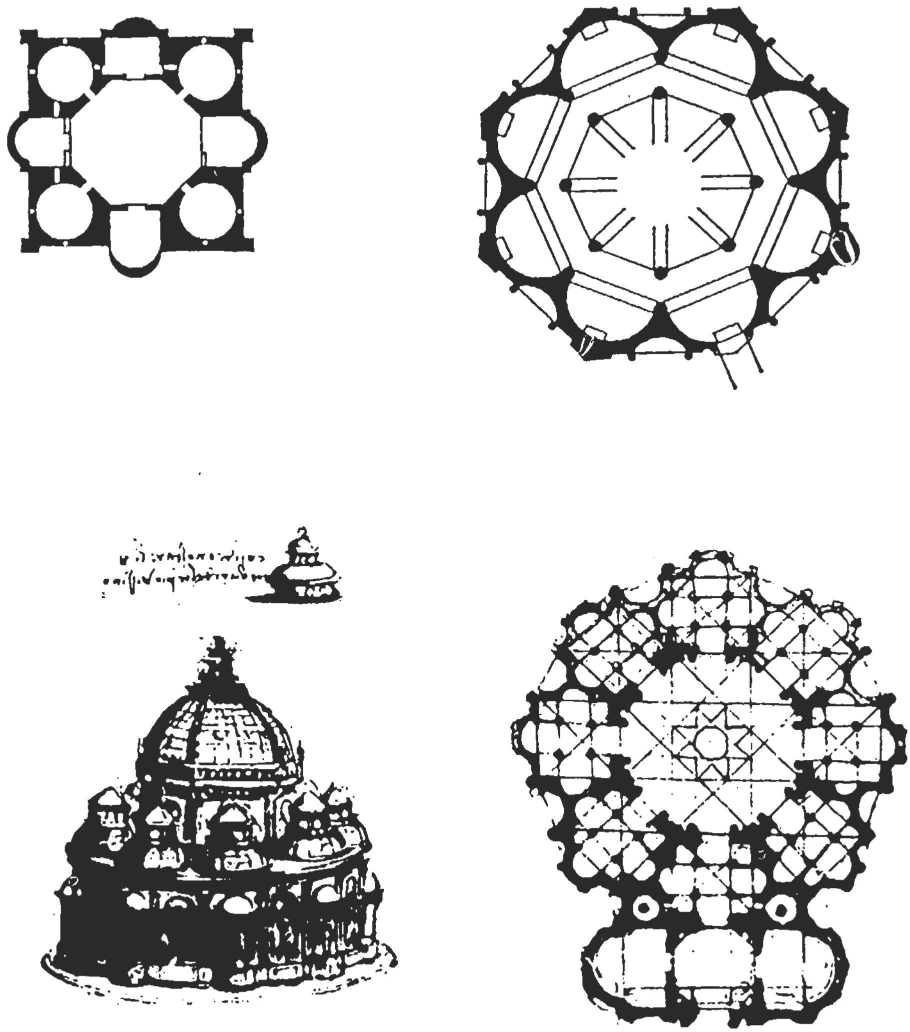


Fig. 6. Trazados de Leonardo basados en el esquema del Plan Central.

general para obtener movimiento, piezas, engranajes y pequeñas poleas. En su aventura estudia las diferentes corrientes de viento; observa y analiza las aves y los murciélagos. Crea modelos planeadores y la máquina conocida como el *autogiro de Leonardo.* Así como un aparato para indicar la velocidad del viento y otro para comprobar la inclinación en el vuelo, al que llama *inclinómetro.*

La Mecánica —dice— *es el paraíso de las Ciencias Matemáticas, porque a través de él uno se cosecha los frutos de esta ciencia.*

Pongamos, con un rápido y resumidísimo recorrido, varios ejemplos: Tiene estudios sobre transición de energía en los cuerpo: los *dibujos* de distintas combinaciones de *poleas*, indicando las diferentes características mecánicas de cada sistema. Idea *gatos de elevación.* Sistemas para multiplicar la fuerza mediante *engranajes.* Otros basados en resortes que pueden provocar el desplazamiento de un *vehículo. Engranajes cónicos* para conseguir velocidad de rotación gradualmente mayor; y aunque no lo llegó a aplicar a sus modelos, coincide con la primera tecnología en la historia del automóvil. *Diseña* un vehículo impulsado por resortes con posibilidad de recorrer unos cuantos metros. *Dibuja* el efecto rotor de la combinación de *engranajes, roscas, muelas dentadas* y *correas.*

En el fondo de estas tormentas de ideas también se encuentra su soberbio sentido y *búsqueda de la Proporción.*

El mismo Leonardo apunta que quiere buscar una relación de proporcionalidad entre el movimiento y otras variables.

¿Tuvo nuestro amigo posibilidades de acercarse teórica o gráficamente a describir el recorrido lineal de las *curvas cíclicas*? Realmente estuvo muy cerca de ver tales desarrollos lineales. No sabemos hasta que punto alguno de sus diseños de engranajes y transiciones de movimiento fueron promotores de posteriores ideas [6].

Propone también, un el *estepón mecánico* accionado por la fuerza que emana del fuego. También estudia la transmisión por cadenas de *engranajes. Diseña* incluso las pequeñas piezas o eslabones. Pero todo esto queda solo en *proyecto gráfico.* Y es curioso que mucho después no solo con el desarrollo de las curvas mecánicas, sino que además Francia en (1830) se crea un sistema similar a los que dibujara Leonardo, para el primer modelo de bicicleta.

Casi tres siglos antes de que Benjamín Rumford realizara el invento, Leonardo idea y dibuja un *fotómetro*, cuando se dispone a investigar sobre la posibilidad de medir la intensidad de la *luz.* Conoce la *luz* desde el punto de vista físico.

6. Según los dibujos de Leonardo da Vinci: Códice Atlántico 812 (antes 296v.a.); Códice Atlántico 114 (antes 40r.b.); Códice Atlántico 18v. (antes 4v.b.); Códice Atlántico 17v. (antes 4v.); y en Códice Atlántico 77v. (antes 27v.a.).

Le atrae el fenómeno de la *iriscencia* en el plumaje de las aves y en ciertas manchas de aceite sobre el agua, explica claramente que es debido a la *refracción de los rayos de luz.*

Se puede decir que Leonardo: Ve, describe y razona, pero no profundiza. Así y según consideran muchos, se aproxima bastante a la formulación de la *Primera Ley del Movimiento* de Newton. Leonardo dice: *Nada se mueve por sí mismo, el movimiento se efectúa a través de otros, este otro es la fuerza*; en otra nota: *Todo movimiento tiende a mantenerse mientras permanezca en ellos el impulso de la fuerza original.* El Principio de Inercia durante años se denominó *Principio de Leonardo.*

Ante esta rápida y resumida revisión de sus ingeniosos inventos, a nosotros, este eclécticismo de ideas, nos puede llegar a cuestionar: ¿qué temas tomó de otros?, y ¿qué es «lo propio» y qué «lo próximo» a sus pensamientos?

Para los escépticos hay una recomendación que haría mitigar la intriga de unos cuantos: la publicación en Milán (1956) de un extraño artículo del ingeniero Ladislao Reti.

5. Tierra y Martes, como motivo de los dibujos de Leonardo

Estuvo muy por encima de la *visión gráfica* o *planimétrica* que se tenía en la época. Aportó novedosos *planos cartográficos.*

Da una posible y casi correcta explicación acerca de los fósiles marinos y de la formación de las rocas sedimentarias. No aceptando la idea del Diluvio Universal.

Su obra contiene bellas ilustraciones sobre el movimiento del agua en mares y océanos. En las intrigas de Leonardo se encuentran también fenómenos naturales, como: las tormentas y huracanes.

6. La naturaleza

Leonardo sabía ver «lo invisible» en Botánica, en la Anatomía de los seres vivos y en la Anatomía humana. Este capítulo —como el anterior— apasionante, sobre el que no nos marcamos ahora el cometido de abordar, debemos —así— al menos mencionarlo.

Los dibujos sobre la Naturaleza son el reflejo de una concepción dinámica de ésta que difícilmente es apreciable en las ilustraciones de épocas precedentes. Seguramente de tal inspiración deriva la inventiva de Leonardo en el terreno de la Mecánica, y de ahí sus máquinas soñadas; como él mismo decía: *con el auxilio de la naturaleza,* con semejanza de vida. La diferencia entre la obra de la naturaleza y los instrumentos creados por el hombre, señalaba Leonardo, estaban en la *fuente de la energía.*

7. Los cielos y más allá de éstos

Toquemos aquí «cuatro cosas», lo suficiente para tener una idea de la abundante labor científica que razonó y desarrolló en sus ilustraciones. Cualquiera de los títulos que han publicado sus biógrafos nos ampliaría este extracto que aquí hago sobre la figura de Leonardo, que por otra parte, solo pretende ser sugerente hacia un futuro «entusiasmo» por el tema. Lo importante es que ayude a ver como fue la sensibilidad de Leonardo frente a la *Geometría* y el *Diseño* de la realidad física y sensible.

Coinciden los expertos, que Leonardo se adelantó unos quince años a Copérnico; y a Galileo, más de un siglo. También que conocía la obra de Aristarco de Samos (siglo III a.J.C.). Se sabe, por sus monografías que estudia un *eclipse de sol*, para observarlo sin que la vista sufra, había que hacerlo —nos explica— a través de dos pequeños agujeros en una hoja de papel.

Rechaza la idea del *Universo Geocéntrico* al decir: *El sol no se mueve.* Aunque le afecta la visión antigua del *cosmos* (tierra, aire, fuego y agua).

El sol posee sustancia, forma, movimiento, irradiación, calor y fuerza regeneradora; todas estas cosas emanan de él.

De Platón toma la relación *hombre* y *Universo.* Así como la doctrina sobre el *macrocosmos* y el *microcosmos.*

Era claro en su visión de la *Tierra* con respecto al *Universo*: *Muchas de las estrellas son mayores que la Tierra.* Proyecta una especie de observatorio para sus estudios astronómicos; él mismo en los dibujos se hace un curioso recordatorio: *obtener cristales para ver grande la Luna.* ¿Sabía construir lentes? Pensemos que aún no existía el telescopio.

Para finalizar aquí y a modo de epígrafe utilizó una cita de Leonardo, que muy bien pudo servir al comenzar este condensado encuentro con el maestro: *El que pierde la vista, pierde su visión del Universo, y es como un hombre enterrado vivo, que sólo puede moverse y respirar en su tumba. ¿No ves que el ojo abarca la belleza del mundo entero?*

Armonía, belleza y orden cósmico en el Renacimiento

Nos hemos dejado, con la intención de sumarlo a éste apartado, un tema tratado años antes por Vitruvio. Nuestro propósito con ello va a ser dar entrada a presentar más tarde a Luca Paccioli. Pasemos pues a ocuparnos del asunto:

Vitruvio, de forma breve y bastante clara, nos muestra en su tratado un asunto donde se advierte la existencia de la clave de la *proporción* y de su función más allá de los *órdenes*.

Muy pocos humanistas llegan a entender los escritos acerca de estas *teorías* en arquitectura. Fue el matemático Cardano, quién en el siglo XVI le atribuye una *teoría de la proporción* basada en la Música. Por otro lado, también se evidencia en su *tratado* su conocimiento a cerca de los ritmos musicales, y queda constancia de que aplica a ellos las *teorías pitagóricas*.

En una parte de su *escrito*, explica que busca la entonación correcta de las cuerdas tensadas de las catapultas: sin esto —nos cuenta— la dirección del proyectil no puede ser recta. Es una sencilla *Norma de Armonía* que se traduce a que todas las cuerdas deben tener la misma longitud e igual espesor, para que las tensiones fueran iguales. Aplica también estos *principios* en el diseño de los órganos de agua romanos. Igualmente tendrá en cuenta la *norma armónica musical* en la concepción espacial de detalles para el teatro: se puede incrementar la fuerza de la voz del actor, colocando vasijas de bronce en una especie de nichos, y el arquitecto tenía que buscar la resonancia correcta, que dependía de la concavidad del recipiente. Pues bien, Vitruvio hace de ello igual que con todo «una cuestión de *Proporción*».

Por otro lado, trabajar con las ilusiones ópticas y la apariencia de las cosas, tiene que ver también con la *proporción*. El placer de contemplar lo *estético* se basa en *percibir* relaciones puramente *formales*. Esto supone la existencia de una *estructura*. En el Arte, el responsable de ella es por supuesto el artista que *compone*. Y *Componer* es el acto que podríamos definir como: partir de un problema estructural y plantear el acuerdo entre las partes que formarán el conjunto coherente, es decir: una unidad. Pero ahora nos preguntamos, como cuando comenzábamos nuestras reflexiones: ¿existe una solución única, perfecta y agradable a la vista?

La *belleza, austeridad* y *pureza formal* de los diseños griegos y romanos comienzan a seducir a filósofos y arquitectos de ésta nueva etapa que se esfuerzan en resumir la *teoría de la Proporción* a una sencilla teoría de *lo correcto*.

Nos preguntamos también por los esquemas *formales* que reúnen ésta propiedad. Nos cuestionamos además, si se podía llegar a seleccionar las *formas* más agradables a la vista de la mayoría, y si el Arte y la *belleza* son «cuestiones de hacer números».

Sabemos que en los siglos XV y XVI se podía llegar a la armonía musical mediante relaciones numéricas. Pues bien, los artistas del Renacimiento basándose en estos principios construyen los rectángulos más hermosos.

Vitruvio es el primero que parece conocer estas *reglas*, las estudia a través de la arquitectura griega, sin contar con fuentes escritas de aquella época. Alberti en su tratado elogiaba a Pitágoras, y casi al final del Renacimiento nos encontramos con Andrea Palladio: el más destacado representante del último período (Clasicismo), confiaba las medidas de sus edificios y de sus estructuras abovedadas al uso de medios *aritméticos, geométricos* y *armónicos* según toma de los clásicos. Antes de llegar a Palladio, los renacentistas —por lo menos la mayoría— se resistían a utilizar *números* que no fueran enteros. Pues pensaban que aquellos, los maestros de las formas puras y regulares, nunca tomaron proporciones inconmensurables o no expresables como *proporciones* de *enteros*. Sin embargo Palladio que conoce a Vitruvio, afirma que éste mide con raíz de dos (en la duplicación del cuadrado, según el método de Platón) por que se sirve de la geometría griega. *Esto supone ya la presencia de los números irracionales*. (Fig. 7).

Es también nota importante a recordar sobre los renacentistas, la ausencia en sus obras del *polígono* de *cinco* lados. Pues su trazado presentaba problemas, no era perfecto y sólo se podía construir por aproximación, predominaban por esto los *polígonos regulares de lados pares*, donde cabía más la posibilidad de no encontrarse con la inconmensurabilidad. Entre las *formas* favoritas de la arquitectura y la pintura estaba el *octógono regular* y la *estrella de ocho puntas*. Recordemos aquí que Leonardo se basó también en ello. Solamente contamos a parte de Leonardo, con otros dos personajes que en el Renacimiento se preocuparon por teorizar acerca del trazado del *pentágono*, y los dos conocían perfectamente a Euclides: uno era Alberto Durero y el otro Piero della Francesca. (Fig. 8).

La sección divina

La *figura* de Euclides correspondiente al *polígono de cinco lados* implicaba según su tratado: *la partición de un segmento en relación extrema y media*. (Fig. 9).

Más tarde esta *razón* es llamada *Proporción Áurea* (siglo XVII) por artistas y matemáticos de la *forma*, quienes muestran gran interés sobre su aplicación. Pues parecía ser que la *Belleza de la Proporción* estaba en esta *fórmula*. Se ha estudiado como los griegos la poseen en sus obras y responde a la razón por la que se rige el *Universo*. En él, *hombre* y *Arte* son reflejos de ese *Orden Cósmico*. Y solo, en ambas cosas, se alcanza tal *Armonía* cuando se parte de la *observación* y *principios* de la Naturaleza, tomada ésta por el hombre como medio material a través del cual se puede tener conocimiento del Universo y por lo tanto llegar a descubrir ese *Orden Cósmico* (Orden Divino, según las *teorías* sobre la creación divina del Universo).

El mismo Kepler, citado por nosotros ya en varias ocasiones, se entusiasmó por el tema de la Divina Proporción y elogia sus propiedades. Sus cualidades *estéticas* y *matemáticas* la convierten en *Principio de Composición*.

Tan apasionante era la noción de *Sección Áurea* que a comienzos del siglo XVI el matemático Fra Luca Paccioli escribe un libro sobre dicho asunto, al que él titula:

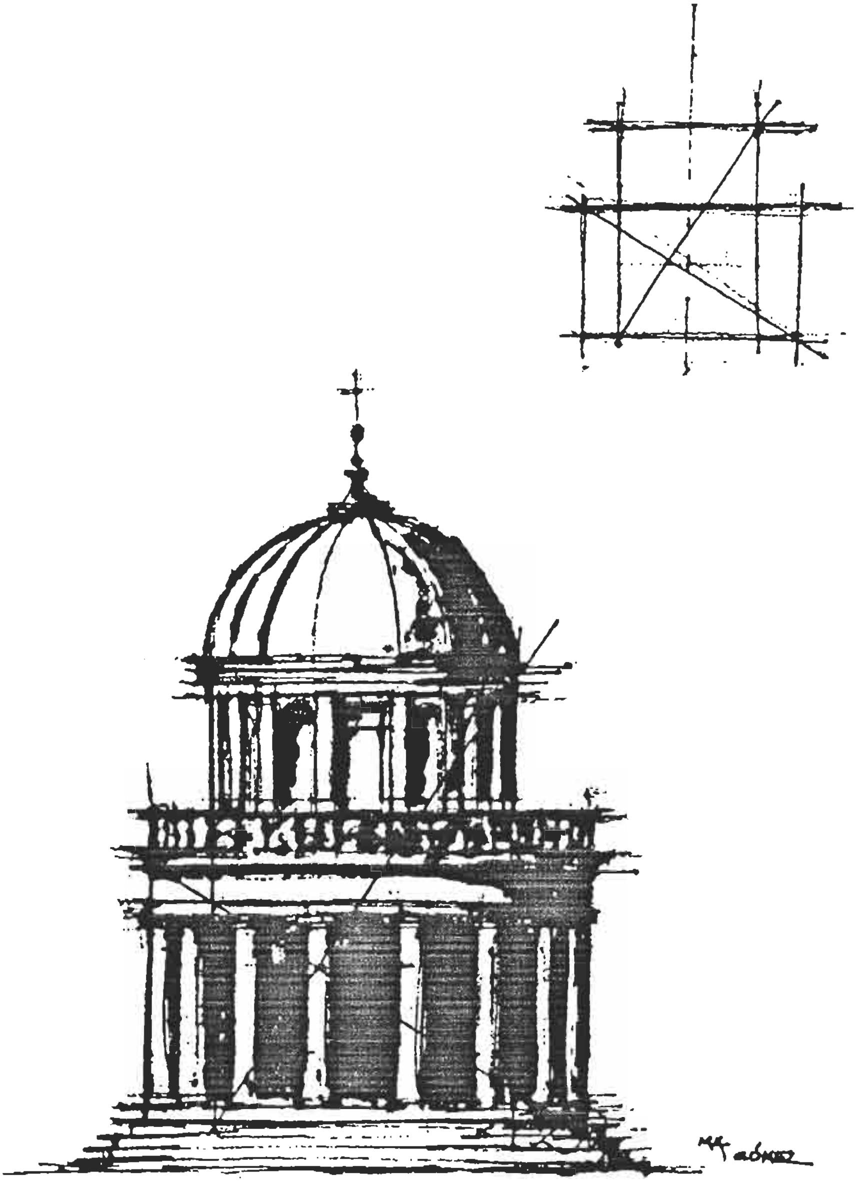


Fig. 7. Templete de San Pietro in Montorio. Bramante. Roma, 1503.

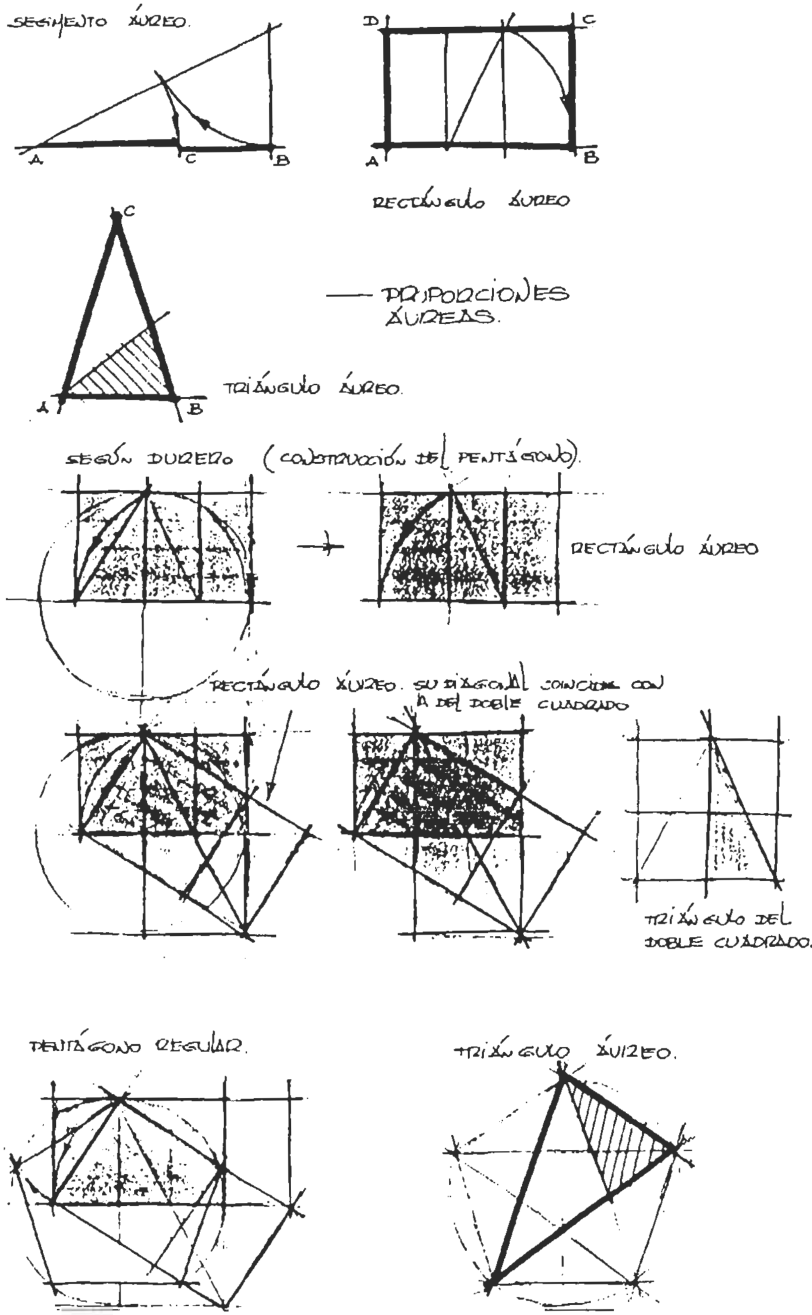

SEGMENTO ÁUREO.
A
C
B
D
C
A
B
RECTÁNGULO ÁUREO
C
A
B
— PROPORCIONES ÁUREAS.
TRIÁNGULO ÁUREO.
SEGÚN DURERO (CONSTRUCCIÓN DEL PENTÁGONO).
RECTÁNGULO ÁUREO
RECTÁNGULO ÁUREO. SU DIAGONAL COINCIDE CON LA DEL DOBLE CUADRADO
TRIÁNGULO DEL DOBLE CUADRADO.
PENTÁGONO REGULAR.
TRIÁNGULO ÁUREO.

Fig. 8

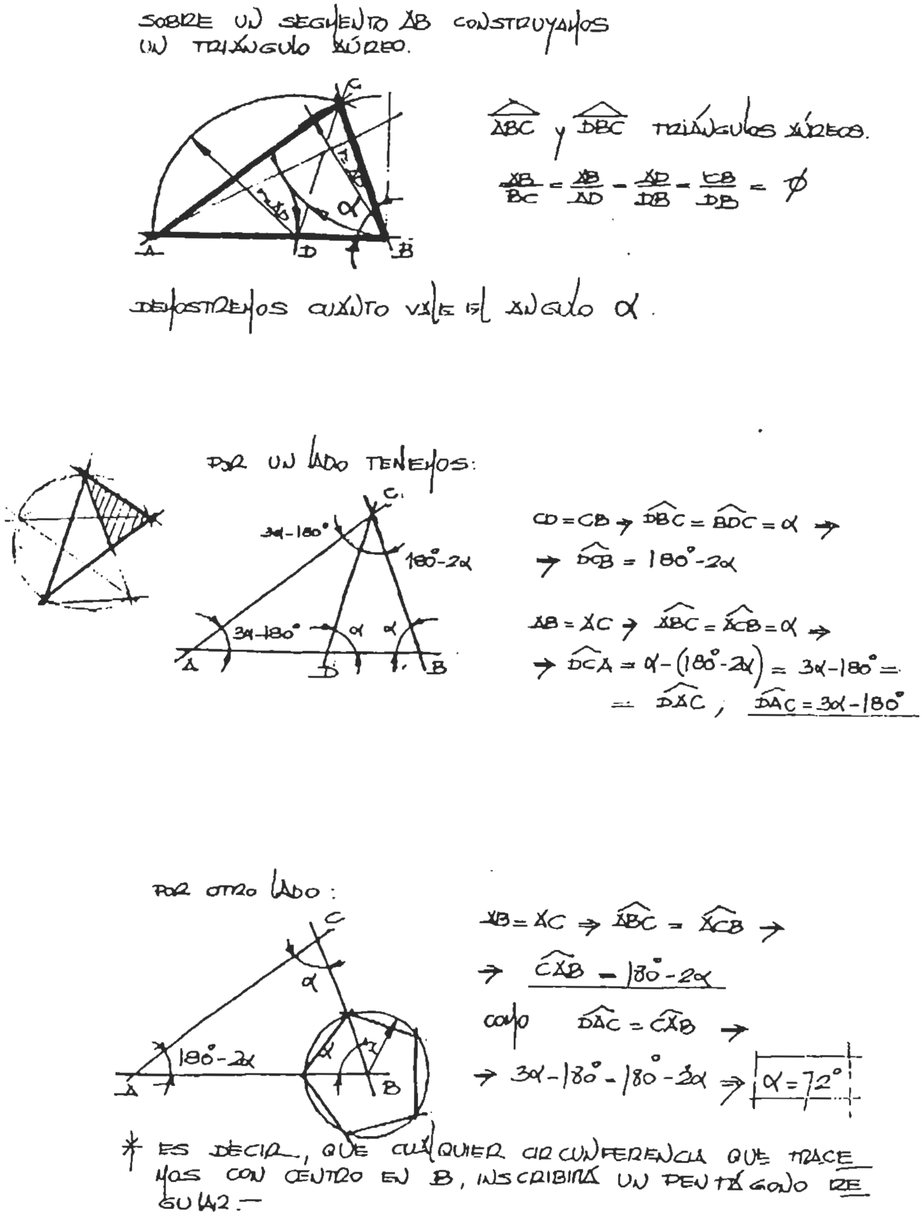


Fig. 9. Construcción de Euclides para el ángulo de 72°.

La Divina Proportione. Donde atribuye a dicha *sección* muy diversas propiedades místicas en el campo de la Ciencia y del Arte. La define como: *Principio Estético que se halla en las formas creadas por el artista, en el cuerpo humano, e incluso en las letras del alfabeto latino.* Pero pasemos ahora a resumir algo más sobre el personaje.

Luca Paccioli (1445-1517)

Hagamos un breve repaso en su vida, nos ayudará a una mejor ubicación en el campo de las Artes, pues de pronto puede que su nombre nos suene a decir «matemático»:

Nace en Borgo, San Sepolcro. Sobre el año 1470 ingresa en la orden Franciscana, y se le conoce sobre todo como enseñante de matemáticas por su densa labor en Perugia, Nápoles, Milán, Pisa, Bolonia, Venecia y Roma. Resume el contenido de los conocimientos matemáticos de su época en su obra: *Suma de Aritmética, Geometría, Proporciones y Proporcionalidad* (1494). Sin duda la obra que lo más identifica es la que nos ocupa: *La Divina Proporción* (1509). Este libro se basa por completo en el *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus* de Piero della Francesca.

Su *tratado* versa sobre el estudio de la *Sección Áurea* y su aplicación en las construcciones geométricas. Contiene los *dibujos* de los *cuerpos poliédricos* que Leonardo hace para él.

Paccioli traba profunda amistad con Piero a partir del año 1460 y asiste a las clases del maestro en sus continuas visitas a su pueblo natal.

Es en la espléndida biblioteca de Federico de Montefeltro (duque de Urbino) donde Luca Paccioli se encuentra con los textos antiguos que le cautivan el espíritu y pasión por los estudios de las Ciencias.

En Venecia asiste a las lecciones públicas del matemático Domenico Bragadino.

Entre 1470 y 1471 se encuentra en Roma alojado en casa de Alberti. Coincide aquí con su maestro Piero della Francesca, que acude a cumplir con un proyecto para el papa Nicolás V.

Sus conocimientos sobre Vitruvio puede que se deban a la proximidad en estos años, al ambiente del cardenal Riario, entusiasta del *Tratado Romano.*

Después de entrar en la Orden, en Perugia se le propone como profesor de matemáticas, pero Paccioli se ocupa poco tiempo de esto (unos dos años) pues viaja por Italia y fuera de sus fronteras. Le acompaña la idea de redactar manuscritos.

En Venecia, en el año 1494, imprime su *Suma de Aritmética, Geometría, Proporción y Proporcionalidad.*

En Milán (1496) es invitado por el duque Sforza, comenzando a enseñar aquí matemáticas. Inicia su amistad con Leonardo, y entre ellos nace una gran colaboración y mútua influencia.

Otra fecha importante en su vida es el año 1505. Paccioli solicita de quien era su protector, Pietro Sderini, la concesión del privilegio de publicar la traducción de *Los Elementos* de Euclides. Con lo que su último viaje a Venecia se realiza con este cometido en 1514. Prepara entonces la impresión de *Los Elementi di Euclides*. Pronuncia una lección sobre el *Libro V*, en la Iglesia de San Bartolomeo. Por la misma fecha finaliza *De Divina Proportione*.

Hay que destacar también que en Roma, en el año 1514, León X pone a su cargo la Cátedra de Matemáticas de la Sapienza.

Teoría de las proporciones de Paccioli

Este tema es desarrollado por el matemático en la *sexta distincione* del primer *tratado*. Se ocupa de la *Estructura del Universo* desde el planteamiento general de las Ciencias, las Matemáticas y el Arte.

Los textos antiguos utilizados como fuentes, considerados por Paccioli como las obras de los autores que originaron la Teoría de la Proporción, son: el *Timeo* de Platón y *Los Elementos* de Euclides.

En su libro nos dice que sin el *concepto* de la *Proporción* no se puede alcanzar el conocimiento de las cosas del Universo. Al igual que su amigo Leonardo, considera la *Proporción: madre y reina de las Artes*.

Las preocupaciones de Paccioli y de Leonardo —se puede decir— son comunes: la Ciencia Matemática va unida a la Ciencia de *ver*.

Aunque dentro de un estilo entre lo esotérico y lo místico, su contenido de ideas aborda *principios* de la Ciencia, y se detecta gran matiz neoplatónico. Por un lado el neoplatonismo le viene del despliegue en los primeros florentinos, que hace que siga un pensamiento de corte matemático; por otro, el gusto hacia las *formas* grecolatinas según las *normas* vitruvianas.

El libro *La Divina Proporción* parece ir destinado a aquellos que posean un pulido interés por lo fascinante entre Filosofía, Artes y Matemáticas.

El rigor y la claridad que caracterizan la obra de Paccioli nacen de la formación escolástica, y va muy conectado a los problemas del momento. Lo cual hace que su estilo sea diferente al que se puede ver en corrientes medievales (nos referimos a aquellos que vivían desde sus estancias conventuales: Religión y Ciencia; pues como sabemos, entre sus labores estaba la de traducir obras antiguas).

Resalta, a lo largo de casi todo su escrito, la nobleza del sentido de la vista junto al rigor matemático, —como el mismo nos cuenta— para que el intelecto emita juicios más acertados. Todo lo creado pasa por: *el número, el peso y la medida.*

Las disciplinas que asumen este rigor son: por un lado, Aritmética, Geometría y Astronomía; y por otro, la Música, la Perspectiva, la Arquitectura y la Cosmografía.

Desde el *Capítulo V* centra en el tema de su *tratado* La Sección Áurea. Paccioli defiende y expone: *La división del segmento en media y extrema razón.* A la vez da a la *unidad* un tremendo sentido de *sustancia divina.*

La figuración del Cosmos

Los *Capítulos* que van desde el XXIV al LIV ocupan el análisis y construcción de los cinco primeros sólidos regulares. A éstos también se les conoce como *poliedros* de Platón y corresponden a las *figuras cósmicas* de la tradición pitagórica.

Estos son: *tetraedro, cubo* (hexaedro), *octaedro, icosaedro* y *dodecaedro.* Simbolizando respectivamente, desde los antiguos, a los elementos: fuego, tierra, aire, agua y el todo.

Para la construcción de los cuerpos son necesarios los triángulos rectos y la Divina Proporción. Paccioli demuestra que no pueden ser más que cinco, y que siempre crecen a partir del anterior. El último *poliedro* representa a la esfera y contiene a todos, se asemeja al receptáculo cielo; y por ello en él se inscriben los demás. Este *sólido* se forma con *doce planos pentagonales*, y si éstos fueran pequeños casquetes circulares, formarían una perfecta *esfera.* La bóveda en arquitectura y la visión del cielo comparten esta *estructura.*

De los *cinco sólidos* platónicos surgen los *abcisos* y *elevados* y éstos a su vez pueden ser *vacíos* o *llenos.* Trucando los primeros surgen los *sólidos* arquimedianos, cuerpos conjugados o semirregulares; éstos admiten la construcción de *abcisos* y *elevados, vacíos* o *llenos.*

Los *poliedros* o *cuerpos geométricos* en definitiva, según Paccioli representan: *La Estructura Universal de la Proporción Matemática.* Por lo que deben de representar para la arquitectura *principio y objetivo de belleza.*

Al final de este *Capítulo* elogia y recomienda dos cosas: una es Vitruvio —dice— *quien de él se aparta, cava en el agua y cimienta en la arena y muy pronto malogra su arte*; la otra es, *el ángulo recto* —pues como nos indica— *sin su conocimiento no es posible distinguir el bien del mal en ninguna de nuestras proporciones, ni en modo alguno se puede dar medida cierta.*

Por último decir, que Luca Paccioli define la *Tierra* como símbolo del Macrocosmos y el *hombre* como Microcosmos. Todas las obras parten de una escala: *el hombre*. En él está la Proporción Divina. Como Leonardo da Vinci, toma de Vitruvio el *canon de proporciones*.

Quizás lo más difícil de asumir de todo lo que nos supone su *teoría* para llevar a la práctica tales *Principios de la Proporción*, es su carácter inconmensurable. Como en el Renacimiento, el problema de *diseñar* está en conciliar con el objetivo más importante de la *Belleza en el Arte: Orden y Medida*. Y la *Belleza* está en «saber ver» las relaciones entre las partes en beneficio de percibir la unidad formal.

Bibliografía

ARNHEIN, Rudolf. Arte y Percepción visual. Psicología del ojo creador Alianza Forma,. Madrid, 1986.

ARTEAGA, Esteban de. La belleza ideal como objeto de las Artes de imitación. La España Editorial. Madrid (s. f.).

DAUCHER, H. Visión artística y visión racionalizada. Gustavo Gili. Barcelona, 1988.

GHYKA, Matila C. Estética de las proporciones en la naturaleza y en las Artes. Ed. Poseidón. Barcelona, 1983.

GHYKA, Matila C. The Geometry of Art and life. Dover Public. New York, 1977.

HODGSON TORRES, Mª Luisa. Geometría y Diseño de la realidad sensible desde las Bellas Artes. Tesis Doctoral (inédita). 1993. Universidad de La Laguna.

HUNTLEY, H. E. The Divine Proportion. Dover Public. New York, 1970.

NIETO ALCAIDE, Víctor. El Renacimiento. Ed. Istmo. Madrid, 1980.

PACIOLI, Luca. La Divina Proporción Ed. Akal. Madrid, 1987.

VITRUVIO. Los Diez Libros de Arquitectura (versión de Ortiz y Sanz). Ed. Akal. Madrid, 1987.

VINCI, Leonardo Da. Tratado de Pintura (versión de Ángel González G.). Ed. Akal. Madrid, 1987.

LA FILOSOFÍA NATURAL EN EL RENACIMIENTO

Mª Olga Expósito
C. Begoña González
Profesoras de Filosofía
I. B. Tomás de Iriarte

Introducción

Esta ponencia pretende dedicarle un espacio, en el recorrido de la constitución de la ciencia triunfante, a aquellos intentos fracasados de fundamentar un conocimiento del mundo natural sobre bases diferentes de las tradicionales, que no tuvieron la potencia predictiva del modelo que propusieron simultáneamente Kepler o Galileo.

Las relaciones entre filosofía, magia y ciencia siempre han presentado conexiones que en la actualidad son extrañas, pero que resultaban del todo naturales a los pensadores del Renacimiento. El que a unos se les estime como científicos y a otros como Filósofos de la Naturaleza se debe a una reconstrucción del pasado con esquemas mentales del presente. Por esta razón, si queremos comprender en toda su complejidad el fenómeno de la Revolución Científica no perderemos el tiempo si hacemos antes un alto para interesarnos por autores como Giordano Bruno, Marsilio Ficino, Pico Della Mirandola, Bernardino Telesio o Francis Bacon. Ninguno de ellos hizo las contribuciones positivas a la ciencia moderna de Kepler o Galileo, quienes pasarán a la posteridad como sus fundadores, y de los que se ocuparán en profundidad las próximas ponencias, ni entendieron cabalmente lo que suponía la tesis heliocéntrica o la lectura del universo en clave matemática, a pesar de discurrir sus vidas y obras tan próximas en el tiempo. Lo que sí hicieron fue participar en la creación del clima intelectual que favoreció el cambio de mentalidad requerido por la nueva ciencia al defender el empirismo en el método, el naturalismo en la elección del objeto y el criterio utilitario en la finalidad y justificación del trabajo teórico, todos ellos ingredientes esenciales para entender el fenómeno de la génesis de la ciencia moderna.

Para elaborar el presente trabajo nos propusimos seguir un itinerario que nos conduciría primero a recordar, aunque de forma somera, cómo se hacía ciencia según Aristóteles y, sobre todo, a considerar el uso que de sus directrices hicieron sus seguidores, pues todos los Filósofos de la Naturaleza fueron antiaristotélicos tan furibundos como el propio Galileo.

Una vez aclarado el objeto contra el cuál se establece la polémica y se pretende elaborar una alternativa, podremos pasar a examinar con detalle las *dos vertientes* que asume esta oposición. Una de carácter místico-mágica representada por los platónicos florentinos como Ficino y Pico, o la mágico-naturalista de Bruno. La otra empirista con representantes destacados en Telesio y Bacon. Desarrollaremos ambas a través de sus ilustres portavoces.

La exposición de las propuestas de estos autores nos proporcionará el material con el que abordar una reflexión acerca de la *permeabilidad* de la ciencia hacia elementos filosóficos y mágicos. Nos permitirá comprender la imprecisión de las fronteras entre formas de pensamiento hoy totalmente deslindadas, presentes en las mentes de aquellos que precisamente inician el camino hacia nuestra concepción mecanicista y positivista del mundo, para quienes no se percibe la contradicción entre estos tres universos cuya mezcla nos produce perplejidad.

Finalmente, ubicaremos estas dos tradiciones en el marco general de la filosofía del Renacimiento para obtener una visión panorámica del mismo, haciendo un balance de sus logros e influencias posteriores.

Esperamos demostrar que este recorrido que nos hemos propuesto no significa vadear la línea de investigación que lleva a la construcción de la ciencia moderna sino, muy al contrario, dar cuenta de un momento necesario para comprenderla en toda su complejidad.

I. Aristóteles y el método

La ciencia moderna se constituye contra Aristóteles o, al menos, contra la interpretación escolástica del gran pensador griego. La confrontación se constata en las declaraciones furiosamente antiaristotélicas de Telesio o Bruno, de Francis Bacon y el propio Galileo (el gran constructor de la nueva visión del mundo), recuperándose con ella las tradiciones pitagórica, a través de Platón o el neoplatonismo, atomística antigua, e incluso la hermética.

1. La recuperación del pensamiento aristotélico

Aunque es cierto que la filosofía y la ciencia en la Edad Media estuvieron dominadas por Aristóteles ello debe matizarse en un doble sentido. En primer lugar, en su validez sólo para la segunda fase del medioevo. No será hasta finales del siglo XII y siguientes, en el momento en que penetren en Europa sus escritos, primero a través de las traducciones toledanas desde el árabe y luego directamente desde el griego, cuando la Edad Media se aristotelice. En segundo lugar, las lecturas cristiana o islámica del estagirita interpretan sus doctrinas partiendo de las premisas que impone una religión revelada, totalmente ajenas al pensamiento del griego y que necesariamente desvirtúan algunas de sus tesis.

De hecho, la aceptación de Aristóteles supuso una dura batalla intelectual. Las condenas se suceden desde 1210, poco después de aparecer las traducciones al latín, y la labor de los grandes aristotélicos medievales, como Santo Tomás De Aquino entre los cristianos o Averroes entre los musulmanes, consistirá en compatibilizar al estagirita con las premisas que imponen al filósofo las dos teologías monoteístas. La dificultad de esta transformación se manifiesta en las agrias disputas entre los «*filósofos*» y los «*teólogos*», con el consiguiente desarrollo de la teoría de la doble verdad para «*salvar los fenómenos*». Será este un socorrido recurso que veremos todavía en Bruno e incluso en Descartes ya en el siglo XVII, aunque descartado por Galileo o por F. Bacon.

Aceptando con estas cautelas la caracterización aristotélica de la ciencia medieval, podemos con Hirschberger establecer los tres puntos fundamentales de la crítica galileana a Aristótles:

1) La prioridad argumentativa de la deducción frente a la inducción;
2) el estudio centrado en la búsqueda de esencias más que en la descripción de los procesos y su dinámica; y
3) la preeminencia de lo cualitativo sobre lo cuantitativo.

La nueva visión «cuantitativo-mecanicista» de la Naturaleza se basa en un método inductivo y la ciencia resultante es el reino de los fenómenos y de los procesos naturales, donde la experimentación sirve para mostrar cómo se relacionan entre sí los diversos factores de un proceso observado. Se sustituye la noción de sustancia por la de función, la de esencia por ley física y la matemática será la llave para acceder a la Naturaleza.

Estas ideas, aunque no son totalmente externas al pensamiento de los filósofos de la naturaleza objeto de esta ponencia, no aparecen con perfiles tan nítidos. Así el valor otorgado a la matemática en sus sistemas les acercan más que les separan de las ideas aristotélicas. El modelo de conocimiento que proponen no se distancia demasiado de la ciencia cualitativa aristotélica aunque se avance notablemente en la crítica de las «*naturalezas*» o esencias internas que caracterizan al conocimiento medieval.

Quizás sea en el repudio al predominio de la deducción donde de forma más unánime se manifieste el antiaristotelismo renacentista. El «*nuevo órgano*» que elaboran los Filósofos de la Naturaleza pretende precisamente oponer la experiencia a la preeminencia del razonamiento en la escolástica. Pero aquí nuevamente debe distinguirse entre el propio Aristóteles y sus seguidores. W. Jaeger [1] nos muestra en el autor de *Historia de los animales* un perfil de investigador preciso y minucioso que desarrolla una ciencia observacional y descriptiva. El impulsor de los trabajos de investigación presentes en la *Lista de los vencedores píticos,* las *Didascalias* y la colección de *Constituciones* muestran según Jaeger un tercer período en la obra del estagirita vuelto a «*la investigación empírica de los detalles*», tras una primera etapa platónica y una segunda de elaboración de una metafísica alternativa a la de su maestro.

Esta tendencia será la que predomine en el Liceo tras su muerte presentando un modelo de investigador no tan alejado del ideal baconiano, ocupado en la recopilación sistemática y organizada de los datos de experiencia. Tanto este último Aristóteles como Francis Bacon se alejan de la auténtica inducción científica al exigir que ésta se base exclusivamente en la simple observación en el caso de Aristóteles, o en la experimentación controlada y sistemática en el de Bacon, pues ambos comparten la misma deficiencia en la teoría de la inducción y la formulación de hipótesis.

Al llegar el siglo XVI el aristotelismo se ha convertido en una única corriente filosófica a la que caracteriza su interés por la naturaleza y su método racionalista, y que según L. Geymonat resulta favorable para el nuevo clima intelectual que culmina en la construcción de la ciencia moderna. Aunque también señala [2] que el naturalismo aristotélico se verá obstaculizado por algunos prejuicios como:

a) la excesiva valoración de la lógica y la exclusión de las matemáticas;
b) la aceptación de la física teleológica como construcción científica acabada no controvertible; y

1. JAEGER, W., *Aristóteles*, pág. 372-92.
2. GEYMONAT, L., *Historia de la Filosofía y de la Ciencia*, pág. 51.

c) el recurso a las almas para dar cuenta de la acción recíproca.

2. *El método*

Será útil, a tenor de lo hasta aquí expuesto, describir someramente el método que Aristóteles nos propone para el conocimiento científico, y así poder apreciar lo que realmente se esconde tras las declaraciones antiaristótelicas de los representantes de la filosofía naturalista que a continuación trataremos.

Según la exposición que hace R. Harre sobre el modo de proceder de la ciencia antes de Copérnico [3], Aristóteles se interesó por el método en extensos trabajos. Encontramos buenas exposiciones, aunque no de forma sistemática y expresa, en el libro A de la *Metafísica* y el libro II de *Analítica Posterior.* En ambos nos expone que existen dos clases de conocimiento: «*saber qué*», o conocimiento de hechos, y «*saber por qué*», o conocimiento de causas. Este último es el que interesa más propiamente al científico puesto que con el descubrimiento de la causa concluye la investigación. Pero su noción de causa es diferente a la nuestra. En efecto, Aristóteles distingue cuatro posibles respuestas al por qué y, contra la noción moderna de causalidad que se interesa por la causa eficiente o fuente del cambio, otorgará prioridad a la causa final o propósito de algo, implicando intencionalidad y fisicalismo teleológico. Los filósofos de la naturaleza renacentistas, coincidiendo en este punto con los científicos, rechazarán de forma unánime las causas finales para centrarse en la descripción de los fenómenos y la explicación de los procesos, lo que responde más bien a una tercera pregunta no formulada expresamente por Aristóteles, el «*cómo*» del fenómeno.

La investigación de las causas supone establecer en primer lugar el hecho, esto es, determinar si se produce el fenómeno. Si decidimos que alguna cosa existe, la siguiente cuestión será decidir qué clase de cosa es, su naturaleza, ya que según Aristóteles la naturaleza de la cosa y las razones de que suceda son idénticas. El método de trabajo científico consiste, por tanto, en ascender de los hechos a sus causas y para proceder nos propone el «*Organon*». Efectivamente, la lógica constituye la teoría de la organización del conocimiento pues aunque desde el punto de vista lógico las premisas son anteriores a la conclusión, la prioridad epistemológica es el orden inverso del silogismo, debiendo avanzar desde las conclusiones (esto es, los hechos que conocemos por evidencia sensible) a las premisas que determinan las causas que pretendemos conocer. Luego el trabajo científico consistirá en encontrar las premisas

3. HARRE, R., *El método de la Ciencia,* capítulo 1.

necesarias con las que construir el silogismo adecuado y elaborar teorías, encontrar el término medio. En general, se necesitan concatenaciones de silogismos y una búsqueda de sus respectivos términos medios. El final de proceso de sorite, o concatenación de silogismos, llegará cuando encontremos una definición, algo que no necesita demostrarse pero que se da o se supone. En definitiva, estamos ante una definición cuando decimos cuál es la verdadera naturaleza de una sustancia, cosa, proceso o propiedad.

El problema que señala Harre en el planteamiento metodológico de Aristóteles estriba en que no hay nada en sus trabajos que nos diga cómo encontrar los términos medios, ni cómo juzgar que los que hemos encontrado sean correctos. La teoría de la deducción está perfectamente desarrollada en Aristóteles y, por tanto, no hay problemas en el contexto de justificación de las teorías. Pero el descubrimiento es inductivo y la inducción en Aristóteles no está tan bien establecida aunque se ocupara de ella. Su ideal sigue siendo la deducción, la demostración silogística y al lado de un análisis del proceso deductivo de muy alto nivel y muy completo nos encontramos con una insuficiente explicación del proceso inductivo.

El ideal de ciencia aristotélico hace consistir el conocimiento no en conjeturas ni explicaciones probables, sino únicamente en las necesarias demostraciones rigurosamente deducidas de los necesarios principios. Por eso Aristóteles, y en mayor medida sus seguidores escolásticos, cuando practican ciencia se apresuran a afirmar principios generales a partir de una inducción precipitada. Esto es, al menos, lo que Bacon le critica exigiendo como veremos una experiencia sistemática y realizada metódicamente. La reducción naturalista telesiana apunta en la misma dirección. Telesio le reprochará los esquemas teológicos y lógicos impuestos a la Naturaleza, que debe ser estudiada «*juxta propia principia*» partiendo de una confianza absoluta en la observación, fuente de todo conocimiento incluido el intelectual que concibe como sensación prolongada.

Los elementos caracterizadores del antiaristotelismo de los florentinos veremos estriban en la futilidad intrínseca del mundo físico aristotélico y la reducción del mismo al imperio del dato empírico. De manera paradójica Ficino y Pico, fuertemente influídos por el platonismo, reprochan a Aristóteles excederse justamente en lo que hechan en falta los naturalistas. Finalmente Bruno concreta su crítica a doctrinas como la concepción hilemórfica, la potencialidad de la materia o el postulado canónico del movimiento circular, entre otros.

II. El naturalismo de Bernardino Telesio

La concepción de la Naturaleza renacentista tiende a ser presentada como un sistema autosuficiente, unificado por fuerzas de simpatía o atracción y animado por un alma cósmica. La distinción tajante entre lo vivo y lo no vivo, hoy decimos orgánico e inorgánico; material y espiritual, propia de la Edad Media, tiende a diluirse en una visión orgánica del mundo natural. Se recupera así la vieja visión hilozoísta presente en el primer pensamiento filosófico. Por otra parte, desvelar las fuerzas internas que dinamizan el mundo tiene un interés práctico. Veremos más adelante en Francis Bacon cómo su utilidad justificará la búsqueda del conocimiento.

De las tres vertientes que están presentes en la investigación natural del Renacimiento, a saber, la magia, la filosofía y la ciencia, el representante más destacado de la segunda de ellas fue Bernardino Telesio cuyo naturalismo constituirá una metafísica de la Naturaleza que abandonando a Aristóteles se remonta hasta los investigadores de la «*physis*» del período presocrático.

Su obra más importante es el tratado *Sobre la naturaleza de las cosas según sus principios propios* del que publica los dos primeros libros en 1565 y 1586. Los opúsculos *Sobre lo que pasa en el mar, Sobre los temblores de tierra, Sobre la generación de los colores,* publicados en 1570, *Sobre los cometas, Sobre el arco iris y Sobre el rayo,* que dejó inéditos, muestran su interés por recoger el mayor número de fenómenos físicos sin preocuparse mucho por sistematizarlos.

Su cosmología recuerda mucho la de Empédocles con tres principios, dos activos; el elemento cálido y el frío; y uno pasivo, la materia, sobre las que actúan los anteriores distendiéndose con el calor y comprimiéndose con el frío. El sol tiene un papel predominante, aunque no es el centro del Universo, constituye el lugar privilegiado donde la «*Providencia*» reúne el calor para «*evitar el caos*». Es por ello ligero, claro y móvil frente a una Tierra con atributos de espesa, sombría e inmóvil por ser un lugar frío. Calor y Frío son entendidos no como propiedades de la materia sino como energías que la ponen en movimiento, imponderables por cuanto penetran cualquier punto pero no pueden actuar sino a través de una materia indestructible provista de inercia, que ocupa espacio y se extiende, sin variar su naturaleza, por el mundo sublunar y supralunar. No queda claro si admite o no el vacío como escenario para sus tres principios pero lo que sí postula es la necesidad de dotar de sensibilidad a todas las cosas de la Naturaleza.

Telesio cree que todas las cosas tienen algún grado de percepción [4] y en su filosofía hay una omnipresencia del movimiento, síntoma de vida, que hace de la materia inorgánica algo no-vivo sólo en sentido relativo. Enlaza así con las creencias animistas de la magia. El «*espíritu*» (spiritus), para redundar más en esta concepción,

4. Así lo afirma de forma concluyente F. COPLESTON señalando en esto a nuestro filósofo como precursor de LEIBNIZ (*Historia de la Filosofía*, tomo 3, pág. 243).

es material. En los animales y el hombre procede de la emanación del elemento cálido que recorre el cuerpo a través de los nervios alojándose en el cerebro. No obstante, también considera la existencia de un alma inmortal (mens) propiamente humana, infundida por Dios, sujeto de la vida religiosa, pero que no tiene ningún valor para la vida natural del hombre. Su reducción naturalista queda así salvada, pues el alma sobreañadida y Dios, que en su sistema se identificará con las leyes generales del Universo que garantizan el orden y la uniformidad de la Naturaleza, no cumplen ninguna función específica en el desarrollo del mundo natural [5].

La Naturaleza es así para Telesio un mundo autónomo que se rige por principios internos excluyendo cualquier fuerza metafísica. Es independiente del hombre, de su imaginación y deseos, y podrá ser conocida si se observa convenientemente. La reducción naturalista característica de este autor se manifiesta en esta autonomía de la Naturaleza. El hombre para conocerla sólo tiene que observarla pues en cuanto es parte de ella se revelará a su sensibilidad primero y, a partir de ella, a su inteligencia. El conocimiento es, en primer lugar, «*táctil*», esto es, el contacto dinámico entre lo percibido y el perceptor produce una «*conciencia*» que constituye la percepción. Sobre el dato así obtenido por la sensibilidad, actúa la inteligencia que percibe la cualidad de la cosa en un acto de valoración y recuerdo. Por ello el razonamiento se basa para Telesio en la percepción y la memoria, no es más que sensación prolongada y no es diferente de la sensibilidad. De ahí también su antiintelectualismo, su afirmación de que la teoría debe basarse en la observación y que todos los principios de la ciencia no son más que generalizaciones de percepciones sensibles. Las ciencias más directamente relacionadas con la experiencia son para Telesio superiores y la matemática tiene valor en cuanto se relaciona con la experiencia sensible.

El valor de la aportación telesiana a la historia de la ciencia estriba no en sus aportaciones positivas, pues éstas constituyen una metafísica de la naturaleza ajena a la ciencia moderna, sino en la concepción general que defiende del hombre y de la Naturaleza. Su oposición al aristotelismo, manifestado en su antiintelectualismo y su confianza absoluta en la observación, por el lado del método, y su negativa a aceptar elementos no materiales, generan un naturalismo riguroso donde la Naturaleza se explica con sus mismos principios, cognoscibles por el hombre. El supuesto de autonomía del mundo natural es el mismo en Telesio y en Galileo, aunque el hilozoísmo y el animismo telesiano sean pervivencias de antiguas visiones del mundo espúreas al nuevo concepto del mundo que Galileo representa.

5. Por ello, L. GEYMONAT considera estas adiciones injustificables teóricamente en cuanto elementos ajenos a su concepción materialista, meros recursos para evitar una confrontación con la Iglesia (Op. cit. *Hist. Fil.*, pág. 84).

III. El empirismo de Francis Bacon

1. Profeta de la sociedad tecnológica

Francis Bacon aporta a la ciencia moderna la exigencia de utilidad. Esta pretensión no es nueva, ya existía en las «artes mecánicas» y en la «magia». Lo que es radicalmente moderno es su negativa a separar el conocimiento puramente teórico o especulativo, hasta ese momento considerado *auténtico* conocimiento, por influencia platónica y aristotélica, de sus efectos prácticos en el dominio del mundo natural. No es que Bacon despreciara toda forma de conocimiento teórico, sino que le otorgó valor mediador. De hecho, define como buena una teoría en tanto permita ampliar el alcance de nuestro conocimiento, permitiendo abrir caminos hacia otros campos de los que obtener nuevas rentabilidades.

Esta actitud está presente en su utopía donde soñará con un enorme laboratorio experimental. En la *Nueva Atlántida* sitúa la Casa de Salomón en una isla imaginaria, al modo de Tomás Moro. Allí el reino del hombre sobre la Naturaleza se ha reimplantado a través del poder de la ciencia. Sus dioses titulares son los grandes inventores y sus reliquias sagradas los submarinos y los aeroplanos. De forma más inmediata, inspirará el trabajo de la Royal Society.

2. El plan general de la ciencia

Si seguimos a A.C. Crombie [6] cuando afirma que la Revolución Científica surge por la aplicación combinada y sistemática a la investigación de los métodos experimentales y matemáticos, debemos considerar que Francis Bacon fue sólo a medias uno de los precursores genuinos del cambio. Efectivamente junto a su incomprensión del papel de la matemática, su principal proyecto, la *Instauratio Magna*, pretendía la elaboración de una enciclopedia de las ciencias para renovar el conocimiento de la Naturaleza sobre bases experimentales. Al querer establecer las directrices de todas las ciencias Bacon se nos presenta tan normativista como realista en su toma de posiciones ante la ciencia, lo que por otra parte es la posición mantenida de forma natural en su época.

La *Instauratio Magna* comprendería seis partes para desarrollar su plan general de la ciencia:

1. La división de las ciencias.
2. Nuevo órgano o método para la interpretación de la Naturaleza.

6. CROMBIE, A. C., *Historia de la Ciencia: De San Agustín a Galileo / 2. Siglos XIII-XVII*, pág. 113 y ss.

3. Historia natural o catálogo de fenómenos de la Naturaleza para construir una filosofía experimental.
4. Escala del entendimiento.
5. Los preámbulos o anticipos de una filosofía segunda o ciencia activa, generalizaciones hipotéticas que considera de interés suficiente para justificar adelantarse al método inductivo.
6. Filosofía segunda o ciencia activa que presentaría el resultado final de la inducción en un sistema ordenado de axiomas.

Se parte de la fundamentación del conocimiento teórico para desembocar en la ciencia aplicada. Se trata de una obra planeada pero nunca concluída. *De dignitatis et augmentis scientarum* (1623), que constituye la revisión aumentada de una *Of the advancement of learning* (1606), desarrollará la primera parte. Ya antes había tratado el segundo punto en el *Novum Organum* (1620), con origen en un escrito anterior, *Cogitata et visa* (1607). Entre 1622 y 1623 publicará partes de la proyectada *Historia Naturalis et experimentalis ad condedam philosophian: sive phenomena universi.* Quedarán póstumas la *Sylva Sylvarum* y la *Nueva Atlántida.*

En *De augmentis scientiarum* divide el conocimiento según las facultades del alma racional aristotélica, de lo que resultan tres ciencias: Historia, Poesía y Filosofía. Esta última, fundada en la razón, consiste en la elaboración racional de los datos, y se divide en:

Filosofía primera o ciencia universal cuyo objetivo será recoger los axiomas que no son propios de las ciencias particulares sino comunes a varias ciencias (De augm. scient., III, 1) [7]. Tratará tanto de axiomas como de nociones fundamentales (posible, no posible, ser, no ser, etc...)

- **Ciencias particulares,** con tres divisiones según sus objetos
  - **Antropología:** atendiendo al hombre
    - cuando trata del cuerpo humano encontramos:
      - **Cosmética, Atlética, Medicina, Ars Volptuaria**
      - cuando trata del alma en sentido no trascendente (pues en este caso sería objeto teológico) tenemos:
      - **Psicología**
      - **Lógica** aquí se inscribe el *Novum Organum* como interpretación de la Naturaleza con sus dos partes:
        - la **teoría de la inducción**
        - la teoría del silogismo (**teoría de los Idolos**).
      - **Ética**
  - **Teología natural:** atiende a Dios
  - **Filosofía natural:** atiende a la Naturaleza

7. Citado en ABBAGNANO, N., *Historia de la Filosofía,* pág. 153.

La Filosofía Natural, el campo de conocimiento que más interesa a nuestro autor, presenta a su vez dos campos de desarrollo:

Filosofía Natural Especulativa: dividida en

- **Física**
- **Metafísica**

Filosofía Natural Operativa que debe interpretarse como aplicación de la Filosofía Natural Especulativa en sus dos partes:

- **Mecánica** o aplicación de la física en la práctica
- **Magia** o aplicación de la metafísica, esto es, aplicación práctica de la ciencia de las leyes o «formas ocultas» y no «magia supersticiosa y frívola».

Matemáticas (como apéndice de la Filosofía Natural) dividida en:

- **Matemática pura** que consta de
  - **Geometría** que trata la cantidad abstracta contínua
  - **Aritmética** que trata la cantidad abstracta discreta
- **Matemática mixta:** que comprende cosas tan varias como la perspectiva, la música, la astronomía, la cosmografía o la arquitectura y parece por ello que debe entenderse como la aplicación de la matemática a cualquier campo de actividad.

Hay que hacer notar esta curiosa distinción entre la Filosofía primera y la Metafísica, que tampoco debe confundirse con la Teología Natural, ninguna de las cuales se entiende en el sentido tradicional. Mientras la Filosofía primera está dirigida a la comtemplación, en tanto especulación teórica fundamentante del resto de las ciencias, la Metafísica se orienta a la acción en cuanto constituye la parte más general de la Física.

La diferencia entre la Física y la Metafísica se centra en las causas de los fenómenos a los que se atiende. Eficiente o natural en el caso de la Física y formal en la Metafísica. La final se elimina por considerase estéril su indagación. La división no es radical pues «*la Física empieza por examinar tipos específicos de materia o cuerpos en un campo restringido de causalidad y actividad; pero pasa a considerar leyes más generales. Así cambia poco a poco en Metafísica, que se ocupa de las leyes de la Naturaleza más elevadas o amplias* [8]».

Más interesante es determinar a qué se debe a la influencia del denostado Aristóteles en este trabajo clasificador que muestra el espíritu exhaustivo que domina la obra baconiana, muy en consonancia, por otra parte, con la tendencia a la sistematización característica del estagirita. Aquí las opiniones se dividen y mientras unos comentaristas se muestran partidarios de establecer claras fronteras de fondo a pesar

8. COPLESTON, F., op. cit. *Hist. Fil.*, pág. 282.

de la similitud en el lenguaje, otros consideran que Bacon debe mucho más a Aristóteles de lo que le gustase admitir su confesado antiaristotelismo. Pero entenderemos mucho mejor este punto cuando tratemos del tema de las «formas», objeto de la inducción baconiana.

3. El método inductivo o nuevo órgano

Contra los humanistas, Bacon no considera que la antigüedad de una doctrina sea garantía de solidez. Por el contrario, defenderá una concepción acumulativista en el desarrollo del conocimiento. «*La verdad es hija del tiempo*» y por ello mismo el conocimiento más adecuado es el del presente. Bacon indentifica, como Telesio y los naturalistas italianos, filosofía tradicional con filosofía aristotélica y su «Nuevo Órgano», su lógica del descubrimiento científico, se opone a la lógica aristotélica.

La crítica, no obstante, estaría más bien dirigida a los continuadores de Aristóteles que llevan la autonomía de la inteligencia a límites absurdos, pues el principio programático baconiano «*el saber se extrae de la Naturaleza y no del entendimiento*» equivale a la máxima aristotélica «*nada hay en el entendimiento que antes no esté en los sentidos*». Por otra parte, no constituye ninguna novedad ya que en el pensamiento científico predominantemente aristotélico de los siglos XIII y XIV se están abriendo camino las explicaciones en términos de causalidad natural y métodos experimental y matemático. Como sugiere Crombie [9], Groceteste y Rogelio Bacon ya anticiparon las posiciones empiristas defendidas por nuestro autor.

Es la exigencia de utilidad, la principal aportación a la ciencia moderna de Bacon que ya afirmamos al comienzo, lo que le lleva a tachar de intolerable la esterilidad de la ciencia aristotélica. Bacon no niega que Aristóteles elabore una teoría de la inducción, pero sí que sea adecuada pues produce anticipaciones en lugar de interpretaciones al actuar por simple enumeración y basarse en pocos casos, con lo queda poco fundamentada y muy expuesta a la refutación de un caso contrario. La propuesta baconiana aboga por una inducción interpretativa que avanza de lo sensible a axiomas inmediatamente alcanzables, y luego, gradual y pacientemente, a axiomas más generales. Esto se conseguirá con el recurso a la experiencia sistemática, realizada metódicamente. Sobre el material suministrado de este modo se efectuará un trabajo de poda por rechazos y exclusiones y, tras un número suficiente de casos negativos, se llegará a la conclusión de los afirmativos.

El método inductivo que explica pacientemente en el *Novum Organum* consta de dos partes. La «*pars destruens*», o liberación del error, que constituye la teoría

9. CROMBIE, Op. cit. *Hist. Cien.*, pág. 253.

de los ídolos y la «*pars adstruens*», o construcción del saber, que consiste en la determinación de las reglas de inducción. La primera nos prepara para abordar la segunda.

El *Novum Organum* dedica su primer libro a eliminar los prejuicios que anidan en nuestro entendimiento y que nos impedirán obtener la verdad que se presenta a nuestros sentidos. El empirismo de Bacon es ingenuo, el libro de la Naturaleza se presenta abierto para ser leído siempre que nos apliquemos a ello de forma sistemática. Justamente para eso nos proporciona su método, de cuya correcta aplicación se obtendrá el progreso continuo del conocimiento, «*con la misma facilidad y garantía con la que un compás traza una circunferencia*».

Para liberarse de estos prejuicios que constituyen los ídolos no hay otro camino que el de la experimentación ordenada y madura, cuyos pasos constituyen el método que propone Bacon en la «*pars adstruens*» del *Novum Organum*, su teoría de la inducción.

El método tiene dos finalidades:

1. Dirigir la actividad experimental, lo que llamará «*experiencia letrada*» o también «*caza de Pan*», cuyo fin será la acumulación de hechos sobre los que apoyar el segundo momento interpretativo o de abstracción.
2. Dirigir el proceso de abstracción que lleva desde los hechos hasta los axiomas en dos movimientos:
   a. Ascendente, desde los datos empíricos a la formulación de proposiciones teóricas, que constituye la inducción propiamente.
   b. Descendente, desde los axiomas a la realidad para operar sobre ella aplicando los conocimientos obtenidos, lo que constituye la operación.

Combinando entendimiento y sentidos la inducción se funda en la elección y eliminación repetidas bajo el control del experimento de los casos particulares hasta llegar a la forma. Veamos cómo se procedería paso a paso:

En primer lugar se procede a la elaboración de una historia natural y experimental, esto es, la reunión y descripción de hechos particulares presentados sistemáticamente en tres tablas (colecciones de casos o ejemplos ordenados):

1. de presencia (casos en que se presenta de ordinario el fenómeno estudiado),
2. de ausencia (casos donde no se presenta a pesar de esperar encontrarlo),
3. de grados o comparativas (casos en los que se halla en diferentes grados, esto es, aumenta o disminuye).

El trabajo inductivo comienza con el análisis de las tablas. La primera fase es negativa y consiste en excluir los casos anómalos. La segunda, positiva, consistirá en elaborar una primera hipótesis provisional con valor orientativo a partir del residuo no eliminado en la fase negativa. Es lo que llama primera vendimia.

En un tercer momento se pone a prueba la hipótesis de la primera vendimia en sucesivos experimentos a los que da el nombre de instancias prerrogativas. Establece hasta veintisiete tipos distintos: solitarias, migratorias, impresionantes, clandestinas, constitutivas, manipulares, conformes, del divorcio, de la puerta, policrestas (o de uso general), analógicas..., la más importante es la crucial que permite resolver la duda sobre cuál entre dos o más causas del fenómeno es la real. La veintisiete es la magia que se caracteriza por la desproporción entre la causa material o eficiente, pequeña o insignificante, y el efecto producido. La de la lucha, que hace referencia a los diversos movimientos o virtudes de los cuerpos, presenta diecinueve variantes según la índole del movimiento.

El *Novum Organum* no completa esta parte del método, aunque su plan preveía tratar posteriormente otras siete ayudas al entendimiento para la perfecta inducción.

Bacon está exponiendo en esta obra lo que considera un camino seguro para alcanzar un conocimiento cierto y útil de la realidad. Tal como expone Mary B. Hesse, «*una vez aprendido el método, pues, los ingenios de los hombres se nivelan; cualquiera puede hacer ciencia* [10]». La labor del entendimiento se limita a levantar acta de lo que descubramos tras el concienzudo descuartizamiento hecho a la Naturaleza por medio de la observación y la experimentación. Para Bacon, siguiendo a esta comentarista, la naturaleza es finita, al menos en el número de especies, naturalezas abstractas o formas de las cosas, esto es, en los elementos constitutivos últimos de la realidad que son el objeto de la inducción.

4. La búsqueda de la forma

La inducción debe dar por resultado el establecimiento de la «forma». Qué debamos entender por tal es el aspecto más controvertido del pensamiento baconiano y donde su profesión confesada de antiaristotelismo se tambalea.

Manteniendo la terminología aristotélica de la teoría de las cuatro causas, la forma o causa formal del fenómeno es el objetivo y el resultado de la inducción. Para F. Copleston y N. Abbagnano se trata de la ley que constituye una determinada naturaleza. La determinación o descubrimiento de formas «*en general*» compete a la metafísica que así revela las leyes eternas e inmutables que rigen el Universo. A la física, en cambio, le correspondería descubrirlas en los cuerpos concretos, en sus operaciones naturales, concretamente el «*latens processus*», o proceso de cambio que

10. O'CONNOR, D. J., (comp), *Hist. crítica de la Filosofía occidental*, Tomo II, pág. 224.

depende de factores que no son inmediatamente observados por los sentidos, y el «*latens schematismus*» o estructura interna de los cuerpos. Esquematismo latente y proceso latente son los dos aspectos que presenta todo fenómeno natural y ambas cosas son la forma. Luego la forma es:

a. La estructura esencial que individualiza y define un determinado fenómeno natural (la constitución de las cosas).
b. La ley que regula el movimiento de generación o producción del mismo fenómeno (las leyes que gobiernan las cosas).

Geymonat se opone a esta identificación entre forma y ley natural pues «*esta interpretación parece artificiosa y ditada por una excesiva benevolencia hacia el pensador inglés. Contra ella pueden formularse dos objeciones: por un lado, la evidente analogía entre las formas baconianas y las buscadas por los físicos aristotélicos; por el otro, las profundas diferencias entre las formas baconianas y las 'leyes de la naturaleza' en el sentido que la ciencia moderna atribuye a la palabra*[11] ». La incomprensión del carácter matemático de las leyes físicas impide a BACON formular una investigación de los fenómenos en términos cuantitavos; antes bien, la forma surge del examen cualitativo de la composición interna de las cosas (esquematismo latente) y de los íntimos procesos que son la base de esta composición (proceso latente).

Para Crombie, en cambio, forma es sinónimo de ley y bajo esta nomenclatura se encuentra la estructura geométrica y el movimiento. Niega, por tanto, que pueda interpretarse en sentido aristotélico como formas sustanciales y cualidades reales. Bacon es así uno de los primeros modernos en reducir completamente a materia (configuración latente) y movimiento (proceso latente) los fenómenos naturales. La búsqueda de la forma, muy alejada de la búsqueda de las 'naturalezas esenciales' de los escolásticos, debe entenderse entonces como la investigación de las propiedades de los cuerpos a través de la inducción que llevará a las partículas reales, esto es, la configuración latente oculta a la vista pero que será revelada por el método experimental propuesto por BACON.

5. Balance: la aportación baconiana a la nueva ciencia

De la exposición precedente podemos concluir con ciertas garantías que Bacon no realizó ninguna aportación de verdadero interés ni como científico ni como metodólogo. Es cierto que convirtió en pilar fundamental de su método el recurso a la

11. GEYMONAT, op. cit. *Hist. Fil.*, Tomo 2, pág. 105.

evidentes dosis de edificación moral y religiosa, lo que hizo que con el paso del tiempo se constituyesen en el Corpus Hermeticum [14].

La citada influencia corrió posteriormente pareja con el advenimiento del cristianismo, en la época de transición en la que el helenismo primitivo empezaba a alterarse con la profusión de corrientes religiosas y místicas provenientes de Oriente. Asimismo el Corpus Hermeticum recibió transacciones egipcias, griegas y judías. Tenía que ser así, puesto que Oriente no poseía un edificio filosófico sólido parangonable al de Grecia, pudiendo sólo aportar su sentimiento religioso. De ahí la creciente ola de misticismo y de cultos paganizantes vivificados durante el helenismo alejandrino. También hay que añadir que el propio cosmopolitismo característico de Alejandría, facilitó en gran medida el intercambio y difusión de ideas y credos, que más allá de ser contrapuestos, presentaban tan curiosos puntos en común como para no hacerse mutuos préstamos.

El cristianismo triunfa, y viene a suponer el último eslabón en la invasión de ideas orientales en Occidente. Informe en sus dogmas y absorviendo a numerosas sectas en un primer momento, se erige con posterioridad en una doctrina unitaria con pretensiones de dar solución definitiva a los problemas y preocupaciones espirituales que también afectaban al resto de mundo antiguo.

Como una constante en todas las culturas, se tiene el íntimo convencimiento de que la antigüedad es sinónimo de verdad y pureza. Egipto y su religiosidad constituyen el paradigma del misterio iniciático y de la magia. Los sacerdotes egipcios, por poner un ejemplo y según la versión latina de I. Asclepius, se presentan dotados de un poder, capaz de conferir animación a sus estatuas divinas.

Resulta demasiado complejo prefijar la figura real de Hermes. Hombre o dios, su filosofía se presenta revelada por el dios que es su personificación trinitaria [15]. Pero más interesante que dilucidar un asunto tan controvertido como éste, es preferible indicar la conveniencia de hablar de diferentes *tipos de hermetismo,* máxime cuando los entrecruzamientos y herencias recibidas durante siglos impiden reducirlo a uno solo y auténtico. Conviene citar el hermetismo astrológico, basado en ciertas prácticas y en supuestas correspondencias entre los fenómenos celestes y terrestres, y a ser considerado especialmente por los pensadores neoplatónicos renacentistas. El hermetismo tendría como características:

14. Los dos más importantes *Hermética* son el Asclepius, a través de la traducción latina de Apuleyo —aunque hay comentaristas que no estarían de acuerdo con esa atribución— y el *Corpus Hermeticum,* en donde el Pimander sería su primer tratado cosmológico, similar al Génesis bíblico.

15. Dios creador, Dios mundo y Dios hombre, constituyentes de la tríada hermética.

1. Unidad doctrinaria religiosa y filosófica.
2. Principio y ciencia de las correspondencias fundadas en la simpatía de las cosas.
3. Tendencia a la consideración de la individualidad de las cosas, por encima de su ley general.
4. Idea de tiempo cíclico y de unidad del universo.
5. Acceso a la divinidad a través de la oración, la ascesis y la súplica.

Son básicamente estas características las que encenderán la curiosidad y el entusiasmo desmedido en el Renacimiento por este Corpus de sabiduría, fundamentador de todos los conocimientos, y de la armonía universal de la que hablarán Campanella, Bruno y Copérnico.

2. *La Magia*

El tema mágico, consustancial en los albores de la cultura moderna, sirve de cobertura y patrimonio común de la ciencia, irrenunciable para entender la época que nos ocupa. Patrimonio de la ciencia, porque lo que no es accesible al conocimiento científico, sería mágico, pero por ello mismo, antecedería a lo científico (lo no desvelado, lo que permanece oculto, tendría ese sello). Indesligable del Renacimiento, por el consenso al que llegan todos los pensadores que se dedican a su estudio, vislumbrando la revolución científica en ciernes.

La magia, sin embargo, seguirá gravitando una vez consolidado el dominio de lo científico, en un intento por parte de algunos autores, de reducir magia a ciencia. No hay que olvidarse de las veleidades de un Descartes, de las concesiones hilozoístas de Cardano, hasta llegar a Newton, pasando por F. Bacon, que le asegura un puesto en su plan general de la ciencia.

Dejando atrás una época, en la que lo mágico es sinónimo de demoníaco y herético, conviene la fina precisión semántica y terminológica sobre lo que ha de entenderse por magia, en estrecha conexión con lo natural.

Al igual que el hermetismo, la magia sondea en las inmensidades abisales del misterio y de lo oculto, junto con la astrología y la alquimia, sus otras compañeras de viaje. La serie de correspondencias e interdependencias mutuas en el plano de lo natural hacen considerar a los pensadores renacentistas simpatizantes con estas artes, de la existencia de un hilo conductor invisible enhebrando todos los fenómenos y manifestaciones, en forma de secreto mensaje cifrado, expuesto para su traducción y comprensión.

La magia, actuaría como intermediaria operativa entre el hombre y la naturaleza, ya que le permitiría a aquél la puesta en práctica de su poder creador y dominador sobre lo natural, haciéndolo infinito. En este sentido, la magia centraría toda la concepción del hombre con la realidad, al dotarlo de la capacidad generadora y promotora de sus mutuas relaciones.

Ambos aspectos resultaban impensables en su consideración durante el medioevo, en donde uno y otro se negaban y desechaban por su sinonimia con lo diabólico, atentatorio a la fe religiosa, y a sus postulados esenciales. El carácter práctico del que ya hablaba F. Bacon, no dejaría claro ni de qué fuerzas ni de qué formas nuevas se trataría, si bien cabría intuir, como elemento impulsor que es, su potencialidad renovadora.

3. La Astrología

La astrología sería equiparable a la magia por su característica activa y transformadora, si bien habría que distinguir entre su apartado matemático observacional y sus manifestaciones, efectos e influencias. La astrología buscaría esa apoyatura matemática y científica, en suma, para hechos no científicos, al igual que encontraría explicaciones causales para los mismos. Como nos dice E. Garin, la astrología no la podríamos interpretar y comprender desde los presupuestos mecanicistas [16] postgalileanos, puesto que en esa época se propone como una «total humanizacíon de la naturaleza». En ella hay que presuponerle su trasfondo —al igual que en la magia— animista, vivo. Ambas preñan a la naturaleza de un halo espiritual.

Una precisión más sobre la astrología, y por ende, la magia, hace E. Garin. La astrología judiciaria (la astrología «religiosa») no era una mera técnica de pronosticación emparentada con un culto a lo astral más o menos esotérico, sino que incorporaba una concepción de la realidad demasiado notable como para ser pasada por alto. No solamente no desaparecieron los componentes herméticos con el advenimiento de la ciencia moderna, como ya se apuntó antes, sino que tampoco lo hicieron los mágicos y los astrológicos.

4. La alquimia

La alquimia, también juega su papel destacado en el Renacimiento. Su origen, que se remonta al trabajo con el metal de los egipcios junto con teorías gnósticas y neoplatónicas anexionadas con posterioridad (basadas en la concepción de la *materia prima* platónica y aristotélica) aparece solapada con la magia.

Parte de dos supuestos: es un ritual de iniciación mística, y funda toda una simbología esotérica. Si no fuera así pasaría a la categoría de un arte de «supercheros»

16. Op. cit., E. GARIN, *Med. y Renac.*, págs. 133 y ss.

y de «sopladores», que era como se conocía a los que se empeñaban en convertir la destilación de los metales en un negocio rentable.

Este arte de iniciación encaminado a arrebatar la sabiduría a los dioses o a compartirla con ellos, contempla también a la naturaleza como un organismo vivo, que va madurando en sus entrañas sus elementos: el hombre tendría que aprender a combinarlos para controlarla e imponerle sus propias leyes. Y de entre todos esos elementos poder obtener el *elixir de la vida,* la fuente de la eterna juventud.

La alquimia será un elemento detonador en el desarrollo de la investigación, en el estudio y la experimentación natural: *la transformación de la materia.* La finalidad de la alquimia, que no es otra que buscar la unidad interior del hombre trabajando y domeñandola pretende lograr la unidad del cosmos a través del espíritu humano.

Los metales también están vivos y evolucionan como el resto de la naturaleza. Los esfuerzos de los alquimistas por transmutar los metales vulgares en oro o plata supone el intento supremo de convencimiento en la idea de que los astros y sus influencias son los que generan los minerales en el seno de la tierra, por lo que alquimia y astrología estarían asimismo emparentadas.

4. La Academia florentina: Ficino y Pico

El centro de estudios platónicos más renombrado de Italia en el siglo XV fue la Academia de Florencia, fundada en 1459 por Cosme de Médici, por mediación de Pleton (1389-1464), entusiasta de la tradición platónica y neoplatónica.

En 1439, el Concilio de Ferrara, en el que se va a tratar el tema de la reunificación de las iglesias oriental y occidental, se transferirá a la ciudad toscana, y en ella se contará con la presencia de dicho erudito. Este contribuyó a un mejor conocimiento de Platón y Aristóteles, lo que hizo reavivar el calor de las discusiones entre sus partidarios. La postura de Pleton a favor del platonismo fue decisiva para la ulterior dirección filosófica de la cultura no sólo florentina, sino italiana.

Las características de la Academia se centran en la *oposición al naturalismo aristotélico,* versión averroísta; en la *fuerte impronta humanística;* en el *uso de la elocuencia filosófica,* como un arte elegante de discusión de posturas, y en el *intento de conciliación platonismo-aristotelismo.*

El primer pensador renacentista vivamente interesado por los escritos herméticos, y a quien se debe su traducción en Europa fue Marsilino Ficino (1433-1499). Fundador de la Academia florentina, su figura y relevancia es preciso enmarcarla en el contexto de la política de Cosme De Médici, quien recién llegado al poder, muestra sus preferencias incontenidas por la obra de Platón y por la ascesis contemplativa.

El pensamiento de Ficino muestra una progresiva evolución que no podemos pasar por alto. Frente a sus primeros escritos de tono aristotelizante, pronto deriva hacia los marcadamente platónicos, más en consonancia con su pía certidumbre cristiana. Aristóteles representaba al frío científico que solamente se ocupa del único, perecedero y diletante mundo posible, frente a Platón, filósofo de lo trascendente. El mundo aristotélico, lejos de ofrecer esperanza y salvación, no proporciona más que incertidumbre y zozobra, aspectos aquéllos que sí ofrece el mundo platónico.

La vía mediante la cuál accederá nuestro autor a este convencimiento profundo y sincero, será la *traducción y estudio de los textos herméticos* [17], traducciones que siguiendo a E. Garin, se convertirán en auténticos éxitos literarios.

Piensa Ficino que hay una revelación primigenia, perenne, que se reproduce y pervive en todas las religiones; que esa revelación sitúa al hombre y su destino en el contexto de su propia naturaleza creadora, en estrecho parentesco con la de su hacedor, y que la verdad debe de ser buscada en los límites finitos de este mundo, respondiendo así a su llamada oculta e infinita a través del desciframiento —*artístico*— de sus imágenes y símbolos. Mostrando la conveniencia de que el hermetismo sea la doctrina unificadora de todas, da cuenta de sus nexos para el establecimiento de la armonía, que lejos de ser filosófica o física, sería eminentemente espiritual y únicamente alcanzable por esa vía.

Ficino simpatizó con la magia astral, sirviéndose de ella, como médico que era. La magia del spiritus era la forma de apresamiento de las influencias celestes, encerradas éstas en el poder de los talismanes. Distinguió entre magia *simpática* y de *encantamientos,* si bien en el uso genérico de la última fue cauteloso.

De entre todos, el mago por antonomasia en la Academia florentina, anterior al excelso Bruno es Giovanni Pico Della Mirandola (1463-94). Según E. Garin, estamos ante un personaje polifacético y elegante. Humanista, mago, herético y místico; en suma, otra figura peculiar como las hay —pocas— a lo largo de la historia.

Actuó de mediador para conciliar de forma renovada, la antigua tradición con la nueva cultura emergente, complementando a los dos colosos, Platón y Aristóteles. Sus años en Padua (1480-82) le permitieron profundizar en la obra del estagirita, extendiendo su interés hacia sus comentaristas más destacados, mostrando incluso su simpatía por la mística averroísta.

Pero pronto volvió sus miras a Platón, por encarnar los ideales de la aristocracia republicana, de prestigio y elegancia a través del saber. Él es ante todo, un «*espeleólogo*» del saber: busca la verdad, el secreto oculto de las cosas. Ello le conduce a deternerse

17. Op. cit., E. GARIN, *Med. y Renac.*, pág. 142.

también en el estudio de la cábala cristianizada y del hermetismo, y a estrechar sus contactos con Ficino.

Creerá que el secreto que internamente guardan todas las cosas hay que descifrarlo para captar la infinitud de sus modos de expresión y la coincidencia entre números y letras, para así encontrar *la raíz unitaria* que poseen, la ciencia universal de las religiones y las filosofías. En ese sentido se sirve de la cábala, siguiendo dos direcciones: una, de despliegue a través de dicho desciframiento; otra, a través de su replegamiento unitario [18].

No resulta difícil ver en todo ello también la influencia del lulismo y de la magia en general. En su Conclusiones propone entre otras cosas, el valor universal del simbolismo (*«ninguna realidad espiritual descendente, opera por debajo de sí misma sin verlo»*), y la utilidad de un estudio literal del texto sagrado conforme al método cabalístico. También en esta misma obra, y sirva como anécdota a tener en cuenta, pretende sostener que las matemáticas desvirtúan el sentido de las cosas naturales y por tanto, minan el fundamento de la filosofía natural, como también sostendrá Bruno.

Los últimos años de su vida, años de mesura y temple y sin abandonar sus posturas, se hallan próximos a la sistematización crítica, y según nos apunta E. Garin [19] hace un esfuerzo de rigor metodológico de muy amplia repercusión, a través de una obra contra la astrología adivinatoria (*In astrologiam* libri XII), obra que por su novedosa propuesta para la investigación posterior, sienta las bases mismas de la nueva ciencia. En ella, se opuso a la concepción mágica de la naturaleza, desdeñando el determinismo astrológico, que resta libertad a la acciones humanas y a su poder autogenerador. Nuestro autor piensa que todo está gobernado causalmente y que esas causas son enteramente naturales.

Cerramos este apartado de su figura y obra con la mención a su *Discurso sobre la dignidad humana*, en donde muestra la grandeza de la naturaleza humana en su ilimitada transformación. El hombre autocreador, en un proceso *infinito*, se realiza a sí mismo. Pero esa infinitud no se da fuera de él; forma parte de su constitutivo esencial. La infinitud deja de ser atributo de la divinidad para pasar a serlo del humano. El hombre es el *microcosmos* que reproduce a los elementos en su triple armonización —material, orgánica y celeste—, teniendo la posibilidad de ascender al *macrocosmos*, o descender a lo inferior a sí mismo.

F. Yates [20] como corolario, retrata prodigiosamente el significado profundo del Renacimiento, indispensable también para comprender a todos y cada uno de sus inspiradores:

18. Idea de despliegue neoplatónico.

19. Op. cit., E. GARIN *La Rev. cult.*, pág. 191.

20. Op. cit., F. YATES G. B. *y la trad. herm.* pág. 17.

«Todos los grandes movimientos progresistas del Renacimiento obtienen su vigor y su impulso emocional de una mirada retrospectiva hacia el pasado. La concepción cíclica del tiempo entendida como un movimiento perpetuo que arranca de la primitiva edad de oro, en la que dominaban la pureza y la verdad, y avanza a través de sucesivas edades de bronce y hierro, era sin duda alguna la dominante en aquella época y, por esta razón, la búsqueda de la verdad era identificada con la búsqueda de aquel oro primitivo, antiguo y originario del cual eran degeneraciones corrompidas los viles metales de la edad presente y de las inmediatamente anteriores».

No cabe duda de que Pico della Mirandola es, junto con otros autores también destacados, el genuino representante del hombre renacentista empeñado en la búsqueda de la sabiduría, ese oro primordial.

V. El tránsito de la magia a la ciencia: Giordano Bruno

Si hay un autor renacentista que no solamente sintetice en su persona y en su obra las constantes de la época que estamos estudiando, sino también del que se ofrezcan encontradas versiones por parte de los comentaristas, ése es Giordano Bruno (1548-1600). Inscrito de lleno en la *tradición hermético-cabalística,* prototipo del mago renacentista por excelencia y profeta del retorno de una sabiduría perenne, es asimismo ensalzado como un «*uomo singolare del Rinascimento*» y como un contumaz megalómano enardecido de «*furor heroico* [21]». Las versiones más nefastas, no solamente se asientan en estos últimos calificativos, sino que insisten en que sean esos mismos rasgos de su personalidad los que por sí solos justifiquen el desenlace trágico de su vida. En las versiones más benignas, quizá se exagere su verdadera contribución como precursor, de la nueva ciencia, si bien se hace justicia en cuanto se le presenta como un personaje inquietante, enigmático y de vida inestable, pero con un peso específico en la historia del pensamiento.

Siendo su producción bibliográfica lo suficiente amplia y diversificada, como para poder ofrecer una divisoria según las etapas de elaboración de las mismas (hay que pensar que ésta también se halla en función de los países por los que pasó), nos centraremos en el asunto fundamental alrededor del cuál gravitan, tanto las diversas influencias ejercidas sobre su obra, como los diferentes apartados de la misma: la magia.

1. El arte de la memoria

El método mnemónico, ya empleado por los oradores romanos, y con una larga tradición durante toda la Edad Media, se puso de moda entre los neoplatónicos

21. Según el símil que recoge Yates, del título de una de las obras de G. Bruno.

renacentistas y los herméticos. Mediante la memorización por analogía con imágenes y siguiendo un orden de sucesión entre las mismas, los oradores recordaban los aspectos fundamentales de sus discursos. Igualmente, mediante la impresión de esas imágenes, los renacentistas presuponían el *orden cósmico* y el *acceso al conocimiento* profundo del universo.

Bruno desde su llegada a París en 1581, —huyendo del recrudecimiento civil entre católicos y calvinistas hugonotes en Tolosa—, atrae la atención sobre dicho arte a través de las numerosas conferencias que le solicitan,llegando incluso a suscitar el interés de Enrique III. En el *Umbris idearum* publicado al año siguiente, y dedicado al rey francés, expone los aspectos relevantes de lo que será una magia operatoria conducente no sólo a la manipulación y el control mental por medio de imágenes, sino a la aprehensión de la naturaleza y el hombre. El poseedor de tal sistema, estaría por encima del tiempo y tendría capacidad de penetrar en la realidad más allá de sus apariencias [22].

En Francia es decisiva la presencia de la cultura italiana y de las concepciones filosóficas de la religión vinculada a ella. El objetivo primordial de la monarquía era la de hacer prevalecer su poder y dominio por encima de las luchas partidistas religiosas, de ahí que el platonismo francés se alinee con la monarquía y su concepción política de la religión, sirviendo como elemento de cohesión. Por tanto, es fácil entender el interés que en los círculos platónicos franceses ejercía el lulismo y el arte mnemónico, similar al suscitado en Italia.

El libro citado anteriormente será el anticipo de los que escribirá posteriormente durante su estancia en Inglaterra, añadiendo la técnica del *diálogo* [23]. Llama también la atención en este obra, la plotinización que hace de las imágenes, siguiendo el estilo imprimido por Ficino en *De vita coelitus comparanda* y el *De occulta philosophia* de Agrippa [24]. Por último cabe añadir que el libro de Bruno plantea la oposición platónica *luz/tinieblas,* en donde la luz viene representada por el sol naciente de la nueva revelación (Hermes), a la que se haya asociada la filosofía natural «copernicana» y las tinieblas, la posición en contra de dicha revelación fundamental, expresada máximamente en el universo finito aristotélico.

22. Sin embargo hay que señalar que ya Bruno se había estrenado en el arte mnemónico con *De Clavis Magna* la cuál no se conserva.

23. La similitud que existe entre la técnica de diálogo de la obra de Bruno y la de Galileo resulta llamativa. Sin duda debió de ser un recurso expositivo extraído de la lectura de las obras platónicas.

24. Esta última obra es de referencia obligada para comprender la constante mágica de los pensadores renacentistas que tratamos.

Hay que añadir que el arte de la memoria bruniano no solamente está íntimamente relacionada con la filosofía hermética sino influido también por el *Ars Magna* luliano, del que nuestro autor extrae sus componendas teológico-metafísicas, para conservarlo en su acepción puramente lógica.

Ya estando en Inglaterra publica *Explicatio triginta sigillorum y Sigillus sigillorum* (aparecidas ambas antes de 1583, aunque según Yates, no se conserva ni fecha ni lugar de impresión de las mismas), obras en las que sigue profundizando en el arte y por el que es requerido en todos aquellos países que visita.

2. *La cabalística hermética*

Bruno se halla inmerso dentro del floreciente mundo del hermetismo cristiano, de línea católica. Hay que recordar las cautas incursiones ficinianas en el mismo y que resultarán fundamentales para toda una época. Ahora bien, la postura bruniana diferirá de aquél en el sentido y en la dirección a tomar, pues si bien llevará la impronta del insigne florentino, la pasará por el tamiz agrippiano y la radicalizará. Planteará que la revelación del mensaje hermético, tendrá que respetar el aspecto paganizante originalmente plasmado por los egipcios, perdiendo así definitivamente sus componentes cristianos. Piensa Bruno que el cristianismo desplazó a la religión egipcia, sustituyéndola no sólo por el culto a cosas muertas e inaugurando rituales absurdos, sino imponiendo una moral reprobable. Nuestro autor repudia, según Yates, la interpretación cristiana de los escritos herméticos, considerando que la egipcíaca es la más genuinamente adecuada.

En su *Cabala del cavallo pegaseo* (1585), dibuja a los sacerdotes egipcios como magos cabalistas. Sus estudios de cábala los hace originarios de dicha civilización, considerando que tanto hebreos como cristianos tuvieron que beber necesariamente en una fuente que cronológicamente es anterior a ellos.

Otras obras sobre el tema serían *De magia* (1580), y *De vinculis in genere* (1581), obras que siendo anteriores, ya plantean el uso correcto de la simbología cabalística con el objeto de restablecer la intercomunicación entre la naturaleza y Dios, unificando el universo y la mente para así adquirir los poderes mágicos necesarios que conduzcan a la perfecta conjunción con la naturaleza.

Bruno en junio de 1583 viaja a Inglaterra invitado por la embajada francesa en aquél país, gozando no sólo de hospitalidad sino de inmunidad diplomática para la expresión de sus ardientes tesis. Una vez allí, escribe al vicecanciller de la universidad de Oxford, presentando sus respetos y ofreciendo sus servicios académicos. Con motivo de la visita en junio de 1583 del príncipe polaco Alberto Alasco a dicha universidad, el Nolano es invitado a participar en una de las múltiples discusiones públicas organizadas en su honor. Fruto de esas discusiones será la *Cena delle ceneri* (1584), obra de una gran relevancia, que nos define las señas de identidad del autor, y asimismo el exponente decisivo de la defensa del copernicanismo bruniano.

Los comentaristas históricos han cargado sus tintas, sobre el conflicto originado por Bruno en la disputa ocurrida el miércoles de ceniza, en presencia del príncipe, caballeros de la aristocracia londinense y académicos de dicha universidad. Yates desmitifica dicho conflicto, al indicar que más que referirlo a la satirización y al carácter polemista de nuestro autor, hay que circunscribirlo al ambiente académico del momento, y a las circunstancias histórico-sociales de la Inglaterra de los Tudor. Con respecto al primero de los aspectos, Bruno se encontró con un Oxford marcadamente aristotélico, como forma de reacción contra el pasado. Ese nuevo espíritu académico, que había abandonado el espíritu de la filosofía medieval, instaura una mayor rigidez aristotélica, revestida de un humanismo «descafeinado» y exacerbadamente gramatical, para así mejor encajar con el respeto y restauración de la antigüedad,y responder a la premisa primigenia del Renacimiento.

3. Reforma Moral y Religiosa

Las obras publicadas en Inglaterra suelen ser calificadas como morales y filosóficas, estrechamente relacionadas con su misión religiosa hermética. En este sentido, su viaje de Francia a Inglaterra pudo suponerle un encargo político encomendado por Enrique III de Francia: el de favorecer una alianza con Isabel I de Inglaterra en contra de España, que capitaneada por los Guisa, esperaba apoderarse de la corona de Francia. En igual sentido, pujaba por el reinado inglés la escocesa María Estuardo, la única capaz de hacer retornar el catolicismo, cortando de raíz el protestantismo. Quizá Bruno, indica la autora, tuvo la cautela de alejarse de Francia, ante el clima de encrispamiento ultracatólico reinante y así no comprometer con sus posiciones anticatólicas al que había sido su benefactor.

En el *Spaccio della bestia trionfante* (1584), plantea Bruno todo un tratado de reforma moral y religiosa, previa reforma celeste. Propugna una ética en donde desarrollar una magia conducente a la formación de la personalidad social y humana bajo el efecto de los influjos positivos del Sol, Júpiter y Venus. Así se lograría el control y amortiguacíon de los negativos, dando consistencia a una religión «egipcia» o hermética, procuradora de la salvación en los órdenes *cosmológico, humano* y *político.* Yates afirma que numerosos estudiosos del tema han captado el ramalazo mágico de su pensamiento, con elementos de reforma religiosa. Lo que no le queda claro es si esa misma reforma, la quería llevar a cabo Bruno a travës de la magia.

También cabe ver en esta obra similitudes con la *Ciudad del Sol* campanelliana o la *Utopía* de T. Moro en cuanto al planteamiento de una reforma moral como sinónimo de social.

Cuando Bruno visita por segunda vez Francia, ya no encuentra la acogida que originariamente le habían dispensado unos años antes. Denostado Enrique III, las miras están puestas en Enrique de Navarra, que posteriormente se convertirá en el triunfador de las guerras de religión de la Liga católica, hecho que por sí solo acabó con la incipiente tradición renacentista francesa. La conversión al cristianismo del que luego será Enrique IV, agotará las esperanzas de Bruno. Pensaba que el advenimiento al trono de Enrique IV podía haber significado la apertura en materia religiosa, por lo que decide regresar a Italia. Los pasos dados también por Clemente VIII le servían de buen augurio en tal dirección [25]. No se percató el Nolano de que sus aspiraciones nunca se cumplirían, y de que las mismas se le volverían en contra, siendo decisivas en su condena.

4. El principio de animación universal

Ya en su primera estancia en París da Bruno lecciones sobre el *De anima* aristotélico, si bien en el *De umbris idearum* amplía el tema, presentando la jerarquización ontológica Uno-Mens (ideas)- Anima-Corpus (materia) unido con el tema del cielo. Este sería, el Alma por excelencia.

La fundamentación naturalista del universo básicamente la hará palmaria en la Cena delle ceneri, en donde heliocentrismo y movimiento terrestre serán los exponentes canónicos de la animación. Para Bruno,el universo es un animal, un ser vivo dotado de alma:

> «...este infinito e inmenso es un animal (...) porque tiene toda el alma en sí y comprende todo lo animado (...) Siendo el mundo un cuerpo animado, hay en él una infinita virtud motriz e infinito sujeto de movimiento [26]».

Aparte de dotado de vida, como vemos en el texto, es causa del movimiento. Por tanto, la Tierra se mueve porque está viva, confirmando así el principio geodinámico que ya se expresa en el Corpus Hermeticum. Pero también confirma el componente platónico, sustituyendo por innecesaria la teoría del Primer Motor aristotélico.

> ... Todo es causado por el principio interior suficiente, por el cuál viene a moverse de forma natural y no a partir de un principio exterior. La Tierra, por

25. Clemente VIII acogió con su benevolencia a algunos hermetistas religiosos como Patrizzi.

26. *De infinito* págs. 431 y ss.

tanto, y los otros astros se mueven, según las propias diferencias locales, a partir del principio intrínseco que es su propia alma [27].

Para reforzar el movimiento terrestre indica:

— Puesto que en la naturaleza no hay nada sin providencia y sin causa final, me gustaría que me dijérais cuál es la causa del movimiento local de la Tierra (Smith).

— La causa de dicho movimiento es la renovación y el renacimiento de ese cuerpo (Teófilo) [28].

Esta obra contiene el núcleo fundamental de la filosofía bruniana y de su defensa del copernicanismo, sobre la que gravita su reforma moral, política y religiosa, y en donde estatúa las tesis de la infinitud del universo, y el principio de animación universal. *De l'infinito universo e mundi* (1584); *De inmenso, innumerabilibus et infigurabilibus* (la tesis de la innumerabilidad de mundos); *De triplici minimo et mensura; De monade numero et figura* y *De la causa, principio et uno,* amplían dichas tesis y las complementa con las del binomio Todo-Uno, el Maximum-Minimun y la del Intellectio interna.

Asimismo muestra una tremenda similitud por estar estructurada en forma de diálogos con su homónima galileana de *Dialogo di massimi sistemi del mondo,* en donde, Teófilo, es el portavoz bruniano; Prudencio y Frulla son los pedantes (aristotélicos en la de Galileo) y Torcuato y Nundinio son los prudentes, representados por los doctores oxonienses (como el Salviati galileano).

El libro de Copérnico aparece en 1543, irrumpiendo de lleno en el problema cosmológico, que es presentado por los primeros copernicanos bajo un prisma platonizante. Es precisamente en ciertos círculos de intelectuales aristocráticos ingleses, donde prende la avidez por el copernicanismo, como reacción a la postura recalcitrante de la academia oficial, que había abandonado los aspectos más interesantes de la vieja tradición oxoniense, para sustituirla por la aristotélica gramatical, satisfaciendo asimismo la platonización. Ahora bien, ni como matemático ni como aristotélico, Bruno presenta la «nueva buena» del copernicanismo, ya que su misticismo se halla lejos tanto de una tendencia como de la otra.

Piensa que los matemáticos son *simples mensajeros* que informan superficialmente de los hechos celestes, pero que no dan cuenta de su trama profunda. Así, los filósofos serían los únicos capaces de apreciar el sentido de los descubrimientos

27. *La Cena,* III, pág. 125.

28. *La Cena,* V, pág. 160.

astronómicos. Al mismo tiempo, rechaza la idea platónica de la regularidad y uniformidad matemáticas de los movimientos celestes:

> «Al igual que no se ha visto ningún cuerpo natural absolutamente redondo y dotado, en consecuencia,de un centro absoluto, de la misma manera también en los movimientos sensibles y físicos que vemos en los cuerpos naturales, no hay ninguno que no difiera en mucho del movimiento absolutamente circular y regular en torno a algún centro... [29]».

Convencido de la irregularidad celeste del movimiento, postula la libertad de los cuerpos celestes en sus circularidades, ya que al no obedecer a leyes matemáticas sino biológico-anímicas, les mueve su propio apetito, su propia libertad. El movimiento y la vida son sinónimos; por tanto, no hay cuerpos en absoluto reposo.

El operar matemáticamente es un mero pasatiempo; el discurso matemático y el natural no coinciden:

> «... Rayo reflejo y directo, ángulo agudo y obtuso, línea perpendicular, incidente y plana, arco mayor y menor, tal y cual aspecto son circunstancias matemáticas y no causas naturales. Una cosa es jugar con la geometría y otra verificar con la naturaleza [30]».

Bruno presenta el copernicanismo como una señal anunciadora del retorno de la buena tradición, de lo antiguo merecedor de ser rescatado y conservado, en la misma línea por la que se hizo prestigiosa la universidad de Oxford. De ahí también el significado de su «choque» con los «pedantes» gramáticos y su alineamiento con la progresía de los «prudentes».

A la teoría heliocéntrica copernicana, unió Bruno su idea de infinitud universal y de innumerabilidad de mundos. Ya la idea de infinitud aparece en Cusa; en Bruno está basada en el principio de plenitud. Como cabe observar, guarda estrecha relación con la concepción biocosmológica anteriormente reseñada, y lo que es más importante, acaba con un universo de privilegios y de jerarquías en sentido aristotélico. Hay claves teológicas en el concepto de infinitud bruniano: como Dios es infinito, el mundo también lo es. Dios es causa del mundo; por consiguiente, sus efectos reflejan lo divino, y por tanto, la infinitud de sus atribuciones. Si el mundo fuera finito, nos dice el Nolano, desmereceríamos las propias capacidades de Dios.

Infinitud como sinónimo de magnitud, en donde se ubica la innumerabilidad de mundos celestes. No hay duplicidad de mundos en sentido aristotélico, dos regiones supra o sublunar, sólo multiplicidad, porque:

29. *La Cena*, III, pág. 126 y ss.

30. *La Cena*, III, pág. 155.

> «Necesita dar una imagen infinita del inaccesible rostro divino, en el cuál, a modo de infinitos miembros, puedan encontrarse los innumerables mundos [31]».

La plenitud viene dada en el sentido de que Dios en su infinitud, llena el mayor espacio posible con el mayor número y mayor variedad posible de formas. De ahí la innumerabilidad de mundos. Se acaba con la existencia de los dos mundos aristotélicos, en cuanto distinguibles y diferenciados en su cualidad material. Bruno se muestra monista físico, cuando indica que las diferencias entre mundos son debidas a sus dimensiones. Todo el universo es igual a sí mismo: las posibles diferencias lo son de y en extensión (cantidad) no en cualidad. La extensión es sinónimo de sabiduría, en sentido lucreciano. Siendo el Todo lo infinitamente extenso es también lo Uno, mostrándose inmanentista al mismo tiempo.

> «El sumo bien, lo supremamente apetecible, la perfección y la beatitud supremas consisten en la unidad que informa el Todo. Loados sean los dioses, y sea magnificada por todos los seres vivientes la infinita, simplísima, única, altísima y absolutísima causa, principio y uno [32]».

El Todo en su infinitud extensa es Uno. Lo Uno infinito causal se manifiesta en la multiplicidad infinita de efectos. Esa múltiple y plural manifestación es el paso intermedio para su unidad posterior, unidad que se da en el tiempo.

La infinitud al mismo tiempo, tiene que estar presente en cada una de las cosas finitas, teniendo éstas el germen de su propia infinitud. Esta, no hay que olvidarlo, no es numérica, matemática —como ya lo hemos visto—, sino teológica o si se prefiere, cosmológica.

La mens o intelecto refleja la inmensa extensión del universo, absorviendo así la divinidad infinita. Lo inmenso y lo innumerable son los «irrepresentables» que se plasman interiormente para satisfacer la «infinita» necesidad de infinitud que tiene el alma. Lo infinito se convierte en sinónimo de conciencia (intellectio interna) en el sentido de Tomas de Aquino, interiorización de lo exterior. El intelecto representa y simboliza el propio principio del que parte, la *naturaleza,* produciendo la conciliación entre lo micro y lo macro, o lo que es lo mismo, el minimum y el maximun.

Bruno distingue entre este concepto y el de límite (terminus). Por ahí, cree comienzan los errores de los matemáticos al no distinguirlos y fallar en su clarificación. Por tanto *«el minimum y el límite no pueden ser considerados como si se tratase de cantidades* [33]». El límite no es parte integrante entre dos mínimos, sino que dispone

31. *De Infinito,* Diálogo I.

32. *De la causa,* V, pág. 341-342.

33. *De triplici minimo,* I, pág. 180.

de su propia entidad, a la manera de la «plenitud» y el «vacío» de la atomística antigua. La concepción bruniana de minimum difiere de aquélla en que cualitativamente difieren y se distinguen los mínimos entre sí, no dándose entre ellos la igualdad.

En consecuencia, el concepto de minimum, nos indica E. Cassirer [34] atisba el cálculo infinitesimal, al relacionarse con el número discreto. El intelecto en su unidad agrupa la «mensura» y la «mens». Se podrá concebir conceptual, relacional, cualitativamente sin la extensión. El minimum bruniano es extenso sensiblemente pero se funde intelectivamente en el todo. Se observan aquí los anuncios de la *mónada* leibniziana, previa concomitancia con los átomos democriteos y en suma, con el pitagorismo esencial.

El resto de la historia de Bruno es sobradamente conocida. Vuelve a Italia, animado por los indicios que cree atisbar sobre la inminencia de la unificación religiosa y política en Europa, pretendiendo poder minar el principal bastión de la ortodoxia católica. El nuevo papa le inspira confianza y el noble Mocenigo le ofrece protección, reclamando con insistencia su docencia particular en agosto de 1591. Tiene incluso el Nolano la intención de publicar un libro en dedicatoria exclusiva al papa Clemente VIII, para hacer extensibles a éste, la bondad de sus tesis y sus ideas reformistas, pero sus planes quedan frustrados por la denuncia de su benefactor. Sufre proceso en Venecia, en donde niega todas las herejías que se le imputan, pero las actas del mismo, pasan a Roma. Ocurre esto en 1592 y durante siete años, ya encarcelado por el Santo Oficio, se intenta aclarar la situación, con vistas a una nueva retractación. Al no producirse ésta, es entregado al brazo secular y condenado a la hoguera en el Campo de'Fiori en Roma, el 17 de Febrero de 1600.

Llama la atención que no se conserven las «ocho proposiciones heréticas» objeto de su condena. Lo que sí se conoce históricamente son los interrogatorios contenidos en el Sommario acerca de la *infinitud del universo, la creación del alma del hombre, la naturaleza angélica de las estrellas, la animación de la Tierra, el movimiento terrestre* y *la innumerabilidad de mundos,* aspectos todos ellos referidos a los problemas teológicos, materias disciplinares, a sus contactos con personajes y países, etc.

Yates afirma que su condena máxima radica en la defensa del movimiento terrestre, pero por motivos diametralmente opuestos a los de Galileo. El clima que le tocó vivir, comparado con el de este último autor es diferente, sin «intenciones pitagóricas» ni «sellos herméticos». Bruno no fue condenado por su filosofía; lo fue por su *actitud* ante un estado de cosas que desde el punto de vista político y religioso en nada favorecían a sus sinceras demandas.

34. Op. cit., E. CASSIRER, *El prob. del con.*, pág. 436.

5. Balance: La aportación bruniana a la nueva ciencia

Las exégesis de su obra, en su alcance y significado se muestran contradictorias, pero las podríamos clasificar en *tres grupos:*

1. Las que ofrecen una visión positivista (partidario de la experimentación y la observación empírica), en cuanto que Bruno sería presentado como precursor de la modernidad científica, al adelantar con su defensa del copernicanismo y la infinitud los temas que serán recurrentes en los próximos siglos y en todo el desarrollo de la ciencia en sus diversas disciplinas; también moderno en lo referido al talante, la lucha por los derechos y la independencia ostensible del pensamiento, en una época de estrechez intelectual, por la que sufrió y se convirtió en el mártir del lastre oscurantista del Renacimiento. En esta órbita se inscribirían autores como E. Namer, E. Hirchsberger, entre otros.

2. Su contraria, la antipositivista en donde se destaca su *rechazo a la matematización y el experimentalismo,* nada acorde con la línea que demarcarán los «revolucionarios» científicos en puertas. Tendríamos aquí representada la postura de E. Mc Mullin y de F. Yates, si bien en sus estudios no se alinea e identifica enteramente con esa posición, diríamos que ocuparía una postura intermedia al ofrecer una visión de historia social de la ciencia y del pensamiento a la hora de enfocar al autor, en el amplio contexto de la tradición hermético-mágica del Renacimiento.

3. La visión metafísica haría hincapié en los *aspectos místicos-platónicos* referidos a la teoría del conocimiento implícita del autor. Sería su representante E. Cassirer, el cuál presenta las repercusiones que en el plano de lo epistemólogico aporta Bruno en su interpretación naturalista. Copleston, como ya vimos en la Introducción, delimitaría los científicos de los filósofos naturales, aunque de forma indirecta.

Cierto y evidente se hace la defensa e inscripción en el marco de la tradición mágico-hermética del Renacimiento en un sentido no cristiano; también es notorio su alejamiento del experimentalismo y el mecanicismo. Ahora bien —y lo que es muy importante— Bruno no pretende una generalización del copernicanismo puesto que:

1. Pensaba que la Tierra y la luna giraban en el mismo epiciclo, al igual que lo hacían Mercurio y Venus;

2. Su conocimiento de las matemáticas si no insuficiente, si era espúreo (no proporcionaba un verdadero conocimiento de la realidad);

3. Niega el movimiento circular en sí mismo e introduce el principio de animación universal (¿versus caos?)

4. Atribuye alma a los astros como causa «prima facie» del movimiento.

Resulta coincidente asimismo su caso con el de su homólogo Galileo: los dos desafiaron a la ortodoxia de la Iglesia católica y defendieron a ultranza su libertad de pensamiento. También hay concomitancias con la época histórica compartida por ambos: las postrimerías del Renacimiento, el ultraconservadurismo político y religioso. Fueron víctimas de una política contraria a los Habsburgo, profrancesa e integradora en el segundo de los aspectos, hechos que por sí solos se consideraban heréticos.

Difieren en su interpretación de la obra de Copérnico: uno con el objetivo de reforma moral y religiosa; otro, para delimitar su concepción de la de Aristóteles. Bruno es tanto un «protogalieano» como un «galileo fallido» al faltarle base científica; aunque para ambos el universo aristotélico, era sinónimo de inmovilidad y cerrazón.

Conclusiones

El recorrido por la Filosofía natural de Renacimiento presenta claves y constantes teóricas e históricas que la ubican como un período de transición necesario para el desarrollo científico y cultural posterior. No reconocer las fructíferas cosechas en la tradición empirista inglesa, a través de Bacon, o en las primeras incursiones teóricos matemáticas de Kepler y Galileo, a través de Bruno, con todos sus matices, sería no hacer justicia a esta etapa del desarrollo del conocimiento tratada en estas páginas.

Si fuéramos a balancear por autores, la *reducción naturalista* de Telesio, su afirmación de la materialidad del mundo, incluso del alma, le convierte en un moderno. Dirá que la naturaleza es uniforme y el modo de acceso a su secreto será la sensibilidad. Pero no cabe afirmar su cientificidad, por no ser un constructor de teorías sino un artesano del *dato,* un recopilador de evidencias observacionales. Recupera aquella antigua tradición presocrática cuando filosofía y ciencia se identifican en el descubrimiento de la lógica del cosmos. Pero lo hace pasados más de veinte siglos, con las mismas intuiciones geniales y la misma ingenuidad de Empédocles, y sólo a unas decenas de años de distancia de Galileo el gran legislador matemático de la mecánica.

F. Bacon aporta a la concepción del mundo moderno su orientación *pragmática.* El ideal de sociedad tecnocrática ya aparece reflejado en su *Nueva Atlántida.* Y no fue poco mérito el suyo alinearse en posiciones favorables a la nueva mentalidad científica, pues el apoyo de un Canciller de Inglaterra constituyó un hito nada despreciable en el camino que conduce hacia su predominio actual. No obstante, su concepción del método, aunque lastrado por el pasado, sigue presentando una determinación cualitativa. Este mantenimiento del arcaísmo se manifiesta en su escasa visión del papel de las matemáticas y su incapacidad para valorar el copernicanismo y sus revolucionarias consecuencias, y tambíen se refleja en el mismo predominio de la *utilidad,* su aportación propia y positiva, donde Bacon no separa claramente las nociones de tecnología en sentido moderno, y de magia natural.

De los excelsos Ficino y Pico destacar su sincero afán por comprender y conciliar en clave cristiana los signos del pasado y del presente, perpetuados en la búsqueda del sentido original de la sabiduría divina, para, una vez asida, poder comprender la natural.

En Bruno reseñar el debate abierto sobre su directa y/o decisiva coparticipación en la revolución científica traducida en la defensa del copernicanismo. Además, la ruptura del dualismo clásico en su defensa del monismo físico (sustancia unitaria), o lo que es lo mismo, las leyes del ser que no de la naturaleza en sentido matemático, procedimiento por el que se desplaza la razón de ésta por la razón ontológica. Su rompimiento definitivo con el pensamiento medieval, aunque salvando sus aspectos más valiosos, le hace justicia, si bien su carencia de analiticidad le condena para la ciencia. La matemática, auténticamente mediadora en la explicación de la naturaleza, es sustituida, por la magia.

No se nos puede olvidar lo espinoso de la época histórica por la que transitan todos los autores estudiados, época de grandes cambios en Europa, de luchas fraticidas en lo político y lo religioso, la facción filoespañola que amenazaba por igual a la corona inglesa y francesa; la reforma de Lutero y Calvino, el debilitamiento del poder papal en favor de nuevas formas de organización social que culminarán en el estado moderno.

En suma, una época que nos sitúa en los estertores de un Renacimiento que fenece, por no poder dar más de sí y ceder el testigo dignamente a la modernidad.

Bibliografía

Abbagnano, N. *Historia de la filosofía,* vol. 2, Edt. Hora, Barcelona 1981.

Bacon, F. *Novum Organum,* Fontanella, Barcelona, 1979.

Bruno, G. *La cena de la cenizas,* A. Universiadad, Madrid, 1987.

Bruno, G. *Sobre el infinito universo y los mundos,* Edt. Aguilar, Buenos Aires, 1972.

Burckhardt, J. *La cultura del renacimiento en Italia,* Edt. Escelicer, Madrid 1941.

García Estebanez, E. *El Renacimiento: humanismo y sociedad,* Edt. Cincel, Madrid 1986.

Cassirer, E. *El problema del conocimiento,* Edt. FCE, México 1965.

Copleston, F. *Historia de la filosofía,* tomos 1 y 3, Edt. Ariel, CROMBIE, A.C. *Historia de la Ciencia: De San Agustín a Galileo /2. Siglos XIII-XVII,* Edt. Alianza Universidad, Madrid 1980.

Gandillac, M. *De Historia de la Filosofía: la filosofía del Renacimiento,* Siglo XXI edt., Madrid 1974.

Garin, E. *La Revolución cultural del Renacimiento,* Edt. Grijalbo, Barcelona, 1981.

Garin, E. *Medioevo y Renacimiento,* Edt. Taurus, Madrid, 1981.

Geymonat, L. *Historia de la Filosofía y de la Ciencia,* tomo 2, Edt. Crítica, Barcelona 1985.

Grant, E. *La ciencia física en la edad media,* Edt. FCE, México 1983.

Rupert Hall, A. *La revolución científica. 1500-1750,* Edt. Crítica, Barcelona 1985.

Harre, R. *El Método de la ciencia,* H. Blume ediciones, 1979.

Hirsberger, G. *Historia de la Filosofía,* TOMO I. Edt. Herder, Barcelona, 1981.

Hull, L.W.H. *Historia de la filosofía y de la ciencia,* Edt. Ariel, Barcelona 1973.

Jaeger, W. *Aristóteles,* Edt. FCE, Madrid 1983.

Koyré, A. *Estudios de historia del pensamiento científico,* siglo XXI edt., Madrid 1977.

O'connor, D.J. (Comp.) *Historia crítica de la Filosofía occidental,* tomo II La filosofía en la Edad Moderna y los orígenes del pensamiento moderno, Edt. Paidós, Buenos Aires 1964.

Westfall, R.S. *La construcción de la ciencia moderna,* Edt. Labor, Barcelona 1980.

YATES, F. *Ensayos reunidos I: Lulio y Bruno,* F.C.E., México, 1990.
YATES, F. *G. Bruno y la tradición hermética,* Edt. Ariel, Barcelona 1983.

LOS ORÍGENES DE LA REVOLUCIÓN CIENTÍFICA

Ángeles Gutiérrez Martín
Profesora de Filosofía
I. B. Villalba Hervás
Miguelina Quintero Barrera
Licenciada en Filosofía

Buscar una explicación sencilla y lineal al cambio paulatino del pensamiento europeo que va desde finales del siglo XV al XVII y que supone pasar del medioevo a la Edad Moderna sería ingenuo e imposible. El desarrollo de la ciencia, como todo proceso histórico, no es simple. Se debe, más que a una suma, a la compleja combinación de múltiples elementos.

Nuestro trabajo se centrará en el terreno de la astronomía, que aun siendo sólo uno de los diversos campos en que se producen cambios, tiene un papel relevante en este entramado. Y abordaremos esta ciencia a partir del intento de revisión del modelo astronómico medieval que culmina con la propuesta heliocéntrica de Copérnico y los comienzos de la astrofísica por parte de Kepler.

1. Los orígenes de esa llamada «revolución»

Existen discrepancias a la hora de señalar cuándo empieza la Revolución Científica (RC en lo que sigue) y si este término de «revolución» puede ser el adecuado para referirse a ella [1], toda vez que la misma no se produjo de forma brusca sino

1. Según Cohen, antes de la Revolución Francesa se usaban dos sentidos para referirse al término «revolución»: uno que implica un cambio radical, una ruptura de la continuidad; otro que supone evolución, fenómeno cíclico. A partir de 1789 predominará el primer significado de «revolución». Cohen, 1983, pp. 58 y ss.

que fue consecuencia de una serie de ideas y condicionantes de diverso tipo que se habían ido desarrollando sobre todo en la Alta Edad Media, más concretamente en el siglo XIV. Como señalan algunos autores, el origen de la RC permanece oscuro y debe hablarse de una multicausalidad de factores. Sea como fuere, asumiremos este término para referirnos al período conocido como RC que los autores dan por empezado en 1543, con la aparición de la obra de Copérnico *De revolutionibus Orbium Coelestium* y la de Vesalio *De humani corporis fabrica*, y que finaliza con la publicación de los *Principia* de Newton en 1678.

Sin embargo, no hay que olvidar que estos límites señalados no son más que convenciones y que no establecen distinciones tajantes entre sus antes y después; téngase en cuenta que perdurarán elementos medievales a lo largo del período que vamos a estudiar, al tiempo que elementos nuevos aparecen ya en la Edad Media.

El siglo XIV, por ejemplo, es relevante en la medida en que supone un siglo de crisis, o mejor de crítica, a lo asumido hasta entonces [2]. Mientras que en el siglo XIII se pretende ante todo hacer grandes síntesis filosóficas, el XIV, en contrapartida, deriva en la crítica de esas síntesis pero desde sus propias bases, intentando revisar el sistema aristotélico sin aportar nada nuevo. Estos autores críticos desean hacer una interpretación de la naturaleza desde la perspectiva del verdadero Aristóteles, evitando así la parcialidad impuesta por sus intérpretes posteriores. De ahí el interés por retomar los originales griegos para su estudio y el auge que tendrá la lengua griega y todo lo referente a la cultura helenística durante este siglo y, sobre todo, en el XV.

Recordemos algunos autores ya expuestos en este Seminario como Ockam, Buridán u Oresme, que representan un patrón de crítica a lo establecido y asumido a través de los siglos.

Por ejemplo, Ockam dio el primer paso hacia el principio de inercia que iba a revolucionar la Física del siglo XVIII; Buridán, que también estudió los problemas clásicos del movimiento, formula la teoría del «impetus» [3], para explicar los diferentes fenómenos del movimiento constante y acelerado, mostrando un precedente claro de cómo se pueden homogeneizar los mundos supra y sublunar, sentando así las bases que permitirán aplicar los cálculos del movimiento globalmente. Por su parte, Oresme nos muestra el estudio más esmerado sobre la rotación diaria de la Tierra que se había realizado desde los astrónomos griegos, aun cuando no afirme como real

2. No podemos tampoco olvidar el siglo XII, de interés tanto por una cierta revolución tecnológica que se da en su seno como por la construcción de las primeras Universidades laicas.

3. Esta teoría del «ímpetus», lo mismo que la teoría anterior de la «virtus impresa», se basaba sobre los principios aristotélicos de que todo movimiento requiere un motor y de que la causa debe ser proporcional al efecto.

el movimiento de ésta. Oresme presenta argumentos a favor de dicho movimiento para llegar a la conclusión de que tan demostrable es hablar de una Tierra en rotación como de lo contrario. Crombie opina que el estilo de la obra de Oresme anticipa las obras polémicas de Galileo [4].

Las especulaciones astronómicas de Nicolás de Cusa se conectan con las filosóficas, mezcla de neoplatonismo y misticismo cristiano. Según Cusa el universo es infinito en extensión y, si esto es así, ni tiene centro ni es una circunferencia. Supone que el movimiento es natural a todos los cuerpos, por tanto la Tierra no puede estar desprovista del mismo. También señala que tanto la Tierra como el Sol y los cuerpos celestes están constituídos por los mismos elementos (homogeneidad del universo) y sólo difieren en la forma y proporción en que se mezclan. No habla del movimiento de traslación.

Dreyer sostiene que estas opiniones de Cusa no representan un avance en astronomía ya que las mismas se emiten sin consideración a observaciones astronómicas y además son generalidades sin mayores precisiones.

En los siglos XV y XVI el desarrollo del Humanismo supondrá una vuelta a los clásicos y una crítica a la Escolástica. En este sentido, mientras algunos autores proponen que los humanistas demostraron un escaso interés científico, volcándose más en cuestiones filosóficas, otros señalan que el Humanismo fue un propulsor de la ciencia, ya que el platonismo, que viene de la mano de estos humanistas, a pesar de que derivó en cuestiones teológicas y místicas, ayudó también indirectamente a que las matemáticas jugaran un papel fundamental en el desarrollo de las ciencias. Además esta corriente es importante por otra razón: fue cambiando la visión de la relación hombre-naturaleza y, en este aspecto, el mundo dejaba de ser un «valle de lágrimas y de pecado» para convertirse en un lugar donde el hombre podía gozar y hacerse mejor. De esta manera se llega a la idea de que hay que conocer el mundo y manipularlo [5].

Existía un conjunto de problemas que ocupaban a los astrónomos renacentistas que desencadenarán a la larga la revolución copernicana. Problemas que iremos citando en lo que sigue.

El descubrimiento de América provoca la necesidad de precisar los límites geográficos y mejorar el arte de la navegación, ya que para los viajes oceánicos la orientación marítima requería unos mapas estelares más exactos.

En el siglo XV el modelo ptolemaico mantenía su vigencia con todos los añadidos y correcciones que a lo largo de más de 1000 años habían hecho los astrónomos-

4. Crombie, 1985: pp. 75.

5. Francis Bacon (1561-1626) defendió con insistencia la idea de que la ciencia debe tener un objetivo práctico y estar al servicio del hombre.

astrólogos árabes y medievales. Se seguía aceptando como un constructo geométrico que permitía una cierta explicación y predicción de lo observado, aunque todos sabían que la concordancia entre el Almagesto y lo que acontecía en el firmamento no era sino aproximada. En el siglo II cuando vivió Ptolomeo tal concordancia era grande, pero iba empeorando con el correr del tiempo, como lo evidenciaban las nuevas observaciones. Ya los árabes empezaron a corregir y completar la obra ptolemaica, seguidos después por los sabios europeos [6]. Las correcciones introducidas se limitaban a pequeñas modificaciones numéricas de magnitudes concretas tomadas de Ptolomeo (longitud, año trópico, inclinaciones de la eclíptica, etc.); los agregados en cambio consistían en incorporar nuevos círculos y circulillos al sistema de «excéntricas y epiciclos».

El mecanismo de movimiento de los cuerpos celestes se volvía por consiguiente cada vez más complicado y confuso, creciendo al mismo tiempo las divergencias entre los astrónomos, porque mientras unos aceptaban cada «corrección», otros las rechazaban o introducían las suyas propias. La astronomía teórica se sumía cada vez más en el caos y las observaciones demostraban a cada paso la falta de conformidad entre las tablas astronómicas y el cielo.

Había un deseo cada vez mayor de elaborar una cosmología acorde con el sistema ptolemaico. La dicotomía establecida entre sistema físico verdadero y sistema calculístico iba convenciendo cada vez menos a diversos autores que se veían en la necesidad de encontrar un sistema que, al tiempo que predijera, explicase también cómo es el mundo en realidad.

Gracias a Peuerbach y Regiomontano la teoría de Ptolomeo (osificada y dogmática) adquiere más rigor. Insatisfechos con las viejas traducciones leen directamente del original. El descubrimiento y estudio de las versiones originales griegas hacen ver que las posibles ineptitudes de Ptolomeo ya no se pueden achacar a errores en las traducciones.

Peuerbach (1423-1461) escribió *Theoricae Novae Planetarum*, una de las más claras y concisas exposiciones de la obra ptolemaica. Es un intento de dar una interpretación cosmológica de Ptolomeo evitando las incongruencias que se derivaban de la teoría de la doble verdad. En esta obra reunió en una explicación más comprensible las esferas sólidas con las explicaciones geométricas, dejando entre aquellas sufi-

6. En el siglo X Jabir de Sevilla criticó seriamente el sistema geocéntrico, pero su crítica estuvo dirigida sobre todo contra los datos numéricos que describían este sistema. En el siglo XIII, Alfonso X reunió a los 60 mejores astrónomos árabes y judíos encomendándoles elaborar nuevamente todos los datos conocidos hasta entonces. Se confeccionaron así las *Tablas Alfonsinas*, que proporcionaban muchos datos pero no explicaciones de porqué ciertas magnitudes —anteriormente aceptadas— se habían cambiado por otras.

ciente espacio para permitir el sofisticado juego de excéntricas y epiciclos de cada planeta, de manera que la predicción fuese posible. Peuerbach descubrió la ventaja de utilizar senos en lugar de cuerdas y compuso una tabla de senos para cada 10 grados [7]. Colaboró también en una revisión de las Tablas Alfonsinas.

Regiomontano (Johannes Müller, 1436-1476), discípulo de Peuerbach, terminó la obra inconclusa de éste: *Epitome in Ptolemaei Almagestum*. Construyó un observatorio, compiló las *Ephemerides* astronómicas y elaboró las *Tabulae Directorium*, basadas en las Tablas Alfonsinas. Regiomontano escribió un tratado de trigonometría calculando una tabla de senos para cada minuto y una tabla de tangentes para cada grado. Aunque no logró serios avances en teoría planetaria —aceptaba el sistema de Ptolomeo en cada detalle— algunos autores le imputan el descubrimiento de la rotación de la Tierra y por este hecho le proclaman precursor de Copérnico. Esta afirmación se basa en un capítulo del libro de Schoner editado en 1533 que, a juicio de Dreyer, no da pie a tal reivindicación ya que Regiomontano redunda en los argumentos de Ptolomeo que hacen bastante improbable pensar en la rotación terrestre.

Calcagnini (1479-1541) es el único autor del que se sabe con total seguridad que creyó en el movimiento de rotación terrestre antes de que el libro de Copérnico se publicara. En su libro *Quod caelum stet, Terra Moveatur, vel de Perenni Motu Terrae* (publicado en 1544), señala que los cielos junto con las estrellas, no giran en 24 horas sino que es la Tierra la que se mueve y ocupa el centro. Apoyándose sólo en esta premisa intentaba dar cuenta de todo el engranaje celeste. El escrito de Calcagnini es de sólo 8 páginas y hace alusiones a la semejanza de la Tierra con una flor que siempre vuelve la cara al sol. Hacia el final de este ensayo, sin embargo, parece intuir que el movimiento de rotación terrestre no es suficiente para explicarlo todo y señala que también se inclina hacia un lado y otro y que tal inclinación vendría demostrada por los equinoccios y solsticios, el incremento y decrecimiento de la Luna y la longitud variable de las sombras. Maurolico (1494-1575) refuta la opinión de Calcagnini en un escrito completamente medieval.

Otros dos autores, Fracastoro y Amici, intentan ya en pleno final del siglo XV revivir la teoría de las esferas sólidas.

G. Fracastoro (1483-1551), que conoció a Copérnico en Padua, publica en 1538 una obra titulada *Homocentrica* en la que intenta convertir el calculador ptolemaico en un sistema físico verdadero del Universo, con un lenguaje confuso que hace difícil su lectura. El resultado final no es convincente porque para abarcar todas las

7. En los círculos cultos de principios del XVI se conocían perfectamente la trigonometría alejandrina, la trigonometría esférica y la astronomía ptolemaica original.

perturbaciones observadas en los cielos necesitaba de un conglomerado intrincadamente complejo de esferas, 77 en total.

G. B. Amici, por su parte, publica un tratado independiente del de Fracastoro que, aunque escrito más claramente, presenta las mismas dificultades para explicar los cielos, ya que incluso eliminando epiciclos y excéntricas el modelo seguía siendo excesivamente complejo.

Ninguno de estos autores representa un gran avance en astronomía, pero en alguna medida sirvieron para que Copérnico encontrara un terreno más o menos abonado.

Por otra parte, desde el siglo XIII la observación astronómica y la revisión de las tablas mostraban un deseo crónico de *reformar el calendario* para ajustarlo a las demandas prácticas de la Astrología, ya que acumulaba un gran número de inexactitudes. En el Concilio de Nicea celebrado en el año 325, la Iglesia había fijado el domingo de Pascua como el primer domingo siguiente a la primera luna llena después del (o en el) equinoccio de primavera. Tal equinoccio se había fijado originalmente el 21 de Marzo, pero tomaba el año como de 365 días. Debido a esta inexacta apreciación de la duración del año el calendario Juliano establecido a partir de entonces acumuló un error que llegó en el siglo XVI a diez días.

Una cuestión de interés en este período lo representa el método que se va a emplear en ciencia. Este irá variando para convertirse en uno que ponga el énfasis en la observación y la experimentación [8]; en otras palabras, aparece una visión nueva de lo que sea la experimentación y lo matemático. Así, mientras para Aristóteles las matemáticas eran útiles para definir relaciones pero no para expresar la naturaleza de las cosas y los procesos físicos, para los físicos del XVI predominan las explicaciones de tipo cuantitativo de carácter matemático. Recordemos a los calculadores del Merton College y sus intentos de cuantificar las cualidades. En este sentido se ve de nuevo la influencia de los humanistas con su aspecto neoplatónico que redunda en lo matemático.

Estas cuestiones reflejan lo característico de este período y permiten explicar el auge de los estudios de la época en el terreno de la astronomía. Como decíamos al principio de la ponencia no podemos explicitar claramente cuál fue el factor relevante en la producción de este cambio de mentalidad que surge con la RC porque no existe uno solo.

8. En las ciencias antigua y medieval, salvo algunas excepciones, se prima lo teórico en detrimento de la parte práctica o manipulatoria.

«La noche es para muchos, el momento de soñar con los ojos cerrados; para otros, el de soñar con los ojos abiertos»

Comediants

2. *Y el sol toma el centro...*

Nicolás Copérnico (1473-1543) nace en Torún el 19 de Febrero a las 4 horas, 48 minutos de la tarde [9]. Estudia en la Universidad de Cracovia (uno de los centros de más prestigio de la Europa Central), en Bolonia, Ferrara, Padua y Roma.

No puede decirse que Copérnico sea un autor eminentemente moderno; de hecho, sus escritos conservan matices de tinte medieval como también lo es su adhesión a dos puntos concretos: el *principio de circularidad* y la *uniformidad de movimientos*. Pero tampoco puede afirmarse, en puridad, que sea un autor totalmente medieval. Si deseamos ser justos, habríamos de exponer la figura de Copérnico como la de un astrónomo renacentista en el que se conjugan dos tradiciones: la medieval y la moderna. Y esto es así porque un individuo solo no puede introducir innovaciones salvo de manera muy limitada en la medida en que hereda una educación tradicional que no puede desterrar completamente [10].

Tampoco puede decirse que su revolución se debiera a las observaciones realizadas ya que éstas no le preocuparon demasiado. Su interés se centró más en las cuestiones teóricas. Podemos preguntarnos, entonces, en qué radica la revolución llevada a cabo por este autor.

Como señala Kuhn, el *De Revolutionibus Orbium Coelestium* es más un texto provocador de revolución que un texto revolucionario propiamente dicho [11]. Serán más las obras de los copernicanos convencidos los que lleven a cabo dicha revolución.

El hecho de dotar a la Tierra de movimiento no era nuevo por entonces [12], aunque bien es verdad que una cosa era dotar a la Tierra de un movimiento de rotación (como habían hecho algunos) y otra muy distinta dotarla de tres movimientos como hace Copérnico.

Pero quizás sea más revolucionario el hecho de haber despojado a la Tierra de ser el centro del Universo (aunque en lo que sigue comprobaremos que los movimientos de los cuerpos se remiten no al Sol, sino al centro de la órbita terrestre,

9. La exactitud se debe a la popular «fijación» de la época por los horóscopos. Una copia del de Copérnico fue descubierto por L. A. Birkemmajer a finales del siglo XIX.

10. Kuhn, 1978: pp. 242.

11. Kuhn, op. cit., pp. 186.

12. Entre los que señalaron la idea del movimiento terrestre, ya fuera éste cosmológico o geométrico, manteniendo o no su verdad física, cabe citar a: Filolao, Hicetas, Ecfanto, Aristarco, Heráclides, Capella, Erígena, Bacon, Grosseteste, Escoto, Ockam , Alberto de Sajonia, Buridán, Oresme y Cusa.

lo cual equivale a darle a la Tierra un estatus especial). Mas, independientemente de que pueda considerarse revolucionaria una cosa u otra, el mayor logro copernicano reside en el carácter interconexo de su sistema, que él obtiene por primera vez en la historia de la astronomía. Logró reunir en un conjunto tanta precisión descriptiva y predictiva como las que poseían las técnicas ptolemaicas al uso y una explicación cosmológica relativamente satisfactoria.

Copérnico se sumerge en la búsqueda de soluciones geométricas que, aplicadas a la astronomía, cumplan con los postulados de homogeneidad y armonía del Cosmos y libren a esta ciencia de incoherencias como la del ecuante [13]. Cierto resentimiento contra esta artimaña geométrica u operación de prestidigitación fue lo que impulsó a Copérnico, en opinión de Butterfield, a cambiar todo el sistema [14].

Esto le llevará a una teoría del Universo centrado en el Sol y en el que los cuerpos describen círculos perfectos. Según Hanson es este interés por buscar una explicación y comprensión de la *totalidad de los movimientos celestes* lo que define el enfoque genuino copernicano [15].

Copérnico como astrónomo busca una precisión descriptiva y predictiva superior al Almagesto, como matemático y filósofo natural busca más orden y sistema, mayor inteligibilidad y comprensión. Parece ser que todos los historiadores están de acuerdo en que como astrónomo teórico es digno de gran admiración aunque como cosmólogo discursivo tenga menor categoría.

Dos libros para un cambio

Los motivos que llevan a Copérnico a la confección de su obra los expone él mismo en la introducción al *De Revolutionibus...*, aunque ya los había esbozado en un corto manuscrito llamado *Commentariolus* que iba dirigido a aquellos que estaban ya familiarizados con la astronomía. En él intenta explicar de forma global las ventajas que ofrece su modelo. La pequeña obra, que contiene 7 postulados y otros capítulos en que describe los movimientos celestes, puede darnos una idea más explícita de la construcción de Copérnico:

PRIMER POSTULADO: No existe un centro único de todos los círculos o esferas celestes.

13. Ptolomeo había pretendido seguir los principios de Aristóteles reduciendo los movimientos de los planetas a combinaciones de movimientos cirulares uniformes; pero en realidad no se trataba siempre de un movimiento uniforme alrededor del centro; alguna vez no era uniforme salvo si se consideraba como movimiento angular alrededor de un punto que no era el centro.

14. Butterfield, 1982: pp. 35.

15. Hanson, 1978: pp. 207-208.

SEGUNDO POSTULADO: El centro de la Tierra no es el centro del mundo, sino tan sólo el centro de gravedad y el centro de la esfera lunar.

TERCER POSTULADO: Todas las esferas giran en torno al Sol, que se encuentra en medio de todas ellas, razón por la cual el centro del mundo está situado en las proximidades del Sol.

CUARTO POSTULADO: La razón entre la distancia del Sol a la Tierra y la distancia a la que está situada la esfera de las estrellas fijas es mucho menor que la razón entre el radio de la Tierra y la distancia que separa a nuestro planeta del Sol, hasta el punto de que esta última resulta imperceptible en comparación con la altura del firmamento [16].

QUINTO POSTULADO: Cualquier movimiento que parezca acontecer en la esfera de las estrellas fijas no se debe en realidad a ningún movimiento de ésta, sino más bien al movimiento de la Tierra. Así, pues, la Tierra —junto a los elementos circundantes— lleva a cabo diariamente una revolución compleja alrededor de sus polos fijos, mientras que la esfera de las estrellas y último cielo permanece inmóvil.

SEXTO POSTULADO: Los movimientos de que aparentemente está dotado el Sol no se deben en realidad a él, sino al movimiento de la Tierra y de nuestra propia esfera, con la cual giramos en torno al Sol exactamente igual que los demás planetas. La Tierra tiene, pues, más de un movimiento.

SEPTIMO POSTULADO: Los movimientos aparentemente retrógrados y directos de los planetas no se deben en realidad a su propio movimiento, sino al de la Tierra. Por consiguiente, éste por sí solo basta para explicar muchas de las aparentes irregularidades que en el cielo se observan [17].

En los siguientes capítulos del *Comentariolus* nos hablará de: el orden de las esferas; los movimientos aparentes del Sol; los movimientos uniformes no deben referirse a los equinoccios, sino a las estrellas fijas; la Luna; los tres planetas superiores: Saturno, Júpiter y Marte; Venus y Mercurio.

Pasaremos ahora a exponer una síntesis de *De revolitionibus...* que es donde presenta su teoría de forma completa.

En el *Prefacio*, dedicado a Pablo III, expone las razones, temores y dudas que le han llevado a la confección del libro. Es aquí donde hace referencia a los pensadores clásicos que han tenido un enfoque similar al suyo.

El *Libro primero* trata los fundamentos de la astronomía. En los primeros capítulos expone el axioma básico de la astronomía: *el movimiento de los cuerpos celestes es circular y uniforme* (I,4). Pasa a tratar el movimiento circular de la Tierra (I,5);

16. Este postulado se esgrime como argumento para salvar la objeción de la paralaje y sienta las bases para la concepción de un universo infinito.

17. Copérnico, 1983: pp. 26-28.

el orden de los astros (I,10) y las ventajas de simetría y armonía que se obtienen al situar al Sol en el centro. En el libro (I,11) demuestra el triple movimiento de la Tierra, que explicaremos con más detalle más adelante. Los libros (I,13) y (I,14) tratan de geometría celeste (trigonometría de triángulos planos y esféricos) [18].

El *Libro segundo* trata de astronomía esférica esencialmente. En él no hay vinculación directa con las tesis básicas copernicanas. Aparece en la obra global como un elemento de la exposición completa de astronomía, por analogía con los correspondientes capítulos del Almagesto. Con ello quiere Copérnico dar a entender que su obra tiene el mismo rigor que la Ptolemaica. Define el círculo (II,1); determina el ángulo de oblicuidad de la eclíptica (II,2); nos da definiciones y mediciones de los parámetros astronómicos del (II,3) al (II,10); trata las fases visibles de estrellas y planetas (II,11) y (II,12) y nos ofrece un catálogo de estrellas (II,13) y (II,14).

En el *Libro tercero* estudia los fenómenos relacionados con el movimiento aparente del Sol. Desarrolla la distinción entre año trópico y sidéreo (III,1); de los libros (III,2) al (III,12) explica su teoría de la precesión; en el (III,13) introduce la teoría solar y entre los (III,14) y (III,26) trata las primeras y las segundas desigualdades [19].

El *Libro cuarto* está dedicado al estudio de los movimientos de la Luna y a los métodos para calcular los eclipses.

Los *Libros quinto y sexto* están dedicados a los planetas.

Copérnico no emplea el mismo sistema a lo largo de su vida. Así, en el *De revolutionibus...* usa un sistema excéntrico-epicíclico mientras que en el *Commentariolus* el sistema es concéntrico y con dos epiciclos. Aunque algunos autores señalan que este empleo de dos sistemas se debe a que el *Commentariolus* representa un boceto de una idea más elaborada con el tiempo, hemos de decir que la razón de este cambio se deberá a la necesidad de explicar las primeras desigualdades.

La extraña danza de los cuerpos celestes

Veamos cómo explica Copérnico las segundas desigualdades de los planetas interiores y exteriores de una manera muy esquemática (Figura 1) [20]:

18. Estos dos capítulos habían sido publicados como tratado aparte por el discípulo de Copérnico, Rheticus, en 1542.

19. En lo que respecta a la explicación del movimiento de los cuerpos celestes podemos hablar de dos tipos de desigualdades: las «primeras» que aluden a la variación de las velocidades angulares y de los planetas y las «segundas» que hacen referencia a la posición de los planetas en la conjunción y oposición, así como sus puntos estacionarios y retrógrados.

20. La figura ha sido tomada de Hanson, op. cit., pp. 206.

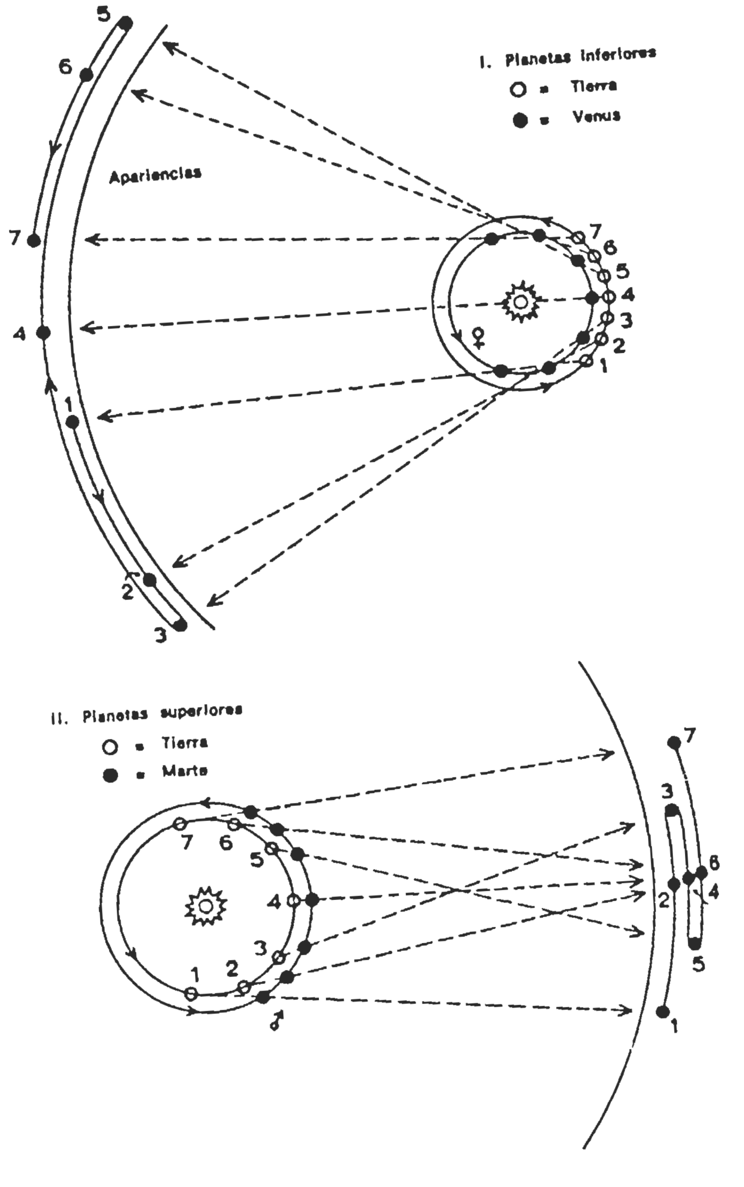

I. Planetas inferiores
= Tierra
= Venus
Apariencias
II. Planetas superiores
= Tierra
= Marte

Fig. 1

La curva numerada muestra el movimiento observado en el cielo, mientras que los círculos numerados mostrarían el movimiento real. Copérnico explica de este modo las segundas desigualdades, pero para las primeras la tarea es más ardua, ya que necesita de la excentricidad, y es por esto que introduce un sistema excéntrico-epicíclico. No obstante, este tipo de desigualdades nunca serán explicadas satisfactoriamente, ya que para ello se requerirá la aceptación de órbitas elípticas y una ley de áreas que no llegará hasta Kepler [21]. Sin embargo, a pesar del tratamiento insatisfactorio de estas primeras desigualdades el hecho de prestar atención a las segundas permitió una interconexión sistemática de todas las perturbaciones planetarias.

El sistema copernicano no estaba absolutamente centrado en el Sol. Debido a estas primeras desigualdades, y para explicar el ritmo acelerado con que el Sol atraviesa los signos del zodíaco durante el invierno, Copérnico desplaza al Sol del centro de la órbita terrestre, manteniendo también esta solución para explicar las otras desigualdades. De esta forma, a juicio de Dreyer, Copérnico guardó una fidelidad a Ptolomeo mayor de la que debiera, ya que la Tierra seguía siendo un cuerpo tan importante en este sistema como en el viejo.

En el sexto postulado Copérnico afirma que la Tierra posee más de un movimiento, en concreto tres. Detengámonos un poco en la explicación copernicana de los tres movimientos terrestres:

— El movimiento de *rotación* diaria hacia el Este explica los círculos cotidianos aparentes descritos por las estrellas, el Sol, la Luna y los planetas.

— El movimiento de *translación* hace que la Tierra gire en torno al Sol en un año describiendo un círculo. La observación sólo nos obliga a mantener la Tierra dentro de una pequeña esfera concéntrica a la esfera estelar. Dentro de los límites de esa esfera interior la Tierra puede desplazarse con toda libertad sin violar las apariencias si tenemos en cuenta el tamaño inmenso del cielo.

— El movimiento de *oscilación* nos muestra que mientras el centro de la Tierra es arrastrado por la esfera que la contiene alrededor del Sol, su eje permanece constantemente paralelo a una línea fija que atraviesa el Sol. Este movimiento sería el resultado de dos movimientos matemáticos simultáneos.

Como la Tierra está fijada sólidamente a una esfera (Copérnico seguía creyendo en la existencia de las esferas sólidas), su eje no podría permanecer constantemente

21. El principio de circularidad nunca se llegó a poner en tela de juicio durante los 2.000 años de astronomía computacional. Y esto tanto por razones observacionales (no hay nada que a simple vista haga pensar en una órbita elíptica de los cuerpos celestes) como por consideraciones filosóficas (propuestas por Aristóteles y sustentadas en la distinción de dos mundos, en el carácter perfecto del mundo supralunar y en el movimiento circular adecuado a este mundo perfecto). Hanson op. cit., pp. 255 y ss.

paralelo a la línea que atraviesa el Sol, por lo que hay que dotarla de este tercer movimiento. Es decir, después de girar 180º, el eje de la Tierra seguiría teniendo una inclinación de 23,5º con respecto a la perpendicular al plano de la eclíptica, pero en dirección simétrica a la del comienzo [22]. Para compensar esto Copérnico añade un giro exclusivo al eje terrestre de forma que éste describe un pequeño cono. Este movimiento cónico hace girar los extremos norte y sur de los ejes en una revolución anual hacia el Oeste, con el fin de compensar con exactitud los efectos del movimiento orbital. Con ello podía Copérnico establecer la velocidad del movimiento de precesión o, más exactamente, el valor medio de ésta.

Un pequeño debate a posteriori

Copérnico se mostró indiferente a las consecuencias físicas del movimiento terrestre, lo que da a entender, según refiere Kuhn [23], que su espíritu se hallaba absorto por las armonías geométricas y que precisamente por ellas se adhirió a la idea de un movimiento terrestre. Aunque bien es cierto que Copérnico no dió respuestas físicas o cosmológicas completamente convincentes, esto no tiene por qué hacernos pensar que su adhesión al sistema era una mera cuestión de armonía.

Hanson, por su parte, no cree que el neoplatonismo de Copérnico al que se refiere Kuhn sea tan exacerbado. Este autor opina que el deseo de dar una explicación sistemática e inteligible tiene más importancia para Copérnico que su indudable estima al Sol [24].

Para algunos autores, como es el caso de Price, R. Hall y otros, el sistema heliocéntrico era geométricamente equivalente al sistema geocéntrico, por lo que no podemos hablar de una mayor precisión en los cálculos ni de una ventaja clara del primero con respecto al segundo. En este punto es interesante recurrir al estudio que expone Hanson [25] y que se dirige a demostrar que estos autores se equivocan y que la equivalencia entre ambos sistemas lo es sólo a un nivel puramente observacional. Si no es así, sólo podríamos concluír que la elección de Copérnico y de sus seguidores vino dada por una cuestión de armonicidad o por mero gusto estético y que nada

22. El eje terrestre jamás apunta hacia un mismo lugar de la esfera celeste desde el principio al final del año. La prolongación del eje terrestre dibuja a lo largo del año dos pequeños círculos sobre la esfera de las estrellas alrededor del polo Norte y del polo Sur celestes. En términos observacionales las estrellas deberían mostrar un ligero cambio en su posición sobre la esfera estelar a lo largo del tiempo. Tal movimiento se detecta con el uso del telescopio en 1838.

23. Kuhn, op. cit., pp. 240.

24. Hanson, op. cit., pp. 213.

25. Hanson, op. cit., pp. 223 y ss.

tuvieron que ver cuestiones o elementos internos a la propia teoría; en definitiva, la elección vendría determinada por elementos externos [26].

El núcleo de la discusión de Hanson estriba en señalar que tanto el sistema de Ptolomeo como el de Copérnico tenían como finalidad salvar las apariencias [27] y, en esta medida, debían ser *observacionalmente equivalentes*, es decir, son equivalentes con respecto a lo que se ve, pero no en cuanto a la estructura interna de dichas teorías. Esto significaría que, si eludimos los diagramas representativos, lo observable sería igual en ambos sistemas. Pero esto no implica que podamos hablar de una equivalencia formal entre ambas teorías ya que tienen distintas consecuencias derivables. Un análisis similar queda expuesto al comparar los sistemas heliocéntrico y tychónico.

Pero aceptemos por un momento que Hanson no tiene razón; podemos preguntarnos entonces dónde residen las ventajas del sistema heliocéntrico y por qué será el que se convierta en el aceptado con el paso de los años.

Se han aducido una serie de razones, entre ellas la de la *simplicidad*, en la medida en que Copérnico emplea menos círculos que Ptolomeo. Sin embargo, este rasgo de la simplicidad no debe engañarnos porque Ptolomeo, a pesar de usar un número más elevado de círculos que Copérnico, nunca utiliza más de cuatro de una vez, ya que las explicaciones de Ptolomeo se dirigen a problemas concretos y en ningún modo se interconectan unas con otras.

El sistema heliocéntrico necesita de 34 círculos (menos que el de Ptolomeo en conjunto) pero su carácter interconexo supone emplear muchos más círculos de una vez ya que las explicaciones comprometen a un número mayor de cuerpos. Por ejemplo, en el caso más simple, Copérnico ha de orientar la Tierra o los planetas con respecto al Sol, que es el centro del sistema, y luego ha de conectar al planeta en cuestión tanto con respecto al Sol (a efectos de cómputo) como con respecto a la Tierra (a efectos de observación). De este modo, la simplicidad en el sistema copernicano no es tanta; sólo cabe hablar en cualquier caso de una simplicidad sistemática.

Salvando lo dicho, la explicación de Mercurio y Venus sí es más simple que la que ofrece Ptolomeo. Según el sistema ptolemaico Mercurio, Venus y el Sol precisaban de un año para recorrer la eclíptica por lo que la disposición relativa que

26. Cuestión que sería defendida por aquellos que propugnan un acercamiento al estudio de la ciencia de carácter sociológico.

27. Aunque hay también una distinción semántica entre lo que signifique este término en uno y otro autor; así, para Ptolomeo, significaría descripciones fenomenológicas particulares de los fenómenos a cualquier costo, mientras que en Copérnico estas palabras se usan con respecto a las consecuencias observacionales de una teoría en su conjunto.

ocupaban sus órbitas había sido fuente de discusión. En el sistema copernicano no se dan estas controversias toda vez que no hay dos planetas que tengan el mismo período orbital.

Existe una *armonía* en el sistema copernicano de tal suerte que si algo se trastoca en un punto repercute en el resto del sistema. Cada una de las partes está fundamentalmente determinada por las demás por lo que respecta al orden, magnitud, dimensión, velocidad y diámetro aparente de los cuerpos.

Quizás el valor de esta «armonicidad» hoy sea nulo, pero pudo atraer a un buen número de astrónomos neoplatónicos que prefirieron esta armonía a las cuestiones de una mayor simplicidad y precisión, aunque esto pudiera no valer en el caso del propio Copérnico.

En cualquier caso, existen respuestas para todos los gustos y no podemos dar una definitiva al por qué de la aceptación paulatina del sistema heliocéntrico. Sólo es posible señalar los puntos de discusión entre aquellos que se ocupan del tema de una forma más profunda.

El largo y tortuoso camino para la aceptación

Hasta el último decenio del siglo XVI no comenzarán a aparecer los verdaderos copernicanos y con ellos la posibilidad de un conflicto entre astronomía realista por un lado y filosofía y religión por otro. La adopción del heliocentrismo fue lenta y gradual. Al principio la teoría sólo era conocida por los profesionales de la astronomía y no todos ellos la compartían. Para muchos ojos profanos la innovación de Copérnico era absurda, impía y ridícula. No había aún ninguna observación importante que explicara la teoría copernicana [28] y la de Ptolomeo no, ni anomalía nueva que desterrara el viejo modelo. El lento desarrollo de la física teórica tampoco permitía al principio desterrar la física aristotélica.

Debido a que las verdades morales y religiosas de esta época tienen más peso que las científicas, durante un tiempo no se persiguieron las ideas copernicanas. Se interpretaban como un artilugio geométrico sin correlato físico [29] y esto permitió su primera expansión. Sólo cuando se cayó en la cuenta de que la teoría de Copérnico tomada en serio podía plantear una amenaza para el orden establecido e innumerables problemas al universo cristiano se desataron las tempestuosas controversias.

La moral y la teología cristianas tradicionales habían hecho suyo el modelo cosmológico aristotélico-ptolemaico, finito, supra y sublunar, con todas las alegorías

28. El descubrimiento de las aberraciones estelares se realiza en 1727 y la comprobación de la rotación terrestre a mediados del siglo XIX.

29. Recuérdese el prólogo de Andreas Ossiander al *De Revolutionibus*... insistiendo en este sentido.

religiosas que de él se derivaban. En una época de reformas religiosas, donde cada una de las alternativas estaba buscando el camino más puro que condujera a Dios, la Biblia se tomó de nuevo como guía de la verdadera fe. Se utilizó la palabra divina como un serio argumento de peso en contra del modelo heliocéntrico, dado que en ella hay un pasaje donde Dios manda explícitamente a parar el Sol. La teoría del movimiento terrestre tenía implicaciones teológicas que podían provocar una transformación profunda de la relación del hombre con Dios y de las bases de la moral. La resistencia a las ideas de Copérnico se convirtieron a la larga en causa común de las Iglesias Católica y Protestante.

Según R. Hall la evolución de la astronomía heliostática tuvo que superar diversas etapas hasta lograr una aceptación generalizada. Tenía que disolver los prejuicios contrarios a la idea de que la Tierra se movía y desacreditar de manera general la autoridad de Aristóteles. Había que criticar detenidamente las ideas cosmológicas antiguas a fin de que tal movimiento fuera verosímil. Era imprescindible hacer una revisión de las teorías físicas para demostrar que no eran válidos los reparos a la teoría copernicana nacidos de fenómenos mecánicos terrestres. Además de salvar con el tiempo estos obstáculos, la nueva astronomía se vio enriquecida por la observación cualitativa y cuantitativa.

En opinión de Crombie [30] el sistema copernicano, pese a todos los inconvenientes, se fue imponiendo debido a una serie de intereses fundamentalmente externos:

— Las Tablas Alfonsinas habían causado insatisfacción porque eran antiguas y no se correspondían ya con las posiciones observadas de los astros. Diferían de Ptolomeo en la precesión de los equinoccios y añadían otras esferas más allá de su novena [31]. Tal desviación parecía ofensiva a los humanistas que creían en la perfección del conocimiento que se había de encontrar en las obras de los clásicos. Todos los astrónomos prácticos se cambiaron a las Tablas Prusianas del siglo XVI, calculadas según el sistema copernicano, aunque eran escasamente más exactas [32].

— Algunos humanistas consideraron a Copérnico como el restaurador de la pureza clásica de Ptolomeo. Otros como Benedetti, Bruno y Petrus Ramus, vieron en su sistema un palo para golpear a Aristóteles.

30. Crombie, op. cit., pp. 161 y ss.

31. Las esferas van conteniendo los cuerpos celestes desde la Tierra a las estrellas fijas (octava esfera). La novena esfera no contiene ni planetas ni estrellas, pero tiene que existir porque es el «primum mobile»..

32. Erasmus Reinhold (1511-1553), ocho años después de la publicación del *De Revolutionibus*, publicó un conjunto de tablas astronómicas calculadas según los métodos matemáticos desarrollados por Copérnico que se hicieron imprescindibles a partir de entonces. Se llamaron *Tablas Prusianas* en honor al protector del autor, el Duque de Prusia. Eran las primeras tablas completas que se elaboraban en Europa desde hacía tres siglos.

— Científicos como Brahe, Kepler, Gilbert o Galileo comprendieron toda la significación del *De Revolutionibus...* e intentaron unificar las observaciones, las descripciones geométricas y la teoría física.

Butterfield hace hincapié en que el cambio no se produjo por nuevas observaciones ni pruebas inusitadas, sino por el cambio de visión en las mentes de los hombres de ciencia, que colocaban los datos ya conocidos en nuevos sistemas de relaciones.

Sean unas causas, sean otras, las semillas de la moderna astrofísica quedaban sembradas.

«Mirar las estrellas: el espectáculo nocturno más antiguo del mundo»

Comediants

3. Tycho: la mirada más aguda

El período que va desde 1543, cuando se publica el *De revolutionibus...* y 1609, con la aparición del libro de Kepler sobre Marte, se puede condiderar de transición, ya que no todos los astrónomos, en contra de lo que podría suponerse, aceptan el sistema heliocéntrico, aunque sí las Tablas Prusianas, como hemos señalado anteriormente.

En este interregno que va de Copérnico a Kepler cabe citar una serie de autores como, por ejemplo, Digges, que acepta el movimiento de la Tierra como algo real y no como mera hipótesis; o Gilbert, que considera la revolución diaria de la Tierra no sólo como probable sino como cierta, argumentando un principio de economía de la naturaleza; otros como Benedetti y Francesco Patrizio admiten la rotación terrestre y se preocupan por refutar la física aristotélica que no cuadra con la teoría heliocéntrica; también Mästlin, Rothmann y David Tost pueden catalogarse como copernicanos; una mención aparte la merece Giordano Bruno que ya ha sido estudiado en este Seminario; y cabe señalar a un español, Stúñiga, que en 1584 publicó en Salamanca un comentario sobre el libro de Job que hace concordar con la idea de una Tierra en movimiento.

No obstante, el hombre que descuella en este período de transición será un anticopernicano: Tycho Brahe (1546-1601). En 1563 se produjo una gran conjunción de Saturno y Júpiter que él esperaba ansiosamente. Esto demostraba que las Tablas Alfonsinas estaban equivocadas en un mes mientras que las copernicanas, más recientes, lo estaban en unos días. Esto convenció a Tycho para dedicarse a trazar de nuevo el mapa de las posiciones de las estrellas más brillantes y, una vez establecida la carta fundamental del cielo, hacer observaciones detalladas para realizar cálculos sin errores y recopilar tablas exactas con vistas al futuro.

Brahe intentaba escapar del sistema ptolemaico ya que, al igual que Copérnico, deseaba fundir la astronomía predictiva con la cosmología explicativa, pero tampoco pudo desatarse del principio de circularidad y del movimiento uniforme de los planetas. Sus observaciones, rigurosas, precisas y sistemáticas, le llevaron a formular una teoría planetaria nueva e interesante [33].

Estas observaciones eran realizadas con instrumentos que él mismo perfeccionaba. Determinó los errores de los instrumentos, estableció límites de precisión en sus observaciones y tuvo en cuenta el efecto de la refracción atmosférica sobre las posiciones de los cuerpos celestes. Fue el primer astrónomo de Europa que utilizó las primeras coordenadas celestes, calculando las posiciones de las estrellas con referencia al ecuador celeste y no a la eclíptica.

Las observaciones sistemáticas de Brahe le llevaron a la revelación de problemas ocultos hasta entonces. Así, en 1572 se observó la aparición de una supernova en la constelación de Casiopea, y aunque Tycho nunca la aceptó totalmente, sirvió como avance para demostrar empíricamente la mutabilidad de la sustancia celeste. Otra de las observaciones de este autor se refería al cometa de 1577; según ésta, se concluyen dos cuestiones: la órbita del cometa no es circular sino ovalada [34] y además se halla más allá del Sol, por lo que debía haber atravesado las esferas sólidas, luego estas esferas *no existen*.

Tycho siguió pensando que los copernicanos no podían responder a las objeciones físicas que se les planteaban, pero no fue este tipo de reparos lo que le llevó a formular su sistema, sino otros distintos: antes del invento del telescopio se creía que las estrellas fijas brillaban por la luz reflejada y su brillo se tomaba como medida de su magnitud (ya que se consideraban como discos y no como puntos luminosos). Brahe observó que al no existir paralaje estelar observable el sistema copernicano implicaba que las estrellas tenían un diámetro de dimensiones increíbles [35].

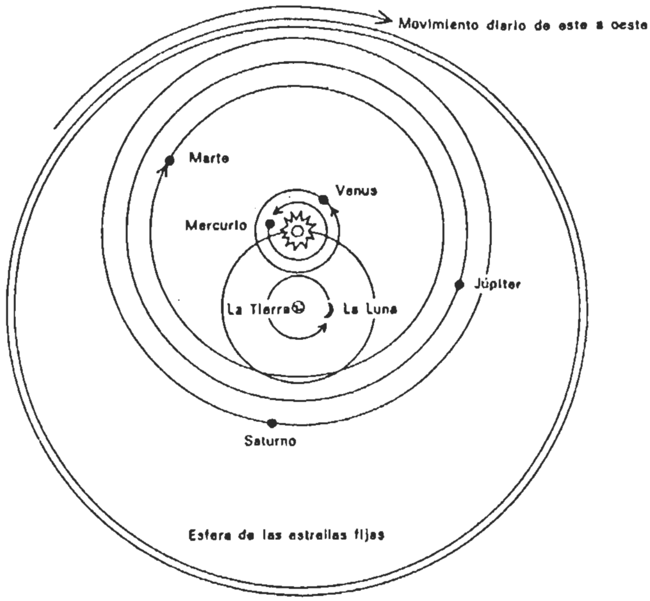
Es así como concibió su propio sistema en el que la Tierra permanece en el centro, inmóvil, el Sol gira alrededor de la Tierra y los planetas lo hacen alrededor de aquél (salvando de esta forma las objeciones físicas planteadas al movimiento terrestre). Hay que decir que este sistema, conocido como tychónico, es equivalente

33. Tycho inaugura la técnica de efectuar observaciones regulares durante toda la trayectoria. Previamente a él sólo se observaban los puntos de conjunción y oposición y otros momentos relevantes.

34. Y aquí Tycho no señala que esta forma oval sea consecuencia de la combinación de círculos, lo que supone un rasgo original.

35. Esta objeción de Tycho al heliocentrismo quedaría eliminada cuando Galileo, empleando el telescopio, probó que las estrellas fijas no tienen esas dimensiones increíblemente enormes. Sin embargo, la objeción del paralaje siguió presentando un problema al sistema heliocéntrico.

observacionalmente al de Copérnico y se erigió como alternativo a los sistemas heliocéntrico y geocéntrico durante dos generaciones (Figura 2) [36].



Sistema tychónico simplificado.

Fig. 2

* * *

El sistema tychónico tiene sus propias incongruencias: la mayor parte de los planetas se hallan descentrados, el centro geométrico del universo ha dejado de ser el centro de la mayoría de los movimientos y es muy difícil imaginar un mecanismo físico que pueda producir, aunque sea de forma aproximada, movimientos planetarios como los propuestos por Brahe. No convence a los copernicanos ni a los neoplatónicos, pero sí a los no copernicanos, ya que mantenía las ventajas matemáticas del sistema de Copérnico y suprimía los inconvenientes físicos, cosmológicos y teológicos. Tycho, como dice Hanson, y a pesar de su intento conservador, remachó el último clavo del ataúd de la astronomía ptolemaica de finales de la Edad Media [37].

Y sobre las impresionantes observaciones de este astrónomo se alzará el genio teórico de Johannes Kepler.

36. La figura ha sido tomada de Hanson, op. cit., pp. 271.

37. Hanson, op. cit., pp. 276.

> «...el círculo es como una prostituta voluptuosa que seduce a los astrónomos para apartarlos de la naturaleza honesta y virginal... Copérnico había preferido la mujerzuela»
>
> *J. Kepler*

4. Una admirable obsesión

Johannes Kepler (1571-1630) nace en Würtemberg. Estudia teología y astronomía, entendiendo esta última como el camino más adecuado para la teología, al igual que las matemáticas. Sin embargo, las circunstancias hicieron que fuera un astrónomo, aunque siempre perduró en sus obras la preocupación teológica y un cierto pitagorismo y neoplatonismo. Trabajó con Tycho Brahe en Praga y a la muerte de éste le sustituyó como astrónomo imperial. Escribió seis tratados de astronomía, dos de óptica y otras obras menores.

Puede decirse que Kepler no es un simple copernicano ya que precisamente desbancará los dos principios medievales a los que Copérnico no pudo decir que no: el de circularidad y el de movimiento uniforme. Sí fue, en cambio, un heliocentrista convencido desde el principio y opinaba que este sistema superaba con creces al de Ptolomeo, considerándolo verdadero bajo el argumento de que sólo accidentalmente pueden obtenerse consecuencias verdaderas de premisas falsas y el sistema heliocéntrico tiene muchas consecuencias verdaderas allí donde Ptolomeo no daba respuestas.

Otro rasgo que caracteriza a Kepler es su idea de que el universo constituye una estructura racional y perfecta en la que se manifiesta la sabiduría de Dios. Se propuso como objetivo el desentrañar esa estructura profunda. Recordemos que precisamente los dos siglos que dura la RC darán lugar al intento de formular leyes racionales que permitan desentrañar la naturaleza, la cual posee un carácter matemático. Y esta es la idea de Kepler.

Para él la teoría astronómica debía ser algo más que un conjunto de recursos matemáticos con los que podían darse cuenta de los fenómenos observados; la misma tenía que asentarse sobre principios físicos correctos de los que pudieran deducirse los movimientos de los planetas a partir de las causas que los producen. En otras palabras, lo que pretendía era obtener leyes matemáticas que interpretasen la realidad física de las estrellas. Así llegamos a otra característica de Kepler: su empirismo marcado, de tal suerte que es precisamente a los datos a los que han de adecuarse las teorías o hipótesis. Kepler rechaza por tanto cualquier tipo de apriorismo.

Sería ardua la tarea de explicar toda la labor de Kepler a lo largo de los años; baste con decir que cuenta con las observaciones realizadas por Tycho y que las mismas eran sometidas a los sistemas de Ptolomeo, Copérnico, Tycho y al suyo propio, como si la labor de corroboración de todas ellas fuera la tarea principal para poder abordar la verdadera trama de los cielos. Sin embargo, no podemos obviar algunos de los pasos que da este autor, aunque sólo sea para hacernos una idea algo más clara de cómo llega a esa fórmula general que relaciona todos los planetas.

La primera obra de Kepler es *Mysterium Cosmographicum* (publicado en 1569) cuyo título se muestra menos misterioso que su contenido; en él Kepler se propone demostrar la validez del sistema heliocéntrico en base al número de planetas: seis. Mientras que en el sistema ptolemaico la Luna era considerada como un planeta más, el sistema copernicano no la consideraba como tal (lo cual representó una anomalía a dicho sistema durante mucho tiempo) y, en consecuencia, se hablaba de seis planetas. Kepler quería descubrir por qué Dios había creado un universo heliocéntrico con seis planetas y para ello intentó demostrar que existía una correlación entre los seis planetas y los cinco sólidos regulares; estos sólidos definirían los espacios entre las seis esferas y, puesto que sólo existen cinco sólidos regulares, sólo existen seis planetas.

Este no es el tipo de cuestiones que se plantean normalmente en la ciencia, pero no podemos olvidar que Kepler estaba impregnado del neoplatonismo renacentista que, aunque le condujo a elaboraciones como las referidas, también le proporcionó la posibilidad de mejorar el sistema copernicano en tanto estaba convencido de que la construcción del universo seguía principios geométricos.

El eterno rompecabezas

Kepler comienza por el estudio de la órbita de Marte que había ocasionado verdaderos problemas a los astrónomos desde los tiempos de Eudoxo [38] y somete el cálculo de esta órbita a los tres sistemas conocidos comparándolos con los resultados obtenidos por las observaciones de Brahe. Se da cuenta entonces de que Copérnico había complicado las cosas excesivamente al no permitir que las órbitas de todos los planetas pasaran por el Sol. Intenta explicar el movimiento orbital de Marte por medio de una excéntrica, pero esto se torna insuficiente y ha de añadir un punto ecuante con su correspondiente círculo con el fin de que las observaciones de que dispone concuerden lo máximo posible. Aunque esto supone volver a un estadio precopernicano, Kepler no duda en dar este paso con el fin de evitar un cúmulo de epiciclos y, consecuentemente, una construcción muy artificiosa. Sin embargo, aun con la introducción de un punto ecuante, aparece una diferencia de 8' entre las posiciones observadas y las calculadas [39], lo que hace que Kepler abandone el estudio de la órbita de Marte por el momento.

38. La cantidad de irregularidades de Marte sólo han sido superadas por las de Mercurio.

39. Los errores de Tycho nunca excedían de 2' por ello Kepler no podía aceptar un error de tal calibre en sus propios cálculos.

Algún tiempo después comienza a estudiar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol recurriendo siempre a los datos de Tycho. Aquí Kepler da muestras de su genio al emplear un método tan sencillo como ignorado por los astrónomos previos: estudia la trayectoria de la Tierra como si el observador estuviera en una plataforma exterior. Esto surge de la necesidad de conocer también cómo se mueve el lugar desde el que se realizan las observaciones del movimiento de los demás planetas [40]. Esto representa una de sus rupturas con la tradición.

De esta investigación concluye Kepler que la estructura del movimiento terrestre es semejante a la calculada para Marte y que también requiere la introducción del ecuante. Por tanto los movimientos de los planetas y de la Tierra son semejantes y dichos movimientos, en un plano real, son *no uniformes,* ya que se precisa del ecuante para ajustarse a la órbita de más precisión.

En su *Mysterium Cosmographicum* Kepler ya argumentaba que el Sol, al estar cerca del centro del sistema planetario y al ser tan grande, debía ser de algún modo el responsable *causal* de que los planetas se movieran como lo hacen; pero no elabora matemáticamente esta idea. Para ello habrá que esperar a la aparición de Newton. La convicción de que la *causa* de los desplazamientos planetarios se debe al Sol y no al Primer Motor, constituye una idea profundamente antiaristotélica. Kepler sabía igual que Tycho que las esferas cristalinas no existían. De ser esto cierto había que establecer un nueva física celeste que diera cuenta de los movimientos planetarios.

Kepler conocía el trabajo de Gilbert sobre magnetismo, lo que puede ayudarnos a comprender su idea de dar un estatus de causalidad al Sol. Esta afirmación en boca de Kepler, sin sustentarse en nada más definitivo, ha sido tomada por algunos autores como muestra de su interés por la explicación en base a «almas»; pero esto es cierto sólo para el comienzo de su obra ya que tal sugerencia sufrió una transformación gradual a lo largo de su vida. Cuando Kepler escribe su *Mysterium...* denomina a la energía que irradia el Sol «anima motriz», expresión cargada de connotaciones espiritualistas. En 1621, al preparar una segunda edición a esta obra, escribe en una nota a pie de página lo siguiente: «Si sustituís la palabra *anima* por la palabra fuerza *(vis)*, tendréis el principio mismo en que se basa la física celeste del *Comentario sobre Marte*. Antes creía firmemente que la causa que mueve los planetas era un alma... Pero cuando reconocí que esta causa motriz se debilita a medida que aumenta la distancia al Sol, al igual que la luz se atenúa, concluí que tal fuerza debía ser parecida a una fuerza corpórea» [41]. Vemos como Kepler va pasando de lo espiritualista a lo mecanicista.

40. Este recurso había sido utilizado ya por Kepler en su obra *Somnium*, relato de divulgación en el que los protagonistas viajan a la luna y desde allí observan el movimiento terrestre. Es uno de los primeros escritos de ciencia ficción.

41. Citado en Westfall, 1980: pp. 24.

Al igual que Descartes, Kepler estaba convencido de que en el sistema solar debía haber alguna fuente de fuerza o tensión. No podía ser un complejo formado por cuerpos totalmente independientes sin interacción mutua. Para Galileo los movimientos naturales del universo eran básicamente sencillos, eternos y libres de fuerza, en la visión de Kepler, más realista, los movimientos son complejos y resultantes de una interacción de «fuerzas corporales» análogas a las magnéticas o gravitacionales.

En este sentido Galileo aún pertenecía a un universo geométrico que Kepler había rechazado en aras de un universo físico sin lugar para las ideas puramente geométricas desprovistas de equivalentes empíricos.

Las tinieblas se hacen ley

La dura labor de sus cálculos lleva a Kepler al descubrimiento de sus tres famosas leyes, con las que describe un universo en el que las órbitas de los planetas no son circulares ni uniformes y el tamaño de las mismas está relacionado con las velocidades de los planetas.

PRIMERA LEY: los planetas se mueven en elipses con el Sol en uno de sus focos (*Astronomía Nova*, 1609).

SEGUNDA LEY: cada planeta se mueve, no uniformemente, sino de forma que la línea que une su centro con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales (*Astronomía Nova*, 1609).

TERCERA LEY: los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol (*Harmonice Mundi*, 1619).

Mantendremos en nuestra explicación el mismo orden que sigue Kepler en sus deducciones, ya que, realmente, Kepler formuló en primer lugar su Segunda Ley, más conocida como «Ley de áreas» con la que intenta explicar matemáticamente los cambios de velocidad. En esta búsqueda juega un papel importante la pregunta de por qué los planetas más cercanos al Sol marchan a velocidad superior con respecto a los más alejados, al tiempo que cada planeta va más deprisa cuando está más cerca del Sol que cuando se halla más lejos. Es curioso como Kepler llega a su segunda Ley partiendo de tres hipótesis incorrectas:

a) Cree que cualquier fuerza ha de tener la misma magnitud en todos los puntos de la circunferencia de un círculo en cuyo centro se halla el objeto que provoca la fuerza y en la circunferencia el objeto sobre el que ésta se ejerce: a mayor distancia, menos fuerza [42]. Pensaba que la velocidad debía ser proporcional a la fuerza im-

42. Esto es una verdad relativa y funciona si se refiere a la fuerza de gravedad, pero no ocurre lo mismo con todo tipo de fuerza; la fuerza elástica, por ejemplo, aumenta con la distancia.

pulsora e inversamente proporcional a la distancia. Esta es la conocida —y errónea— *ley de velocidades* [43] a partir de la que deduce su ley de áreas.

b) Observa que si la velocidad varía inversamente a la distancia al Sol, la distancia a éste de cada segmento de una órbita ha de ser proporcional al tiempo que el planeta emplea en recorrerlo; además, creía que la suma de los radios de los pequeños segmentos de dicha órbita podía ser considerada igual al área que el radio barre a medida que se mueve el planeta.

c) Todavía supone Kepler que la órbita es circular, ya que aún no ha establecido su primera ley.

De estos tres supuestos se extrae la Segunda Ley que queda formulada como la expusimos más arriba. Esta ley describe con bastante exactitud el movimiento de cualquier planeta alrededor del Sol y era la mayor aproximación matemática a la que Kepler podía llegar. El cálculo infinitesimal desarrollado posteriormente por Newton y Leibniz demostrará que la ley es exacta siempre que pueda despreciarse la influencia de un tercer cuerpo.

Una vez que queda establecido el movimiento de los planetas, es necesario explicar sus trayectorias. Kepler necesita una fórmula con la que calcular con exactitud la posición de un planeta en un momento dado. Vuelve a considerar entonces la trayectoria de Marte. Tycho había deducido de sus observaciones que la órbita del planeta rojo mostraba una forma oval, lo que no dejaba de ser una extravagancia si tenemos en cuenta el arraigado principio de circularidad. Con su Primera Ley Kepler elimina tal principio.

Los primeros intentos por salir de éste se exponen en *De Motibus Stellae Martis*, donde nos relata cómo el supuesto de la órbita circular resultaba irreconciliable con los datos. El cálculo de las distancias demostraba que la órbita «circular» de Marte se estrechaba en ciertos puntos formando una especie de óvalo, como ya había observado Tycho. En sus primeros intentos Kepler colocaba al Sol en el foco de tal figura, pero seguían presentándose ligeros desajustes entre el plano geométrico y el observacional. Tras varios intentos con órbitas ovales, Kepler prueba la elipse como una aproximación matemática a dicha órbita, ya que la elipse proporciona una función matemática uniforme. Durante un tiempo mantuvo el ovoide como hipótesis física y la elipse como supuesto matemático. Poco a poco ésta se convierte en hipótesis física: la órbita no sólo se aproxima a una elipse sino que realmente lo es y el Sol ocupa uno de sus focos. Queda establecida así su Primera Ley.

43. Errónea porque la fuerza es proporcional a la aceleración y no a la velocidad.

Dice Hanson que «al tener que terminar poniendo en tela de juicio el principio de circularidad, Kepler estaba enfrentando su fortaleza intelectual contra uno de los megalitos de la historia del pensamiento científico occidental» [44].

Tras diez años aparece la Tercera Ley, llamada «ley de las armonías», objetivo que Kepler anduvo buscando desde los comienzos de su tarea astronómica y a la que llegó, al parecer, tras varios ensayos. Losee señala que entre los intentos keplerianos de buscar correlaciones matemáticas que armonizaran el tamaño de las órbitas con el tiempo que los planetas tardan en recorrerlas, surgen algunas propuestas bastante curiosas como aquella en la que relaciona las distancias planetarias con sus «densidades», sugiriendo que éstas son inversamente proporcionales a las raíces cuadradas de sus distancias al Sol [45]. Kepler estaba convencido de que al investigar las diferentes posibilidades encontraría una relación matemática simple que ligase todos los movimientos que ocurren en el sistema solar.

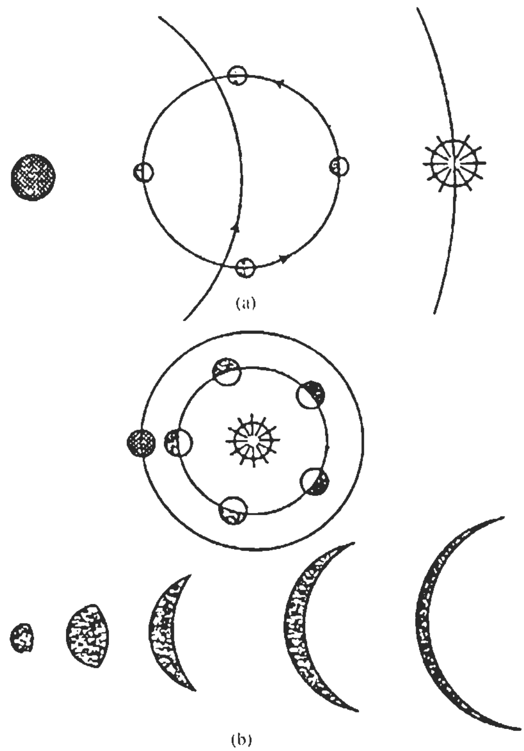
Las tres leyes de Kepler suministraron una solución definitiva al viejo problema de descubrir un sistema astronómico que salvara las apariencias, al tiempo que describiera las trayectorias reales de los cuerpos celestes, con lo que ya no se hacía necesario recurrir a la tan manida teoría de la doble verdad. No obstante, el coste de aceptar la simplicidad de la elipse venía dado por el abandono del círculo y todas las connotaciones de perfección, inmutabilidad y orden. Al mismo tiempo, el sentido común seguía rechazando esta nueva dinámica celeste y antes de que se aceptara plenamente el sistema kepleriano se debieron justificar los inconvenientes que éste tenía: para esta labor fue precisa la aportación de Galileo. Su uso del telescopio mostrando que el «mundo supralunar» no era tan perfecto como se creía y sus estudios sobre el movimiento abrieron aún más la grieta que derrumbaría la antigua cosmología.

Existían aún anomalías que desde el heliocentrismo no se podían explicar. Como ejemplo sirva el caso de la Luna, que siendo un planeta gira alrededor de la Tierra y no en torno al Sol. Cuando se descubrieron los satélites de Júpiter parció que la anomalía lunar ya no lo era tanto (aunque seguía sin explicarse el fenómeno). Sin embargo las fases de Venus sí ofrecieron un apoyo positivo a la teoría heliocéntrica: en el sistema geocéntrico Venus siempre está entre el Sol y la Tierra y debe aparecer siempre como una media luna; en el sistema heliocéntrico Venus se desplaza por detrás del Sol y puede aparecer casi llena (Figura 3) [46]. Esto quedó revelado por el telescopio y sirvió de apoyo al heliocentrismo.

44. Hanson, op. cit., pp. 286.

45. Losee, 1987: pp. 57 y ss..

46. La figura ha sido tomada de Westfall, op. cit., pp. 29.



Las fases de Venus. a) El sistema tolemaico. b) El sistema copernicano. En el sistema tolemaico Venus debe aparecer siempre más o menos en fase creciente. En el sistema copernicano, puede aparecer casi llena cuando pasa por detras del Sol, y su tamaño varía enormemente.

Fig. 3

Pero todo no podía salir bien, aún quedaba una dura espina clavada en el sistema heliocéntrico: la aparente inexistencia de paralaje que no pudo descubrirse hasta el siglo XIX.

La aceptación del sistema copernicano-kepleriano, a pesar de los inconvenientes, se basará de nuevo en argumentos tales como la armonía geométrica y la simplicidad sistemática. La importancia de Kepler no sólo reside en haber descubierto las leyes descriptivas del movimiento planetario, también hizo las primeras sugerencias de una nueva cosmología física que permitió el nacimiento de la astrofísica, aunque para terminar esta labor se requiriera del trabajo de Newton y su ley puente de la gravitación universal.

Seguramente la principal cuestión que subyace a toda esta exposición podríamos resumirla en lo siguiente: ¿qué causas motivaron el cambio de un sistema astronómico por otro?. Bien es verdad que la aceptación del sistema heliocéntrico no se produjo sino tras siglo y medio de duros debates entre copernicanos y no copernicanos. Esto nos puede llevar a reflexionar sobre cuáles fueron las razones que llevaban a un copernicano a mantenerse firme en su idea a pesar de todo lo que tuviese en contra.

Al margen de todos los puntos que se han citado en el apartado 2, el núcleo de la discusión se podría centrar en las explicaciones que racionalistas y no-racionalistas aducen para el cambio científico. Para los primeros el cambio se produce por razones internas a ambas teorías, las cuales reflejan la superioridad de una frente a la otra (simplicidad, equivalencia geométrica, explicación más ajustada a lo observable, etc.). Desde este enfoque no se negaría la existencia de factores externos, pero éstos no se consideran relevantes para explicar el cambio. Así, el sistema heliocéntrico se aceptaría paulatinamente por ofrecer avances intrínsecos respecto al ptolemaico. No obstante, todas las interpretaciones racionalistas no son iguales. Las razones internas que provocan el cambio difieren entre un popperiano, un lakatosiano, etc.

Para los no-racionalistas el cambio de teoría no podría explicarse exclusivamente por razones de índole interna. Los factores de tipo social son los predominantes y los que desempeñan un papel relevante en la elección de una teoría o de otra (armonía, gusto estético, razones políticas, etc.).

Parece sencillo extraer consecuencias y correlaciones verdaderas de algún capítulo de la historia de la ciencia en la medida en que éste ya está escrito y no puede variarse. Pero esto es engañoso. Cualquiera puede mirar retrospectivamente buscando lo que le interese para defender su enfoque.

Es imposible llegar a un acuerdo sobre cuál es la posición más acertada. Todo depende de la concepción metodológica que uno mantenga en lo que respecta al cambio científico.

Por todo esto no pretenderemos aquí dar una respuesta definitiva acerca de cuáles fueron las causas de la Revolución Científica, sino más bien señalar que existen muchas interpretaciones posibles para un mismo tema.

¿Escepticismo? Quizás.

BIBLIOGRAFÍA

BUTTERFIELD, H. Los orígenes de la ciencia moderna. Madrid. Taurus. 1982.

CASINI, P. Naturaleza. Barcelona. Labor. 1977.

COHEN, I.B. La revolución newtoniana, la transformación de las ideas científicas. Madrid. Alianza. 1983.

COPÉRNICO, N. Sobre las revoluciones. Madrid. Tecnos. 1987.

COPÉRNICO, N. y otros. Opúsculos sobre el movimiento de la Tierra. Madrid. Alianza. 1983.

CROMBIE, A.C. Historia de la Ciencia: De San Agustín a Galileo. Madrid. Alianza. 1985.

DREYER, J.L.E. A history of astronomy from Thales to Kepler. New York. Dover. 1953.

HALL, A.R. La revolución científica 1500-1750. Barcelona. Crítica. 1985.

HANSON, N.R. Constelaciones y conjeturas. Madrid. Alianza. 1978.

HOLTON, G. Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas. Barcelona. Reverté. 1984

KOYRÉ, A. Del mundo cerrado al universo infinito. Madrid. Siglo XXI. 1989.

KUHN, T.S. La revolución copernicana. Barcelona. Ariel. 1978.

LOSEE, J. Introducción histórica a la filosofía de la ciencia. Madrid. Alianza. 1987.

MASON, S.F. Historia de las ciencias. Vol II. Madrid. Alianza. 1985.

MÍNGUEZ PÉREZ, C. De Ockam a Newton: la formación de la ciencia moderna. Madrid. Cincel. 1986.

VARIOS Nicolás Copérnico. Madrid. Siglo XXI. 1973.

WESTFALL, R.S. La construcción de la ciencia moderna. Barcelona. Labor. 1980.

GALILEO: LA MATEMÁTICA

José Manuel González Rodríguez
Profesor Titular de Economía Aplicada
Universidad de La Laguna

La naturaleza y la Biblia derivan ambas de Dios, y es absurdo querer contradecir la Naturaleza, que es la expresión directa de la voluntad divina, sobre la base de la interpretación humana de las Sagradas Escrituras. Por el contrario, se debe aprender a leer e interpretar las escrituras a través de la Naturaleza.

1. Galileo: el Hombre y el Método

La frase del encabezado, que Galileo Galilei pronunciara ante el tribunal de la inquisición que lo juzgó en 1633 nos motiva a comenzar con una breve introducción sobre la vida y la obra de Galileo, buscando más puntos de referencia que nos aclaren el alcance de su producción matemática.

Nace Galileo Galilei en 1564 en Pisa en la familia de un comerciante de tejidos Vincenzo Galileo, que también fue músico y compositor. Este implicó a su hijo en el estudio científico, y, así, Galileo ingresó en la universidad de su ciudad para estudiar medicina. En esa época los cursos estaban todavía en el nivel del curriculum medieval, y Galileo aprende por su cuenta matemáticas privadamente, de manos de un ingeniero práctico. Dicho maestro influyó notablemente en su carrera, de modo que a la edad de diecisiete años Galileo cambia de la medicina a las matemáticas. Después de cerca de ocho años de estudio solicita una plaza para enseñar en la universidad de Bolonia, mas fue rechazado por carecer de méritos suficientes. Se asegura no obstante una plaza de profesor en su ciudad, y, estando allí, se empeña en la revisión crítica de la ciencia aristotélica, lo que hizo que se enemistara con la mayor parte de sus colegas.

En esa época comienza a escribir sus primeros trabajos matemáticos, cuya buena acogida provocó los celos de algunos de los profesores nada competentes. Todo ello provocó su emigración, recalando entonces en Padua en cuya universidad aceptó un puesto de profesor de matemáticas. Allí escribió su primer libro *Le Mecaniche* (1604) y permaneció durante dieciocho años, hasta que fue invitado a Florencia por el Gran Duque Cósimo II de Médicis, quién lo nombró Matemático Principal de su corte, le dió casa y un salario considerable, y le protegió de los jesuitas, quienes, dominadores de los círculos del papado, ya le habían amenazado por haber defendido la teoría de Copérnico.

Acuciado por estas críticas, se retira a una pequeña casa de campo en Arcetri, en los alrededores de Florencia, y consagra quince años de su vida a sus investigaciones sobre mecánica y astronomía. En 1632 publica su famoso *Diálogo sobre los dos sistemas del mundo,* en el que defiende con pasión y con todo rigor las tesis copernicanas. Su publicación lo conduce en 1633 ante el tribunal de la Inquisición, que lo obliga a renegar públicamente de sus doctrinas relativas al movimiento de la tierra. Desengañado y abatido por la muerte de su hija predilecta se retira de la vida pública, y acuciado por numerosos achaques físicos (se queda ciego en 1637) permanece en su casa de campo hasta que le llega la muerte en 1642. No obstante en este periodo de su vida redacta numerosos escritos científicos, destacando entre éllos su famoso *Discursos y demostraciones matemáticas relativas a dos nuevas ciencias* (1638), obra en que resume admirablemente la mayor parte de sus descubrimientos e investigaciones en Mecánica y Matemáticas.

Galileo representa por excelencia al científico del Renacimiento tardío: su compromiso con las nuevas ideas recogidas por sus predecesores no le impiden afrontar nuevas ideas con la ayuda de recursos, quizá poco rigurosos, pero tremendamente eficaces, lo que ignaura una nueva era en el desarrollo de la ciencia moderna. No obstante, sometido a las turbulencias mundanas y a los conflictos con los representantes del papado, Galileo no renuncia a prácticas poco novedosas, propias de la época medieval, ya superada, lo que, en algún modo, incide en el rigor y justeza de sus métodos [1]. En todo caso, estas prácticas no impiden considerar el método que ignaura Galileo como el primer modelo de investigación científica coherente, en el sentido en que lo entendemos en la actualidad.

1. Se conoce la afición de Galileo a la Astrología, y se cuenta con testimonios que hablan de la práctica profesional de ésta. Sin duda, todo ello tendría que ver con las penurias económicas que

Galileo fue un hombre extraordinario en muchos campos, de tal modo que se le llama a menudo el padre de la invención moderna. Fue un perspicaz observador astronómico, inventor independiente del microscopio, difusor del telescopio por excelencia, diseñador del primer reloj de péndulo y de un compás con escalas que proporcionaba automáticamente los resultados de cálculos numéricos. También fue Galileo el primer estudioso moderno del sonido, que explicó con la ayuda de una teoría ondulatoria, adelantándose así a los trabajos de Mersenne y de Newton. Mas, con todo, su obra más señera consistió en inaugurar oficialmente los nuevos métodos de la ciencia moderna.

En particular, en su filosofía de la ciencia, Galileo rompió radicalmente con lo especulativo y lo místico en favor de una visión de la naturaleza mecánica y matemática. Esta le condujo (como ya vemos en la cita que encabeza el apartado) a establecer una clara distinción entre los problemas científicos y los argumentos teológicos. Destaca también Galileo por su defensa del atomismo de Demócrito, que él entendía con la explicación de que todas las variedades cualitativas de los cuerpos eran debidas a la diversidad cuantitativa en el número, tamaño, forma y disposisión espacial de los átomos.

Por otra parte, su nuevo método de la ciencia enfrentaba radicalmente las concepciones medievales en cuanto que el autor decidió que, en Física, en contraposición a lo que ocurre en Matemáticas, los primeros principios deben de proceder de la experiencia y de la experimentación. En este sentido pensaba Galileo que la naturaleza no hace primero el cerebro de los hombres y organiza a continuación el universo de manera que resultara aceptable al intelecto humano, sino que más bien defendía la concepción contraria: la naturaleza está perfecta y armoniosamente organizada, y es facultad del intelecto del hombre el descubrir como son las reglas que la estructuran.

Por último, otro de los elementos esenciales que fundamentan el nuevo método galileano consistió en la búsqueda de principios cuantitativos que pudieran explicar los fenómenos físicos. Galileo pretendía buscar sus axiomas como tales afirmaciones cuantitativas, y esperaba deducir algunos nuevos con la ayuda de los métodos matemáticos. Por otra parte, estas deducciones también proporcionarían, en su opinión, un conocimiento cuantitativo.

sufre, pues en una buena parte de su vida se ve obligado a mantener no sólo su familia directa, sino también a sus hermanas (Diario El País, sábado 3 de octubre de 1992).

> La filosofía (la Naturaleza) está escrita en ese gran libro que siempre está delante de nuestros ojos —quiero significar el universo— pero que no podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje, y comprendemos los símbolos en los que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático, y los símbolos son triángulos, circunferencias y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender ni una palabra de él, sin lo cual se deambula en vano a través de un oscuro laberinto.
>
> *Galileo, 1610*

2. *Las Matemáticas de Galileo*

Como corolario del último párrafo del apartado anterior aparece la afirmación que recogemos en el encabezado: las matemáticas debían de ser el medio esencial para alcanzar la pretendida justificación cuantitativa de la nueva ciencia. Justamente ésta es la idea central que preside el uso que hace Galileo de la Matemática, y cómo consecuencia, del éxito de sus métodos. Descubrir las aportaciones más relevantes del investigador pisano en Matemáticas será la tarea que pretendemos abordar en este apartado.

Aunque los desarrollos matemáticos jalonan todas las investigaciones sobresalientes de Galileo, podemos remitirnos, a la hora de resumir los métodos más destacados, a su obra de madurez: los *Discorsi* o *Discursos y demostraciones*... De hecho los *Discorsi* no constituyen una creación nueva, pues consisten en la recuperación, profundización y puesta al día de varios escritos que datan de la época en que enseñaba matemáticas en Padua. Tienen los *Discorsi* una estructura semejante a la primera gran obra galileana el *Diálogo sobre*... ya que se estructura en forma de diálogo que mantienen durante cuatro jornadas tres interlocutores: Salvati, Sagredo y Simplicio [2]. En los *Discorsi* Simplicio presenta los razonamientos y puntos de vista (fundamentalmente aristotélicos) de la época, mientras que Salvati los refuta, razonando hábil y tenazmente para mostrar las falacias y puntos débiles de estos esquemas y la fuerza de los nuevos.

En este apartado nos detendremos en examinar las discusiones que los tres interlocutores mantienen sobre las teorías del movimiento uniforme y del movimiento uniformemente acelerado de los cuerpos y sobre la trayectoria seguida por los proyectiles, dejando para el próximo apartado las discusiones que atañen a la sutileza del infinito y sus paradojas. Analizando con detalle cada uno de los teoremas propuestos por Galileo intentaremos desentrañar el uso de la ciencia matemática que se esconde en los *Discorsi*.

2. Estos tres nombres corresponden a personas reales. Filipo Salvati (1582-1614) fue amigo de Galileo; Glovanfrancesco Sagredo (1571-1620), también había sido amigo del pisano y Simplicio (muerto en el 500 d. C.) fue un filósofo neoplatónico griego, comentador de Aristóteles.

Avancemos antes que nada que la estructura del capítulo tiene que ver con el uso que hace Galileo de la vieja y de la nueva Matemática; es decir de los métodos clásicos, recogidos de los griegos y de aquellos nuevos que nos propone el autor, de elaboración eminentemente propia. Por otra parte, cada demostración matemática se relaciona con una discusión física, y, en definitiva, Galileo pretende explicar con la primera la segunda. El guión de este apartado será entonces como sigue:

— Galileo y las matemáticas griegas: el uso de la teoría de las proporciones de Euclides y de las cónicas de Apolonio.

— Innovaciones propias de Galileo: los diagramas de tiempo-velocidad, la teoría de lo infinitamente pequeño, la «summa» o «agregatum», esto es la integración.

Comencemos por la discusión del movimiento uniforme de los cuerpos, de forma que con ayuda del Teorema I que se demuestra durante la tercera jornada aclaremos el alto grado de conocimiento que Galileo poseía de las matemáticas clásicas de los griegos, esto es, de Euclides, Apolonio y Arquímedes.

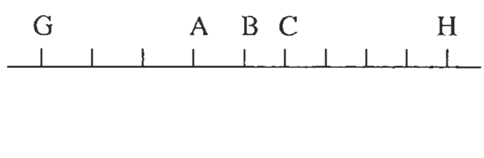
La definición que Salvati da de movimiento constante o uniforme entiende éste como aquel que posee un móvil que en tiempos iguales cualesquiera (quibuscunque, en el original) recorre espacios iguales entre sí. Independientemente de que Galileo no reconoce el concepto de velocidad, pues aún en 1638 no se concebía la razón entre dos magnitudes físicas diferentes, el uso del término cualesquiera nos alerta sobre la necesidad que tiene Galileo de recurrir a un determinado nivel de rigor, aproximándose de esta forma al concepto de velocidad como límite.

Dispongámonos a detallar la demostración del primer teorema que atañe a este movimiento uniforme, y, para ello, (y en lo que sigue lo haremos de igual forma) nos ayudaremos del excelente trabajo de Carmen Azcárate *Las Matemáticas de Galileo. Estudio histórico sobre «La nueva ciencia del movimiento»*. El enunciado del teorema dice:

Si un móvil dotado de movimiento uniforme recorre dos espacios a la misma velocidad, los tiempos invertidos tendrán entre sí la misma proporción que los espacios recorridos.

y su demostración es la que sigue:

Supongamos que un móvil recorre con movimiento uniforme las distancias AB y BC; el tiempo para recorrer AB lo representamos por DE, mientras que el requerido para recorrer BC, por EF. Mi proposición es que la distancia AB es a la distancia BC como el tiempo DE es al tiempo EF.



Alarguemos tanto los espacios como los tiempos en direción a G,H y a I,K respectivamente. Dividamos, a su vez, AG en una serie de espacios iguales todos a AB, y de la misma forma dividiremos DI en una serie de intervalos de tiempo todos exáctamente iguales a DE. Del mismo modo operaremos con CH, que será dividida en espacios equivalentes cada uno a BC, mientras que FK se dividirá en intervalos de tiempo equivalentes, cada uno también, a EF. Pues bien, la distancia BG y el tiempo EI serán múltiplos iguales cualesquiera de la distancia BA y del tiempo ED. De la misma manera, la distancia HB y el tiempo KE serán igualmente múltiplos cualesquiera de la distancia CB y del tiempo FE.

Dado que DE es el tiempo requerido para recorrer AB, el tiempo total EI será el que se requiere para recorrer toda la distancia BG y cuando el movimiento es uniforme, habrá en EI tantos intervalos de tiempo, equivalentes a DE, como espacios hay en BG, equivalentes cada uno a BA. De la misma forma se infiere el tiempo requerido para recorrer HB.

De cualquier forma, puesto que el movimiento es uniforme, se sigue que si la distancia GB es igual a la distancia BH, entonces el tiempo IE debe ser igual al tiempo EK; y si GB es mayor que BH, entonces también IE será mayor que EK, mientras que si es menor el uno, menor será también el otro. Tenemos, por tanto, cuatro cantidades: la primera es AB, la segunda es BC, la tercera es DE y la cuarta es EF. El tiempo IE y la distancia GB son múltiplos cualesquiera de la primera y de la tercera, es decir, de la distancia AB y del tiempo DE.

Ahora bien, se ha probado ya que las dos cantidaes citadas en último lugar son iguales, mayores o menores que el tiempo EK y que el espacio BH, siendo éstos múltiplos cualesquiera de la segunda y de la cuarta. En consecuencia, la primera es a la segunda o lo que es lo mismo, la distancia AB es a la distancia BC como la tercera es a la cuarta, es decir, como el tiempo DF es al tiempo EF.

Para entresacar de la demostración anterior el acertado uso que hace Galileo de la matemática griega, exponemos a continuación la interpretación moderna de dicho teorema, donde queda bien reflejada la correcta manipulación de la teoría de las proporciones de Euclides.

Esquema y análisis del Teorema I

Paso 1: explicación del problema en términos gráficos:

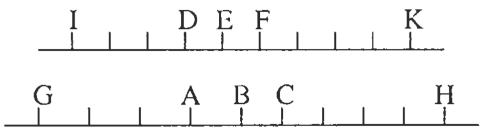
— sobre una línea se dibujan las distancias recorridas, AB y BC.

— sobre otra línea paralela se dibujan los tiempos correspondientes DE y EF.

Paso 2: enunciado de lo que se va a demostrar: distancia AB es a la distancia BC como el tiempo DE es al tiempo EF [esto es $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$].

Paso 3: prolongamos las líneas de las distancias y de los tiempos.

Paso 4: tomamos AG y DI de forma que BG y EI sean múltiplos iguales de BA y ED. Se hace lo mismo con CH y FK de manera que BH y EK sean múltiplos iguales de CB y FE.



Paso 5: por la Definición de Movimiento Uniforme: si DE es el tiempo para recorrer AB y EF es el tiempo para recorrer BC:

— EI es el tiempo para recorrer BG.

— EK es el tiempo para recorrer BH.

Paso 6: por la misma definición, si los tiempos son iguales GB = BH, entonces los espacios son iguales IE = EK.

Paso 7: por el Axioma II, si el espacio GB es mayor que el espacio BH, entonces el tiempo IE es mayor que el tiempo EK.

Paso 8: mientras que si es menor el uno, menor será también el otro.

Paso 9: recopilación, tenemos

— cuatro cantidades AB, BC, DE y EF.

— los múltiplos iguales de la 1ª (AB) y de la 3ª (DE) son GB y IE.

— los equimúltiplos de la 2ª (BC) y de la 4ª (EF) son BH y EK y sabemos que:

— $GB > BH \Leftrightarrow IE > EK$

— $GB = BH \Leftrightarrow IE = EK$

— $GB < BH \Leftrightarrow IE < EK$

Paso 10: conclusión, por la definición 5 del libro V de Euclides, la primera es a la segunda (AB es a BC) como la tercera es a la cuarta (DE es a EF).

Otra demostración galileana que incide en la correcta manipulación de las matemáticas clásicas aparece en los *Discorsi* en la última jornada, en la que se trata del movimiento descrito por los proyectiles. En esta ocasión Galileo destaca en el conocimiento de las cónicas de Apolonio. Así, en la introdución a la cuarta jornada Salvati propone la resolución de dos propiedades que caracterizan a las parábolas, propiedades que utilizará más adelante en la demostración de que la trayectoria seguida por un proyectil es una semiparábola, y que son demostradas con mucha mayor simplicidad de la que encontramos en Las Cónicas de Apolonio. En esta demostración Galileo introduce algunos elementos físico-matemáticos novedosos: el diagrama espacio-tiempo, la ley de la inercia, la composición de movimientos...;

mas la esencia del teorema recae en la teoría de las proporciones de Euclides y en el conocimiento de las cónicas que aportara en su momento Apolonio.

Otra cosa radicalmente diferente sucede cuando Galileo se plantea el estudio del movimiento uniformemente acelerado. Cuando inicia su estudio en la tercera jornada de los *Discorsi* utiliza nuevas herramientas matemáticas, que intentaremos describir.

La primera de las citas que aportamos se refiere a la propia definición de movimiento uniformemente acelerado:

Cuando observo, por tanto, una piedra que cae desde cierta altura, partiendo de una situación de reposo, que va adquiriendo poco a poco, cada vez más velocidad, ¿por qué no he de creer que tales aumentos de velocidad no tengan lugar según la más simple y evidente proproción?. Ahora bien, si obsèrvamos con cierta atención el problema, no encontraremos ningún aumento o adición más simple que aquel que va aumentando siempre de la misma manera. Esto lo entenderemos fácilmente si consideramos la relación tan estrecha que se da entre tiempo y movimiento: del mismo modo que la igualdad y uniformidad del movimiento se define y se concibe sobre la base de la igualdad de los tiempos y de los espacios, así también, mediante una subdivisión uniforme del tiempo, podemos imaginarnos que los aumentos de velocidad tengan lugar con la misma simplicidad. Podemos hacer esto en cuanto determinemos teóricamente que un movimiento es uniformente y, del modo, continuamente acelerado, cuando, en tiempos iguales cualesquiera, adquiera incrementos iguales de velocidad.

En la cita anterior advertimos de qué modo Galileo persigue la armonía matemática escondida en la Naturaleza, que parece preferir los argumentos más sencillos para explicar los motivos más simples. No obstante, la cita de Salvati esconde un elemento que no deja de aportar una nueva visión de la Matemática que debería de utilizarse en la explicación de los fenómenos físicos. En la actualidad, después de los descubrimientos de Newton y Leibniz fundamentalmente, sabemos que los fenómenos macroscópicos se explican matemáticamente con el lenguaje del Cálculo Infinitesimal, esto es con conceptos tales como los de límite, continuidad, derivada e integral. Pues bien, Galileo parece que intuye de forma acertada algunos de estos nuevos conceptos, y sin alejarse mucho del rigor decimonónico ya nos habla de éllos.

Tras estas definiciones Galileo se interna sin más preámbulos en la demostración de los teoremas relativos a las ecuaciones de movimiento del móvil con aceleración constante. Demuestra en primer lugar un teorema auxiliar, y, a continuación aborda el problema central de la cuestión, problema que en terminología actual se reduce a calcular el espacio recorrido por un móvil con movimiento continuamente acelerado como la integral de la velocidad respecto al tiempo. Es decir, aparece en términos modernos otra de las herramientas esenciales del cálculo infinitesimal: la integral.

Pues bien, Galileo asume el problema como lo haría un matemático moderno. Comienza con la construcción de un modelo gráfico (geométrico) del problema que trata de afrontar, y, de igual manera que hiciera Nicolás de Oresme, razona en términos dinámicos, apoyándose en el gráfico. Galileo se enfrenta entonces con el problema con matemáticas «nuevas»; y en el avance de la demostración se habrá de encontrar con más rudimentos de cálculo infinitesimal: la ya mencionada integral. En el teorema I, que en opinión de muchos comentaristas del pisano es de elaboración tardía, utiliza términos tales como «massa» de velocidades o «agregatum» de éstas para explicar la suma finita de un número infinito de velocidades instantáneas; esto, es la integral de la función velocidad dependiente del tiempo que transcurre.

Estos conceptos, recogidos por Galileo en sus *Discorsi* se explican de forma más clara con la ayuda de un teorema anterior (1603) conocido como *Teorema de la Distancia Doble.* Su formulación y comentarios actuales los recoge de nuevo Carmen Azcárate en la forma que anotamos a continuación:

En el movimiento acelerado, el aumento de velocidad es continuo y... los grados de velocidad que cambian de un momento a otro... son infinitos; pero podremos ilustrar mejor nuestra idea dibujando un triángulo ABC, señalando en el lado AC tantas partes iguales como se quiera AD, DE, EF, FG y trazando por los puntos D, E F, G líneas rectas paralelas a la base BC; entonces quiero que se imagine que las partes de la línea AC son tiempos iguales, que las paralelas trazadas representan los grados de velocidad acelerados que crecen por igual en tiempos iguales y que el punto A es el estado de reposo, de donde parte el móvil que en el tiempo AD habrá adquirido el grado de velocidad DH... es evidente que antes de adquirir el grado de velocidad DH, lo que ocurre en el tiempo AD, el móvil habrá pasado por infinitos grados cada vez menores, adquiridos en los infinitos instantes que hay en el tiempo DA y que corresponden a los infinitos puntos que hay en la línea DA: así, para representar la infinidad de los grados de velocidad que preceden al grado DH, es necesario imaginar infinitas líneas, cada vez menores, trazadas desde los infinitos puntos de la línea DA, la cual infinidad de líneas representará al fin (in ultimo) la superficie del triángulo ADH; de este modo imaginaremos todo espacio atravesado por el móvil con un movimiento que, comenzando en el reposo y acelerándose uniformemente, habrá consumido (aver consumato) y se habrá servido (essersi servito) de infinitos grados de velocidad creciente, conforme a las líneas infinitas que, comenzando en el punto A se suponen trazadas paralelamente a la línea HD y a las líneas IE, KF, LG, BC, continuándose el movimiento tanto como se desee.

Completemos ahora el paralelogramo AMBC y prolonguemos hasta su lado BM no sólo las paralelas trazadas en el triángulo sino la infinidad de las que uno se

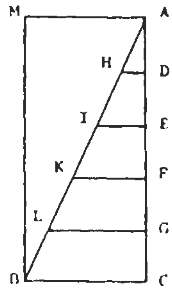


Fig. 2

imagina trazadas desde los puntos del lado AC. Entonces, así como la línea BC era la mayor de las infinitas líneas del triángulo y representaba el mayor grado de velocidad adquirido por el móvil en el movimiento acelerado, y toda la superficie del triángulo era la masa y la suma (la massa e la somma) de todas las velocidades con las que, en el tiempo AC, atravesaba tal espacio, así también el paralelogramo viene a ser una masa y un agregado (una massa ed aggregato) de otros tantos grados de velocidad, pero cada uno igual a la velocidad máxima BC; y esta masa de velocidades viene a ser el doble de la masa de velocidades crecientes del triángulo, del mismo modo que el paralelogramo es el doble del triángulo; entonces, si el móvil ha atravesado en un cierto tiempo un cierto espacio, es razonable y probable que sirviéndose de la velocidad uniforme que corresponde al paralelogramo, atraviese en el mismo tiempo y con movimiento uniforme, un espacio doble del atravesado por el movimiento acelerado.

Podemos comprobar de qué manera la demostración galileana se imbrica con los caminos de lo infinito y de lo infinitesimal, nada extraordinario por otra parte, por cuanto sabemos que el Cálculo Infinitesimal que se encuentra escondido detrás de estas pruebas implica la superación de dichas nociones tales como eran concebidas en épocas premodernas.

Como bien comenta Carmen Azcárate, lo novedoso del enunciado y de la demostración del teorema queda resumido en la frase: *...cuya infinidad de líneas representará, al fín, (in ultimo) la superficie del triángulo ADH.* Es importante este pasaje pues en él se esconden los dos conceptos elementales de todo el Cálculo. El término in ultimo (que es utilizado también por Newton en los *Principia*) esconde la noción de límite: aproximación infinitamente pequeña al valor de un límite. Por otra parte el término massa, que también utiliza Galileo con el calificativo de *agregato* está exigiendo la concreción del término integral: suma finita de un número infinito de líneas, a su vez infinitamente pequeñas. No nos queda sino destacar que estas nociones son las que mayor novedad aportan dentro de la basta bibliografía de Galileo, y que, por sí mismas anuncian la llegada de la nueva Matemática.

> De manera que podemos decir que la puerta está ahora abierta, por primera vez, a un método nuevo, acompañado por numerosos y maravillosos resultados que, en años venideros, atraerá la atención de otras mentes.

3. El Infinito y lo Infinitesimal en Galileo

A lo largo de todo el apartado anterior hemos bordeado continuamente el concepto de infinito, que, como ya indicábamos, está en la base de todo el desarrollo posterior del Cálculo Infinitesimal. Obviamente Galileo tuvo que afrontar la noción de infinito, que en su época había concitado la atención de la mayoría de los pensadores prerrenacentistas y postrenacentistas. El pisano afronta la cuestión y resuelve sólo a medias el nudo gordiano de lo infinitamente pequeño y de lo infinitamente grande. Volvamos de nuevo a los *Discorsi,* pues en esta obra encontraremos lo esencial de la teoría del infinito galileana.

Recordemos que, en esencia, en la época de Galileo el concepto de infinito se explicaba según lo aportado por Aristóteles, que suponía las categorías de infinito potencial e infinito actual. En los *Discorsi* Galileo afronta directamente el problema y pone en boca de Salvati la siguiente pregunta:

... Es ésta la razón de que, para ser más precisos, os pida que me digáis con toda franqueza si las partes extensas [3] *en una magnitud continua son, según vuestra opinión finitas o infinitas.*

A lo que responde Simplicio:

Y yo os respondo que son finitas e infinitas. Infinitas en potencia y finitas en acto. Infinitas en potencia: es decir, antes de la división. Pero finitas en acto: después de la división. Pues no hay que pensar que todas ellas estén en acto, sino sólo después de que se las divide o señale. En caso contrario se dice que están en potencia.

El diálogo continua, y entonces Salvati expone su concepción de lo infinito y, a su vez, de lo infinitamente pequeño y su noción de lo indefinidamente indivisible en los términos recogidos en palabras de Salvati, concepto que identifica con los átomos de la teoría atomista de Demócrito:

Aquí quisiera haceros notar cómo si reducimos y dividimos una línea en partes extensas (quante) y, por tanto, numerables... es imposible colocar tales partes en una longitud mayor que la que ocupaban cuando estaban conjuntamente dispuestas, una

3. «Quante» en la terminología latina.

tras otra, sin interponer entre ellas otros tantos espacios vacíos. Pero si nos imaginamos una línea reducida a partes inextensas (non quante), es decir, a la infinitud de sus indivisibles, podemos concebirla como inmensamente extendida, sin la interposición de espacios extensos, pero sí con la de infinitos indivisibles vacíos. Y esto que hemos dicho de las simples líneas debe extenderse también a la superficie y a los cuerpos sólidos, considerándolos compuestos de infinitos e inextensos átomos.

En esencia se trata de distinguir entre los términos quante y non quante. El primero tiene el sentido de una magnitud extensa y medible, o bien el de un conjunto de elementos discretos susceptibles de ser contados. El segundo habla de partes inextensas o indivisibles, y primeras componentes de las magnitudes.

Siguiendo con la discusión sobre lo infinito es momento de recordar que las contradiciones y paradojas que presenta tal concepto no se resuelven hasta la publicación de los estudios de Cantor en los últimos años del siglo XIX. Antes de ese momento las interpretaciones dadas por todos lo matemáticos no consiguieron solventar con precisión y rigor las contradiciones que surgían. Así le ocurre también a Galileo, que resuelve de forma altamente artificial la propiedad esencial, que en definitiva, permite caracterizar a todo conjunto infinito, ya sea numerable (con el cardinal de N, el conjunto de los números naturales) o no, a saber: que se pueda definir una correspondencia biunívoca entre todos sus elementos y una parte propia de él. Las palabras de Sagredo que explican la solución que encuentra Galileo a esta aparente paradoja las recogemos como sigue:

...habrá que decir que hay tantos números cuadrados como números, ya que son tantos como sus raíces, y raíces con todos los números. Decíamos al principio, sin embargo, que todos los números son muchos más que todos los cuadrados, puesto que la mayoría de ellos no son cuadrados... Con todo, en un número infinito, si pudiéramos concebirlo, habría que decir que hay tantos cuadrados como números en total.

Galileo se atreve en otro pasaje con esta paradoja de la comparación de diferentes clases o grados de infinitos (pensemos en el conjunto de los números naturales: 1,2,3,4,5,...,n,...; en la colección formada por todos los puntos de una recta, en la extensión de puntos que «caben» en un plano, etc.), lo que en terminología actual se conoce como diferente cardinalidad o potencia; y ayudándose de una demostración extremadamente intuitiva y elegante, pretende comparar el «grado» del infinito de la recta con el correspondiente al de un punto. La paradoja que se esconde en este teorema no queda resuelta en la Historia de la Matemática hasta que en 1912 Lebesgue formula con toda precisión el concepto de dimensión y de «medida» de un conjunto, resolviéndose la enigmática cuestión que plantea Galileo con el sencillo postulado que establece que puntos y circunferencias en el plano son conjuntos «de medida nula».

BIBLIOGRAFÍA

C. AZCÁRATE, *Las Matemáticas de Galileo. Estudio histórico sobre «La nueva ciencia del movimiento»*, Seminario de Historia de las Ciencias, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, 1984.

Y. CHERAQUI, *Yo Galileo,* Ed. Anaya S. A., Madrid, 1990.

J. P. COLLETTE, *Historia de las Matemáticas, I,* Siglo XXI de España Editores, S. A., Madrid, 1985.

A. C. CROMBIE, *Historia de la Ciencia: De San Agustín a Galileo, 2,* Alianza Universidad, Madrid, 1987.

DIARIO EL PAÍS, *Sábado 31 de octubre de 1992, pág. 27*
Domingo 1 de noviembre de 1992, pág. 25
Sábado 3 de octubre de 1992, Babelia, pág. 10

A. FRAJESE, *Attraverso la storia della matematica,* Felice Le Monnier, Florencia, 1977.

GALILEO GALILEI, *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias,* Edición de C. Solis y J. Sadaba, Editora Nacional, Madrid, 1976.

M. KLINE, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I,* Alianza Universidad, Madrid, 1992.

J. P. MAURY, *Galileo, el mensajero de las estrellas,* Aguilar Universal, Madrid, 1990.

V. NAVARRO, *Galileo, Textos Cardinales,* Ediciones Península, Barcelona, 1991.

A. RUPERT HALL, *From Galileo to Newton,* Dover Publications INC, New York, 1981.

LA FÍSICA DE GALILEO

Miguel Hernández González
Profesor de Física
I. B. Rafael Arozarena

1. Introducción

Galileo comienza su obra de madurez «Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias» (1638), con una exaltación de la actividad de los artesanos puesta en boca de Salviati, —portavoz de sus ideas—: «*Pienso que la frecuente actividad en vuestro famoso arsenal, Señores Venecianos, ofrece un gran campo para filosofar a los intelectos que especulan, especialmente en aquella parte que se denomina mecánica, en donde se construyen continuamente todo tipo de instrumentos y de máquinas por medio de un gran número de artesanos, algunos de los cuales han de ser muy entendidos y con un talento muy agudizado debido tanto a las observaciones que sus predecesores hayan hecho como a lo que van descubriendo ellos mismos sin interrupción*».

Reconoce así la justeza de esa batalla que, iniciada en el siglo XV y acentuada a lo largo del XVI, había enfrentado a artesanos y «filósofos». La reivindicación de que el libro de la naturaleza es mucho más rico y complejo que ningún otro libro y la afirmación de la nobleza de las artes mecánicas y del trabajo manual es perceptible en las obras de Brunelleschi, Ghiberti, Leonardo, Benvenutto Cellini, Paladio, Valturio da Rimini, Durero, Tartaglia, Giorgio Agricola, Guidobaldo del Monte, Thomas Harriot, etc.; obras que abarcan campos tan diversos como la pintura, la arquitectura, el arte militar y de guerra, la navegación, la medicina, la cerámica, la ingeniería, la hidráulica o la mecánica.

En esta perspectiva hay que entender tanto las invectivas de Rabelais en su «*Gargantúa*» (1534): «*Enojados contra la naturaleza, que ignoran, los dialécticos se han construido otra, a saber, la de las formalidades, las relaciones, las ideas platónicas y otras monstruosidades que ni los mismos que las han inventado pueden entender. A todas estas cosas les atribuyen un nombre lleno de dignidad y las llaman metafísica. Si alguien tiene un entendimiento enteramente ignorante de la naturaleza o con verdadero horror a ella, y su mente es en cambio propensa a usos abstrusos y a ensoñaciones de loco, dicen que el tal posee talento metafísico*», como las recomendaciones del marinero inglés Robert Norman, constructor de brújulas y autor de una obra «The newe attractive» (1581), al que citará con respeto Gilbert en su influyente «De magnete» (1600): «*Desearía aconsejar a los hombres instruidos que sean modestos al publicar sus concepciones y no condenen desdeñosamente a los que tratan de descubrir los secretos de sus artes y oficios y publican sus hallazgos para provecho y utilidad de los demás. Les aconsejo que no los condenen más de lo que quisieran que otros los condenasen a ellos mismos por haber prometido mucho y haber cumplido poco o nada en absoluto*».

Reflejo, todo ello, de la insatisfacción ante un saber libresco que permenece alejado de la práctica concreta. Puesta en cuestión de un cuerpo de saber al que muchos hechos desmienten [1] ; condena de la escisión entre la labor de las manos y la elaboración de las teorías científicas como bien expone Vesalio en su magna obra «De corporis humani fabrica» (1543) publicada el mismo año que el «De revolutionibus...» copernicano y, como esta última obra, de importancia fundamental para la Revolución Científica: «*Y así ha venido a suceder que esta deplorable división del arte de la medicina ha introducido en nuestras escuelas el odioso sistema hoy en boga de que uno lleve a cabo la disección del cuerpo humano y otro vaya describiendo sus partes. Este último, encaramado en lo alto de un púlpito, como una corneja, (...), repite hasta el hastío noticias relativas a hechos que él jamás ha observado directamente sino que se las ha aprendido de memoria en libros ajenos o tiene una descripción de ellos ante los ojos. El diseccionador, ignorante del arte de hablar, no está capacitado para explicar la disección a los alumnos y dispone malamente la demostración que debería seguir a las explicaciones del médico, mientras que éste nunca pone manos a la labor, sino que va orientando despreciativamente el buque con la ayuda del manual y habla*».

1. «Mediante la práctica, demuestro la falsedad de muchos aspectos de las teorías de muchos filósofos, aún de aquellos más antiguos e importantes. En menos de dos horas cualquier persona podrá darse cuenta de ello, con sólo tomarse la molestia de venir a mi laboratorio» Bernard Palissy, ceramista, en sus Discours Admirables, 1580.

Esta atmósfera preñada de contestación a los viejos saberes impregna un mundo más amplio y abierto que el imaginado por los antiguos, cuyas respuestas se han vuelto insuficientes; un mundo y una sociedad en la que se deshacen vínculos y lazos tenidos por inmutables, donde el mismo tiempo pasa de ser «tiempo vivido» que se rige por la salida y ocaso del sol a ser controlado por artificios mecánicos. Una sociedad que se disuelve y en la que se establecen nuevas relaciones económicas, sociales y políticas. Época de crisis y desasosiego en la que brillan las personalidades audaces.

En la obra del mismo Galileo encontramos ecos de esta situación, así como la apuesta decidida en favor de una actitud indagadora, de libre pensamiento, receptiva y exploratoria ante los nuevos tiempos y los nuevos hechos:

«Salviati: (...) Son sus seguidores los que le han dado la autoridad a Aristóteles y no él quien la ha usurpado o se la ha atribuido; como es más fácil ampararse bajo la protección de otro que comparecer a pecho descubierto, temen arriesgar y alejarse un solo paso de él, y antes que alterar en algo el cielo de Aristóteles, prefieren negar impertinentemente lo que ven en el cielo de la naturaleza (...).

Simplicio: Pero si se abandona a Aristóteles, ¿quién servirá de escolta en la filosofía? Nombrad a algún autor.

Salviati: Hay necesidad de escolta en los países desconocidos y salvajes, pero en los lugares abiertos y llanos sólo los ciegos necesitan guía; y quien es tal, mejor que se quede en casa, pero quien tenga ojos en la frente y en la mente, de estos se ha de servir como escolta (...). Señor Simplicio, acudid con razones y demostraciones, vuestras o de Aristóteles, y no con textos y con la nuda autoridad, porque nuestros razonamientos han de versar sobre el mundo sensible, y no sobre un mundo de papel».

En una época fluida como ésta, hemos de imaginar la actividad de Galileo Galilei (Pisa 1564 - Arcetri 1642). Su figura, —centro de múltiples controversias y símbolo de innumerables causas—, presenta tantas facetas interesantes que sería absurdo pretender agotarlas en un par de charlas. Centraremos, por ello, el contenido de nuestra exposición en su física y, con más exactitud, en su versión final, es decir, tal y como aparece en sus obras maestras de madurez —«Diálogos sobre los dos máximos sistemas del mundo» (1632) y el ya citado «Consideraciones y demostraciones sobre dos nuevas ciencias» (1638)—. Subyace en la exposición, no obstante, el reconocimiento de la importancia del «Mensaje sideral» (1610) e «Historia y demostraciones en torno a las manchas solares y sus accidentes» (1613) en lo que se refiere al descubrimiento y cartografía de un «nuevo cielo»; de «El ensayador» (1623) como texto en el que pueden rastrearse algunas de las claves del método y de la metafísica galileana; y de la «Carta a Cristina Lorena» (1615) no sólo para atisbar la sinrazón de su condena por la Inquisición sino, sobre todo, para «atrapar» algunos de los rasgos de su polémica personalidad a través de su encendida defensa de la autonomía de la ciencia frente a la religión.

No nos será, pues, posible recomponer en toda su viveza al Galileo humano, brillante y obstinado polemista, cortesano y amigo de los grandes de su tiempo al mismo tiempo que ferviente defensor del acceso del pueblo a la cultura, siempre atento a los descubrimientos técnicos y constructor, el mismo, de instrumentos de observación, visitante asiduo de forjas y armerías en las que se acumula un saber, necesitado de depuración, pero práctico; buen cristiano preocupado por el porvenir de la Iglesia, pero no creyente ciego en una autoridad que los hechos desmienten; y, por encima de todo, profundamente convencido de la dignidad humana y confiado en la suprema potencia de un intelecto cuasi divino que «es capaz de conocer como Dios, aunque no tanto como Dios».

Tampoco nos detendremos, en la condena de Galileo por el Santo Oficio, —ejemplo paradigmático del conflicto entre Fé y Razón—, ni entraremos a fondo en la polémica, suscitada por Koyré y contestada por Geymonat, Drake y otros, en torno al pretendido platonismo de Galileo y al papel de los experimentos en la construcción de la ciencia nueva. Sólo de un modo marginal, y al hilo de la exposición de la física galileana, mencionaremos la controversia entre defensores de la tesis continuista o rupturista de esta física en relación con la medieval; no profundizaremos, pues, en lo que de originalidad sustancial pudiera haber en el pisano frente a otras figuras por él oscurecidas.

Esta enumeración incompleta de temas nos da, sin embargo, la medida de la importancia de Galileo, porque sólo a las figuras realmente grandes y seminales se les escruta y discute con tanta pasión.

2. *La ciencia de Galileo*

El tema central de la física de Galileo es el movimiento, bién en relación con la controversia originada por la necesidad de dotar de base «real» al esquema copernicano bién en relación con el aparentemente menos importante movimiento local en las proximidades de la Tierra, y a él dedicará sus obras más importantes.

Observado con la perspectiva que da una historia que ahora conocemos, puede afirmarse que uno de los más importantes logros de Galileo fue su escalonamiento de los problemas físicos relativos al movimiento a fin de plantearlos en términos cuantitativos. Así, en la Jornada Tercera de los Discorsi dedicada al estudio de este tema, dirá: «*No hay, tal vez, en la naturaleza nada más viejo que el movimiento y no faltan libros voluminosos sobre tal asunto, escritos por los filósofos. A pesar de todo esto,* *muchas de sus propiedades, muy dignas de conocerse, no han sido observadas ni demostradas hasta el momento (...). En efecto, que yo sepa nadie ha demostrado que un móvil que cae partiendo del reposo recorre, en tiempos iguales, espacios que mantienen entre sí la misma proporción que la que se da entre los números impares sucesivos comenzando por la unidad.*

Se ha podido observar que los cuerpos lanzados, es decir, los proyectiles, describen una línea curva de cierto tipo; ahora bien, que tal línea es una parábola no lo ha mostrado nadie (...).

Construye Galileo, en este libro, los fundamentos de la ciencia de la Cinemática clarificando los conceptos de movimiento uniforme y movimiento uniformemente acelerado —que refiere en todo momento al movimiento de caída libre—, para finalmente obtener, por medio de demostraciones matemáticas «necesarias», la trayectoria de los proyectiles como composición de esos dos movimientos previamente analizados.

Podrá así concluir el proemio con que inicia la Tercera Jornada con estas palabras: «(...) *se abren las puertas de una inmensa e importantísima ciencia, de la que estas investigaciones nuestras pondrán los fundamentos. Otras mentes, más agudas que la mía, penetrarán, después, hasta sus lugares más recónditos* (...), consciente de dejar fuera de su investigación el tema de las fuerzas como claramente confirman las palabras de Salviati pronunciadas, durante esa Jornada, después de una larga e interesante exposición de Sagredo sobre la teoría del ímpetus:» (...) *No me parece éste el momento más oportuno para investigar la causa de la aceleración del movimiento natural y en torno a la cual algunos filósofos han proferido distintas opiniones* (...).

Este escalonamiento se mostró enormemente fértil no sólo en el estudio de la física terrestre sino, lo que quizás fue más trascendental, en el análisis de la física celeste. En efecto, la historia de la Astronomía muestra, también a toro pasado, la importancia que tuvo elegir adecuadamente un Sistema de Referencia desde el que observar (Copérnico). Al mismo tiempo, esa misma historia, señala como un hito trascendental la importancia de los datos observacionales (Tycho Brahe) y su uso para dar una descripción cinemática correcta de los movimientos planetarios (Kepler). Sólo en última instancia, después de poseer el sustrato anterior, fue posible abordar, desde una posición fundamentada, el tema clave y preguntarse por la ley que explique las razones de los movimientos (Newton).

Galileo es, sin lugar a dudas, el prototipo de científico moderno porque, sin que nosotros pretendamos negar la importancia que las ideas metafísicas pudieran tener en la articulación de su manera de ver la naturaleza, se mantuvo ajeno a las grandes teorizaciones y a diferencia de sus contemporáneos, Kepler o Descartes, embridó su imaginación. La física galileana olvida las grandes cuestiones, al menos en la formulación que hasta entonces habían tenido (llegar a comprender por qué las cosas son como las conocemos, por qué no pueden ser de otra manera y por qué es mejor que sean como son), y se ocupa casi exclusivamente del movimiento local sin siquiera aspirar a ofrecer una explicación causal. Se coloca así, resueltamente, en las antípodas tanto de la filosofía aristotélica como, en gran medida, de otros sistemas filosóficos con pretensiones de totalidad como el cartesiano: *«Esta vana presunción de entenderlo todo (aspiración de la Filosofía) no puede deberse sino al hecho de no haber entendido nada, dado que si alguien hubiera llegado al menos una vez a comprender algo perfectamente y hubiera sabido verdaderamente cómo se adquiere el conocimiento, sería consciente de que nada sabe acerca de la infinidad de las restantes verdades».*

Quizás su aportación sustancial sea, después de todo, el haber puesto de manifiesto algo que, con toda precisión, resumió Ernest Mach en frase afortunada: *«los sentidos no mienten, pero no nos dicen la verdad».*

La posición de Galileo ante el testimonio de los sentidos es, sin duda, compleja, problemática y ello va a tener una repercusión esencial para el desarrollo de nuestra moderna visión del mundo: hay que usarlos, pero en unos casos hay que concederles credibilidad en tanto que en otros hay que ir más allá de ellos. Se trata por tanto de afinarlos e ir hasta el fondo, deshaciendo equívocos aparentes y reconciliando el desajuste entre lo percibido y la realidad subyacente [2]. Habrá que interrogar a la Naturaleza de un nuevo modo y habrá que intentar, siempre que sea posible, que ésta conteste en el lenguaje que le es propio: las Matemáticas. No se podrá, por tanto, preguntar de otra forma que no sea aquella que pueda articularse en el lenguaje de las cantidades, en el lenguaje de las proporciones, los números y la Geometría. Será necesario pues, matematizar los problemas y reducir el mundo de las cualidades a un mundo de cantidades. En «El ensayador» ofrece una buena muestra de lo que entiende por esta reducción cuando aborda el tema de la naturaleza del calor: *«(...) Me queda ahora, de acuerdo con la promesa que hice antes a V.S Ilma., hacer alguna consideración sobre la proposición «El movimiento es causa del calor», mostrando de que manera me parece que pueda ser cierta. Antes, será necesario que haga alguna consideración sobre esto que llamamos calor, pues me temo que en general existe una idea bastante alejada de la verdad, si se cree que se trata de un verdadero accidente, afección y cualidad que reside realmente en la materia que sentimos que se calienta.*

2. Veis, pues, cuánta es la fuerza de la verdad, ya que la misma experiencia, que en un principio parecía mostrarnos una cosa, una vez que la observamos más de cerca, nos asegura de lo contrario (Jornada Tercera de los Discorsi..., pág. 280).

Digo que en el momento en que imagino una materia o sustancia corpórea, me siento en la necesidad de imaginar, al mismo tiempo, que esta materia está delimitada y que tiene esta o aquella forma, que en relación con otras es grande o pequeña, que está en este o en aquel lugar, en este o en aquel tiempo, que se mueve o que está en reposo, que está o no en contacto con otro cuerpo, que es una, pocas o muchas; ni con gran imaginación puedo separarla de estas condiciones; pero que deba ser blanca o roja, amarga o dulce, sonora o muda, de olor agradable o desagradable, no me siento en la necesidad de forzar mi mente para tener que representármela acomodada con tales condiciones; más bien, si los sentidos no las hubieran advertido, tal vez la razón o la imaginación por sí mismas no lo hubieran logrado nunca. Por todo ello pienso que estos sabores, olores, colores, etc., por parte del sujeto en el que parece que residen, no son más que meros nombres, y tienen únicamente su residencia en el cuerpo sensitivo, de manera que eliminado el animal sensitivo, se eliminan todas estas cualidades; sin embargo, nosotros, puesto que les hemos puesto nombres particulares y diferentes de aquellos primeros y reales accidentes, quisiéramos creer que también éstos son verdadera y realmente diferentes de aquellos».

La distinción entre las cualidades primarias (¡cuantificables!) y las cualidades secundarias es todo un programa para la acción y a ella dedicará Galileo gran parte de su esfuerzo.

3. *El movimiento*

A fin de resaltar la importancia de la aportación de Galileo a nuestro «modo de ver el mundo» —haciendo un uso crítico del testimonio de los sentidos—, así como las dificultades que esta mutación conllevó, quizás convenga ya abordar ese viejo problema que nos sirvió para ilustrar, en su momento, la concepción aristotélica del movimiento y —como ya tuvimos ocasión de mostrar— para articular el Cosmos.

El tratamiento aristotélico tanto del movimiento de caída de los cuerpos pesados (movimiento natural) como del movimiento de proyectiles (movimiento violento) había suscitado serias objeciones por las cuestiones que quedaban sin resolver. No es extraño que fuera el centro de atención de numerosos comentaristas que trataron de construir una explicación más convincente.

Recordemos los presupuestos del análisis aristotélico del movimiento así como algunas de las cuestiones que dejaba irresueltas:

1. De acuerdo con la dinámica aristotélica el mantenimiento de un movimiento exije la acción de un motor que actúa por contacto ¿cual es ese motor durante la caída de un cuerpo?, ¿cual es ese motor en el lanzamiento de un proyectil?

2. Una causa (fuerza diríamos ahora) constante produce un efecto (velocidad) constante ¿por qué se aceleran los cuerpos que caen?

Alrededor de estas cuestiones giró el trabajo de múltiples pensadores que apuntaron numerosas y muy diversas soluciones. Analizado el tema desde una perspectiva actual, puede entenderse la razón de los intentos fallidos si se tiene en cuenta que lo que había que clarificar está intimamente relacionado con conceptos tan profundos como la inercia, la fuerza y la aceleración, la conexión entre fuerza y movimiento, la acción a distancia y la gravitación, así como por una real comprensión de la acción del medio en el que el movimiento tiene lugar y por una recuperación de la posibilidad de existencia del vacío. Esta lenta clarificación condujo a la disolución de un universo, hasta entonces finito, limitado, heterogéneo y ordenado, y a su sustitución por otro con características muy distintas cuya estructura última aún está por determinar.

Abordemos pues, de un modo necesariamente sintético y a grandes rasgos, algunas estas respuestas:

3.1. Caída de graves

Para Aristóteles este movimiento hacia el «centro» es conceptuado como el movimiento natural propio de la tierra (uno de los cuatro elementos de que está compuesto el mundo sublunar). La necesidad de un motor que, actuando por contacto (motor conjunctus), mantenga el movimiento según exige lo que podríamos denominar Principio Fundamental de su Dinámica, obliga no sólo a identificarlo en este proceso de caída sino a dar cuenta de la razón de por qué los graves caen con distintas velocidades y por qué el movimiento de cada uno de ellos no es constante sino acelerado (al menos en sus fases iniciales) tal y como muestra la experiencia. A la primera cuestión no acierta a responder sin ambigüedad, por lo que el motor conjunctus queda sin aparecer, oculto tras múltiples consideraciones sobre agentes remotos, inmediatos e instrumentales, así como sobre impedimentos y remoción de impedimentos. A la segunda pregunta Aristóteles contesta (aunque no en unos términos tan precisos como los que ahora le atribuimos) suponiendo que la velocidad del cuerpo que cae es proporcional al peso e inversamente proporcional a la densidad del medio. La razón por la que un cuerpo concreto aumenta de velocidad en la caída tampoco aparece nítidamente respondida en sus obras aunque parezca insinuarse un aumento de peso a medida que el objeto cae.

La exégesis escolástica del aristotelismo volverá sobre estas cuestiones, tan insatisfactoriamente respondidas, y durante los siglos XIII y XIV someterá a revisión los presupuestos del Maestro.

Pueden distinguirse varias teorías que, en síntesis, podemos agrupar así:

1. El agente hay que buscarlo en el medio:

Es Averroes el que sostiene la tesis de que el medio en el que el objeto cae, puesto en movimiento, succiona y tira del grave hacia abajo.

2. El agente hay que buscarlo en el cuerpo grave:

Esta adscripción al propio cuerpo grave de la capacidad para iniciar y mantener el movimiento rompe, en cierta medida, con la distinción que el Maestro había establecido entre motor y móvil que, aquí, aparecen confundidos. El comportamiento del grave recuerda el de un ser animado a pesar de que se diferencie entre el motus a se propio de éste y el motus per se de aquél.

Para otra escuela, integrable dentro de la corriente explicativa con la que encabezamos este apartado, un grave cae porque al hacer ésto puede unirse a la totalidad de los cuerpos a los que está relacionado por naturaleza. Una concepción de este tipo (tendencia hacia lo similar) iba a ser defendida por Nicolás de Oresme y posteriormente adoptada por Nicolás Copérnico.

3. El agente se encuentra en la esfera celeste:

La causa del movimiento de caída habría que buscarla, según los pocos adherentes a esta teoría, parcial o totalmente en la repulsión ejercida sobre el grave por las esferas celestes. Sus características de acción a distancia la hacen singular en un contexto en el que tales explicaciones están proscritas.

4. El agente radica en el centro del universo:

Para algunos autores existía una fuerza atractiva ejercida por el lugar natural que permitía explicar, aunque a costa de usar también la idea de acción a distancia, la aceleración del móvil en su caída.

5. El agente está en toda le esfera sublunar:

De acuerdo con las ideas defendidas por Roger Bacon y Groseteste se supone que en toda la esfera sublunar actúa una cierta virtus caelestis inmaterial que, expandiéndose esféricamente desde el centro y atenuéndose a medida que nos alejamos de él, tira del grave.

Galileo hará mención a algunas de ellas cuando aborde, de modo marginal, este problema en los Discorsi:

«Salviati: Algunos la han explicado (la causa de la aceleración del movimiento natural) por la proximidad al centro; otros, por la disminución de la parte del medio que queda por atravesar; otros, finalmente, por cierta impulsión del medio ambiente, el cual, al volver a cerrarse por detrás del móvil, lo va presionando y proyectando continuamente (...)

A estas teorías les sucedió la denominada teoría del ímpetus de la que hay que buscar sus primeras expresiones en Juan Filopon, que la usó para explicar el movimiento de proyectiles, y cuyo desarrollo más acabado se encuentra en Juan Buridán (1300-1358) y la Escuela de París.

Para ilustrar el contenido de esta teoría aplicada al problema que nos ocupa, nada mejor que la exposición que el mismo Galileo pone, significativamente (¡y así no se compromete!), en boca de Sagredo: «*Me parece que de los razonamientos que acabáis de aducir se podría obtener una solución apropiada a la discutida cuestión filosófica en la que se plantea cual sea la causa de la aceleración del movimiento natural de los graves. Puesto que, según creo, en el caso del grave que es impelido hacia arriba, la fuerza imprimida por el cuerpo que lo proyecta va disminuyendo continuamente. Esta fuerza, mientras sea superior a la que actúa en sentido contrario, o sea, a la gravedad, lo impulsa hacia lo alto. Ahora bien, una vez que hayan alcanzado una y otra un estado de equilibrio, el móvil deja de ascender pasando al estado de reposo, en el cual el impulso (ímpetu) que se le había imprimido no queda aniquilado sin más ni más, sino que comienza a desaparecer lo que antes prevalecía sobre la gravedad del móvil y que era la causa de que lo hiciera subir. Al ir disminuyendo este impulso sobreañadido y comenzar, consecuentemente, a tomar ventaja el peso (gravitá), empieza la caída con lentitud a causa de la fuerza (virtú) que traía impresa el móvil y buena parte de la cual permanece todavía en éste. Ahora bien, en cuanto que dicha fuerza va disminuyendo continuamente, siendo superada cada vez más por la gravedad, el resultado es la continua aceleración del movimiento.*

Simplicio: La idea es aguda, pero tiene más de sutil que de cierta, ya que, incluso en el caso de que fuese concluyente, no serviría sino para explicar aquellos movimientos naturales a los que les precede un movimiento violento, en los que queda aún activa parte de la fuerza externamente aplicada. Allí, sin embargo, en donde no se da tal resto, sino que el móvil parte de un estado de reposo prolongado, el razonamiento pierde toda su fuerza.

Sagredo: Me parece que os equivocáis y que esta distinción que hacéis, entre los dos casos, es superflua o, para decirlo con mayor rigor, no existe. Pero decidme, ¿puede un proyectil recibir, del cuerpo que lo lanza, mucha o poca fuerza de modo que se le pueda hacer subir cien codos, veinte, cuatro o uno?

Simplicio: Sin duda alguna.

Sagredo: No es menos cierto, por tanto, que tal fuerza imprimida por el móvil podrá superar la resistencia del peso tan exiguamente que sólo la eleve a la altura de un dedo. Finalmente, la fuerza del proyector puede ser tal que se equilibre con la resistencia del peso de forma que el móvil no salga lanzado, sino que quede simplemente sostenido. Así, si cogéis en vuestra mano una piedra, ¿qué hacéis si no *es imprimirle una fuerza que la impele hacia arriba y que es equivalente al poder de su peso que la atrae hacia abajo? ¿No continuáis conservando esa fuerza impresa todo el tiempo que la sostenéis en vuestra mano? ¿Disminuye acaso dicha fuerza por mucho que la mantengáis en vuestra mano? Y este soportar que impide la caída de la piedra, ¿qué importa que se haga con vuestra mano, con una tabla o con una cuerda de la que cuelgue la piedra? Nada, en absoluto. Llegad por tanto, señor Simplicio, a la conclusión de que el hecho de que preceda a la caída de la piedra un reposo grande o breve o instantáneo, no trae consigo una diferencia, con tal de que la piedra no parta nunca sometida a una fuerza contraria a su gravedad y que sea suficiente para mantenerla en reposo»* (...) Jornada Tercera de los Discorsi.

Hay en Galileo una aproximación al tema de la caída de graves que debe mucho a Arquímedes, no en vano la física arquimedeana había sentado, en su obra «Tratado sobre los cuerpos flotantes», las bases para una clarificación de los conceptos de grave y leve que sólo pueden entenderse, desde entonces, como conceptos relativos. El físico de Pisa hará un uso intensivo de esos resultados y someterá a un detallado análisis el proceso de caída de cuerpos en medios resistentes para finalmente concluir con su osada, —pero por otra parte bien fundada—, afirmación de que *«si se eliminara absolutamente la resistencia del medio, todos los cuerpos descenderían con la misma velocidad»*. Merece la pena, como casi siempre, citar in extenso a Galileo porque difícilmente podríamos sustituir la claridad de su argumentación y la pasión de su exposición:

«Sagredo: (...) en cuanto al vacío, me gustaría escuchar la demostración que da Aristóteles, así como su refutación; y también lo que vos, señor Salviati, le objetáis (...).

Simplicio: Aristóteles, (...), arremete contra ciertos filósofos antiguos, quienes recurrían al vacío por considerarlo necesario para el movimiento, diciendo que éste no podría darse sin aquél. Aristóteles les replica demostrando que, muy al contrario, al tener lugar el movimiento es el vacío lo que hay que descartar. (...) Hace dos suposiciones, una de las cuales trata de los móviles con pesos diferentes, que se mueven en el mismo medio y la otra, de un mismo móvil moviéndose en medios diferentes. Por lo que se refiere a la primera, supone que los móviles de peso diferente se mueven en el mismo medio con velocidades distintas, las cuales mantienen entre sí la misma proporción que sus pesos respectivos. (...) En el segundo caso, parte del principio de que las velocidades de un mismo móvil, en medios diferentes, son inversamente proporcionales al espesor o densidad de tales medios (...) Y de esta segunda suposición deriva lo siguiente: dado que lo tenue del vacío supera infinitamente la corporeidad, por muy sutil que sea, de cualquier medio pleno, todo móvil que se mueva en este medio pleno durante cierto tiempo, recorriendo cierto *espacio, debería moverse por el vacío en un sólo instante: Ahora bién, el movimiento instantáneo es imposible, luego es imposible que se de el vacío como fundamento del movimiento.*

Salviati: (...) En lo que atañe al primer supuesto, dudo seriamente que Aristóteles haya hecho la experiencia consistente en tomar dos piedras, una de las cuales es diez veces más pesada que la otra, para dejarlas caer al mismo tiempo desde una altura, pongamos de cien brazas, y ver si descienden con velocidades tan diferentes que en el momento en que una está tocando el suelo, nos encontremos con que la otra no ha recorrido ni siquiera diez brazas.

Simplicio: De sus mismas palabras se deduce, sin embargo, que él lo ha experimentado, ya que dice: Vemos que el más pesado. Ahora bien, tal verse alude a una experiencia llevada a cabo.

Sagredo: Yo, sin embargo, que no he hecho la prueba, os aseguro que una bala de cañón que pese cien, doscientas o más libras, no aventajará ni siquiera en un palmo en su llegada al suelo, a una bala de mosquete de media libra, aunque la altura de caída sea de doscientas brazas.

Salviati: Sin recurrir a otras experiencias, podremos probar claramente, sin embargo, con una demostración breve y concluyente, que no es verdad que un móvil más pesado se mueva a más velocidad que un móvil más liviano, con tal de que ambos sean de la misma materia, como es el caso, sin duda, de aquellos de los que habla Aristóteles. Pero decidme antes, señor Simplicio, si admitís que a todo cuerpo pesado en caída libre le corresponde una velocidad determinada, de modo tal que no se pueda aumentar o disminuir a no ser que le hagamos violencia o le pongamos alguna resistencia.

Simplicio: Está fuera de toda duda que el mismo móvil en el mismo medio tiene una velocidad reglamentada y determinada por la naturaleza, la cual no podrá aumentarse a no ser por un impulso nuevo ni disminuirse si no es recurriendo a algo que la obstaculice y la retarde.

Salviati: Entonces, si nosotros tuviéramos dos móviles, cuyas velocidades naturales fueran distintas, es evidente que si uniésemos ambos, el más rápido perdería velocidad por obra del más lento, mientras que éste aceleraría debido al más rápido (...) Pero si esto es así, y si es verdad, por otro lado, que una piedra grande se mueve, por ejemplo, con una velocidad de ocho grados y una piedra pequeña, con una velocidad de cuatro, si las unimos, el resultado de ambas, según lo dicho, será inferior a ocho grados de velocidad. Ahora bien, las dos piedras juntas dan como resultado una más grande que la primera que se movía a ocho grados de velocidad, de lo que se sigue que tal compuesto se moverá a más velocidad que la primera de las piedras sóla, lo cual contradice vuestra hipótesis. Veis, pues, cómo suponiendo que *el móvil más pesado se mueve a más velocidad que el que pesa menos, concluyo que el más pesado se mueve a menos velocidad.*

Después de algunas precisiones Salviati, en esta primera fase argumentativa, afirma que «*los móviles, grandes o pequeños, se mueven a la misma velocidad si tienen el mismo peso específico (gravità in spezie)*» para, más adelante, criticar el que Aristóteles, al sólo tener en cuenta el peso, haya «*dejado de lado cualquier otra consideración, tanto en lo que atañe a las figuras como a los momentos mínimos, cosas sobre las que el medio influye grandemente, alterando de esta manera el simple efecto de la gravedad*».

El Diálogo prosigue sometiendo a estudio el segundo de los presupuestos sobre los que apoyaba Aristóteles su análisis de la caída «*las velocidades de un mismo móvil, en medios diferentes, son inversamente proporcionales al espesor o densidad de tales medios*». Después de mostrar las múltiples contradicciones que tal proposición acarrea, Galileo expone por medio de Salviati sus propias conclusiones «*Después de haberme asegurado de que no es cierto que el mismo móvil, en medios de diferente resistencia, se mueva a una velocidad proporcional a la penetrabilidad de dichos medios ni que, en el mismo medio, móviles de distinto peso mantengan entre sus velocidades la misma proporción que entre sus pesos (específicos) comencé a poner en relación estos dos tipos de sucesos y a observar qué es lo que ocurriría con móviles de diferente peso, colocados en medios con resistencias distintas. Pude comprobar entonces que la desigualdad de las velocidades era siempre, en los medios más resistentes, mayor que en los más penetrables y, en un grado tal, que dos móviles que descendieran en el aire diferirán poquísimo en su velocidad de caída, mientras que en el agua, el uno se moverá a una velocidad diez veces mayor que el otro. Más aún, habrá algún móvil que descienda rápidamente en el aire y que no sólo no descienda en el agua sino que permanezca inmóvil del todo o incluso que se desplace de abajo hacia arriba* (...)» y, más adelante, después de algunas consideraciones sobre las extrañas propiedades de cohesión de las gotas de agua, afirmará «(...) *Habiendo visto, repito, todo esto, yo llegaría a la conclusión de que si se eliminara absolutamente la resistencia del medio, todos los cuerpos descenderían a la misma velocidad*». Es interesante señalar que a esta afirmación llega Galileo por un proceso de abstracción, a partir sin duda de experimentos por él realizados, en el que está implícito un paso al límite «(...) *Si llegamos a constatar, efectivamente, que los móviles de diferentes pesos se mueven a velocidades cada vez menos distintas entre sí a medida que los medios atravesados son cada vez menos resistentes, y que, finalmente, en el medio más tenue de todos, aunque no sea todavía el vacío, la desigualdad de las velocidades entre móviles con pesos extremadamente desiguales es* *pequeñísima y casi inobservable, me parece que podremos admitir como conjetura altamente probable que en el vacío sus velocidades serían absolutamente iguales».*

Hay, a lo largo de esta Primera Jornada, un estudio bastante profundo de la caída de graves en medios resistentes que, apoyándose en los conceptos desarrollados por Arquímedes, distingue la existencia de dos fases en dicho movimiento, una inicial acelerada y otra final en la que se adquiere una velocidad constante (velocidad límite) «(...) *He de decir, por tanto que un cuerpo pesado tiene, por naturaleza, un principio intrínseco que lo mueve hacia el centro común de los graves (esto es, hacia el centro de nuestro globo terrestre) con movimiento continuamente acelerado; es decir, que en tiempos iguales se añaden nuevos impulsos iguales y nuevos grados de velocidad. Pero hay que entender que esto se cumple con la condición de que se eliminen todos los obstáculos accidentales y externos, entre los cuales hay uno que no podemos eliminar: es la resistencia que ofrece el medio pleno y que el móvil en su caída, ha de abrir y separar hacia los lados. A este movimiento transversal, el medio, aunque sea fluido, penetrable y en reposo, opone una resistencia mayor o menor según que deba abrirse a más o menos velocidad para dejar paso al móvil. Este, al irse acelerando continuamente, como ya he indicado, por su propia naturaleza, encuentra como consecuencia una resistencia cada vez mayor por parte del medio, retardándose por ello y disminuyendo los grados de velocidad adquiridos. Finalmente, y como consecuencia, la velocidad alcanza un punto tal, y la resistencia del medio tal magnitud, que ambas llegan a equilibrarse, eliminando la aceleración y reduciendo al móvil a un movimiento constante y uniforme, en el que se mantendrá ya siempre (...)*

3.2. El movimiento de proyectiles

A este tema se dedica la Jornada Cuarta de los «Discorsi», pero de ello ha tratado también en los Diálogos cuando utiliza la artillería (y no en sentido metafórico) para argumentar sobre la movilidad o inmovilidad de la Tierra.

También aquí existe una larga tradición que desde Aristóteles, pasando por los escolásticos, los físicos parisinos y los antecesores inmediatos de Galileo como Tartaglia y Benedetti, llega hasta él.

La imposibilidad de esconder aquí, tras el disfraz de naturaleza propia, el motor responsable del movimiento violento obligó a Aristóteles a desarrollar una teoría más completa y menos vaga que la utilizada en la explicación del movimiento natural de la caída de graves. Dirá que mientras un cuerpo está siendo arrojado, el projector está en contacto con él y actúa, por tanto, como motor conjunctus. Durante este período de tiempo pone también en movimiento las capas adyacentes del medio, junto con el projectum, comunicando además a aquél una virtus movens, una capacidad para poner algo más en movimiento. Transfiere así su función de projector a esa capa del medio que repite sucesivamente la acción del projector original aunque ligeramente debilitada. Agotada la capacidad para imprimir la virtus movens el projectum cae con su movimiento natural y el medio queda en reposo.

Otras teorías como la de la antiperistasis dejarán paso a los partidarios de la teoría del impetus cuyos rasgos generales hemos explicitado previamente y cuya naturaleza (la de este impetus) hay que entender como similar a la cualidad sonora que adquiere una campana animada por un golpe. La cualidad sonora impresa o introducida por el golpe no es natural a ésta; es tan poco natural como la cualidad motriz introducida por el lanzamiento de la piedra, pero una vez introducida o impresa, está ahí, pertenece a la campana, a la piedra, y no al badajo o a la mano. Y a partir de entonces tiene una existencia independiente y no tiene necesidad de estar continuamente unida a su fuente: el movimiento del móvil es un efecto de la fuerza (cualidad motriz) que lo anima. No hay necesidad de motor exterior para mantenerlo. Esta cualidad motriz es, al igual que el sonido de la campana, perecedero y se agota.

Galileo fiel a su compromiso esencialmente cinemático argumentará, en esta Cuarta Jornada, olvidándose de las fuerzas y apoyándose en dos resultados previamente asentados: el principio general de composición de movimientos y la composición, en este caso, de un movimiento horizontal rectilíneo uniforme con un movimiento, también rectilíneo, uniformemente acelerado. Su habilidad matemática le permitirá, como ya se mostró en la ponencia anterior sobre Galileo matemático, obtener la trayectoria parabólica del proyectil así como calcular el impulso del proyectil en un punto cualquiera de la mencionada trayectoria.

3.3. La Tierra en movimiento: argumentos y contraargumentos

Desde el momento en que Copérnico, por razones muy concretas y que tienen que ver con sus concepciones metafísicas, se decide a publicitar su modelo para el Cosmos, aparece en primer plano la cuestión del soporte físico para un esquema descriptivo que, pese a los necesarios disfraces, él siempre consideró real. Buena prueba de ello es que intentó desarrollar una física con la que dar respuesta a las serias objeciones de sus oponentes a los movimientos diurno y anual de la Tierra. También Kepler -apoyándose en la, recientemente puesta de actualidad por Gilbert, caracterización de la Tierra como un gigantesco imán - intentará dotar de realidad física al movimiento de los planetas iniciando así la mecánica celeste.

Estos intentos no son nuevos; reflejan la convicción de que resulta necesario conocer la realidad de los movimientos planetarios y que la teoría de la «doble verdad» es producto de la impotencia, de la ignorancia en torno a los mecanismos que regulan el Cosmos. ¿No intentó acaso, el mismo Ptolomeo en su «Hipótesis de los planetas» dotar de fundamentación física a su modelo de epiciclos, deferentes, ecuantes, etc.?. ¿No es ello una muestra de lo difícil que resulta sostener un modelo explicativo de los movimientos del Cosmos que «salve los fenómenos» pero olvide la realidad?

Gran parte de la tarea de Galileo en los «Diálogos» será desarrollar una física para un sistema móvil y así dirá, en la exposición de intenciones al discreto lector con la que encabeza el texto: *«En primer lugar, intentaré mostrar que todas las experiencias realizadas en la Tierra son medios insuficientes para concluir su movilidad y pueden adaptarse indiferentemente tanto a la Tierra móvil como en reposo»*.

Nada mejor para calibrar el éxito de su empresa que remitirse a las vivaces páginas de ese libro (del que nos centraremos en las dos primeras jornadas), donde Salviati, Sagredo y Simplicio argumentan y contraargumentan. En la Primera Jornada se presentan las razones aristotélicas de la separación del Cosmos en dos zonas y se cuestionan tales razones. En la Segunda Jornada se examinan los argumentos en contra y a favor del movimiento diurno de la Tierra y en la Tercera se hace lo mismo en relación con el movimiento anual para, finalmente, proponer en la Cuarta Jornada una explicación (¡falsa!) del fenómeno de las mareas apoyado en el movimiento de la Tierra.

Primera Jornada

Tal y como señalábamos previamente, en esta Jornada se dan razones para justificar la escisión del Cosmos en dos zonas y para,así, concluir que la Tierra es diferente de los cuerpos celestes.

Simplicio: «(...) los cuerpos que son generables, corruptibles, alterables, etc., son muy diversos de aquellos que son ingenerables, incorruptibles, inalterables, etc.; la Tierra es generable, corruptible, alterable, etc.: por tanto, la Tierra es muy diversa de los cuerpos celestes» «(...) La sensata experiencia nos muestra cómo en la Tierra se dan continuamente generaciones, corrupciones, etc., de las cuales, ni por nuestros sentidos, ni por la tradición o memoria de nuestros antiguos se ha visto alguna en el cielo, por tanto el cielo es inalterable, etc. y la Tierra alterable, etc. y, por tanto, diversa del cielo».

«Un cuerpo que es por naturaleza oscuro y privado de luz, es diverso de los cuerpos luminosos y resplandecientes; la Tierra es tenebrosa y sin luz, y los cuerpos celestes resplandecientes y llenos de luz, por tanto (...)».

Galileo, por medio de su portavoz, contraargumenta utilizando todo el arsenal de nuevas observaciones que el mismo ha realizado y cuyo contenido ha expuesto en sus libros más directamente astronómicos y astrofísicos: La Luna es un cuerpo rugoso lleno de montañas y cráteres, nuevas estrellas aparecen donde antes no existían, la Tierra no es el único «centro» dado que los planetas mediceos orbitan alrededor de Júpiter, el mismo Sol aparece con manchas, etc.

A lo largo de esa discusión se abordan además, con un ingenio enorme, problemas de óptica referidos a la reflexión especular y rugosa, problemas de dinámica en los que hace uso de péndulos, planos inclinados e incluso túneles horadados a través del globo terráqueo; se especula en torno a la confusa noción de gravedad y se reflexiona sobre cuestiones metodológicas en las que se reafirma tanto la importancia de la observación sistemática de la naturaleza,- la experimentación-, como la adecuación del lenguaje matemático para la descripción de los fenómenos de la naturaleza.

Al final de la Jornada Galileo proclamará audazmente: «(...) *el entender se puede tomar de dos modos, es decir, intensive y extensive; y que extensive, esto es, en cuanto a la multitud de los inteligibles, que son infinitos, el entender humano es como nulo, aunque éste entendiese mil proposiciones, porque mil, respecto del infinito es como cero: pero, tomando el entender intensive, en cuanto tal término indica intensivamente, es decir, perfectamente, afirmo que el entendimiento humano puede entender algunas proposiciones de esta manera, y por tanto, tener de ellas absoluta certeza; así son, por ejemplo, las ciencias matemáticas, es decir, la aritmética y la geometría, de las cuales el intelecto divino sabe infinitas proposiciones más, porque las sabe todas, pero, de las pocas comprendidas por el entendimiento humano, creo que el conocimiento es igual al divino en cuanto a la certeza objetiva, puesto que llega a comprender su necesidad, y sobre ésta, no parece que pueda existir seguridad mayor*».

Es este carácter de certeza indubitable de las proposiciones matemáticas lo que le resulta especialmente atrayente a Galileo, al igual que a Kepler, y ambos aparecerán plenamente convencidos de que Dios ha elegido este lenguaje para configurar la arquitectura del mundo natural: un Dios geómetra que se expresa através de sus obra máxima, —la Naturaleza—, se va abriendo paso frente a un Dios ignoto, revelado sólo por intermedio de los libros sagrados. Ecos de esta lucha pueden hallarse en las cartas que Galileo dirigió a Benedetto Castelli, Monseñor Piero Dini y, sobre todo, la que tuvo como destinataria a la Gran Duquesa de Toscana Cristina Lorena. Cartas en las que se polemiza sobre «*si hablan de Ciencia las Sagradas Escrituras*» y en las que se trata de delimitar las fronteras entre la ciencia y la fe y salvar, de este modo, la autonomía de la ciencia. Así, dirigiéndose al primero, dirá: «(...) *en las discusiones sobre cuestiones naturales habría que dejar (a las Sagradas Escrituras) en último término porque, procediendo de igual modo del Verbo Divino la Sa-*

grada Escritura y la Naturaleza (...) y habiendo convenido que las Escrituras (...), dicen muchas cosas, aparentemente y ateniéndonos al significado de las palabras, distinto de la verdad absoluta; y, por el contrario, siendo la naturaleza inexorable e inmutable, sin preocuparse para nada que sus ocultas razones y modos de obrar estén o no al alcance de la comprensión de los hombres, parece que aquéllos de los efectos naturales que la experiencia sensible nos pone delante de los ojos o en que concluyen las demostraciones necesarias, no pueden ser puestas en duda por pasajes de las Escrituras que dijesen aparentemente cosas distintas, ya que no toda palabra de la Escritura es tan inequívoca como lo es todo efecto de la naturaleza. En una época marcada por la polémica en torno a la interpretación libre del Libro Sagrado así como por la puesta en cuestión de la autoridad papal, tales declaraciones habría que calificarlas, como mínimo, de osadas. Tal osadía e ingenuidad, añadiríamos nosotros, acabaría Galileo pagándolas muy caras.

La profesión de fe en las matemáticas como clave con la que desentrañar los fenómenos naturales aparece claramente expresada en los primeros pasajes de «El ensayador» —libro de polémica en el que junto a errores de bulto sobre el objeto central de la controversia (los cometas y su naturaleza) se pueden encontrar profundos aciertos sobre metodología científico y atinadas reflexiones sobre el controvertido asunto de las cualidades primarias y secundarias—: «(...) *La filosofía (de la Naturaleza) está escrita en ese gran libro que siempre está delante de nuestros ojos —quiero decir, el universo— pero que no podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje, y comprendemos los símbolos en los que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático y los símbolos son triángulos, circunferencias y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender ni una palabra de él, sin lo cual se deambula en vano a través de un oscuro laberinto*».

El objetivo que persigue Galileo en la larga discusión que recorre la Primera Jornada del Diálogo aparece reflejado con nitidez en la recapitulación con la que se inicia la Jornada siguiente : «*hemos mostrado que la Tierra goza de las mismas perfecciones que los otros cuerpos integrantes del universo y que, en definitiva, es un globo móvil y errante como el de la Luna, o el de Júpiter, o el de Venus o el de cualquier otro planeta*».

El uso del término «perfección» para referirse a la Tierra no es neutro, como tampoco lo son las múltiples matizaciones y precisiones de las que aparece plagado este diálogo, puesto que supone una inversión clara de las propiedades atribuidas por los aristotélicos a los objetos celestes de los que Galileo afirma: «(...) *No puedo sin gran admiración, y añadiré que con gran repulsa de mi intelecto, oir que se atribuya como gran nobleza y perfección de los cuerpos naturales e integrantes del universo, el que sean impasibles, inmutables, inalterables, etc., y por contra, consideran* *como gran imperfección, el ser alterable, generable, mutable, etc; yo considero a la Tierra nobilísima y admirable por tantas y tan diversas alteraciones, mutaciones, generaciones, etc; pues si ésta no estuviera sujeta a estas alteraciones, y fuese toda ella un entero desierto de arena o una masa de rocas, o que en el tiempo del diluvio, helándose las aguas que la cubrían, hubiese quedado como un globo inmenso de cristal, donde nunca nada naciese, ni se alterase o se cambiase, la tendría por un corpacho inútil al mundo, improductivo, y para decirlo brevemente, superfluo y como si no existiese en la naturaleza* (...)». Son perceptibles aquí los ecos de ese «nuevo orden» que recorre todas las esferas de la vida social, política, cultural y también científica de la época y que hacía exclamar a Campanella, a propósito de los hombres que no ejercitan ningún arte útil a la vida humana, «(...) *son parásitos o desechos (excrementa) de la república, como lo son muchos nobles de estos tiempos*».

Segunda Jornada

Se aborda aquí la cuestión del movimiento diario de la Tierra y a lo largo de la exposición Galileo utilizará, sin reparar en medios, todo su ingenio y sus recursos, —dialécticos y observacionales—, para desmontar la visión aristotélica del Cosmos y para fundamentar una nueva.

Datos astronómicos, recogidos ya en esa Gaceta Astronómica que con el definitivo título de «El Mensaje Sideral» anuncia «*recientes observaciones realizadas por medio de un nuevo anteojo en la faz de la Luna, en la Vía Láctea, en las estrellas nebulosas y en innumerables fijas, así como también en cuatro planetas nunca vistos hasta ahora, bautizados con el nombre de astros medíceos*», y observaciones y experiencias que contradicen el articulado esquema de la física aristotélica se acumulan en las páginas de un diálogo en el que el confundido Simplicio asiste inerme a la destrucción de sus más íntimas creencias. Todo será válido para acabar con una forma de pensar que se ha convertido en freno para el avance de la ciencia.

Un listado incompleto de los temas, además de los que se refieren directamente al movimiento de la Tierra y que aquí se comentan, quizás sirva para poner de manifiesto la riqueza científica del texto, pero nada puede trasmitir y sustituir el goce que produce su lectura: defensa del principio de economía en ciencia (Ockham), la simplicidad como guía en la construcción de teorías científicas, reivindicación del libre pensamiento, el estudio de la naturaleza con un nuevo enfoque, paradojas en torno al tiempo de caída de cuerpos en caída o lanzados, la composición de movimientos y su utilización para explicar la inexistencia de efectos centrífugos, etc.

El contenido sustancial de esta Jornada es la desarticulación de las objeciones que, contra el movimiento de la Tierra, habían esgrimido Aristóteles, Ptolomeo y los anticopernicanos recientes. Simplicio hace una enumeración de las aristotélicas, en tanto que Salviati resume las demás, del siguiente modo: «*Los argumentos que se presentan sobre esta materia son de dos clases: unos guardan relación con los accidentes terrestres y ninguna con las estrellas, y otros se deducen a partir de las apariencias y observaciones de las cosas celestes. Los argumentos de Aristóteles están sacados en su mayor parte de las cosas que nos rodean y deja los otros a los astrónomos; así pues, si así os parece, examinaremos en primer lugar los deducidos de las experiencias terrestres, y después analizaremos los de la otra clase. Además, puesto que Ptolomeo, Tycho y otros astrónomos y filósofos* (...) *presentan otros nuevos, considero que bien se podrían oir todos a la vez, para no tener que hacer la réplica luego, con las mismas o similares respuestas dos veces* (...) *Todos presentan como mejor prueba, la deducida de la experiencia de los cuerpos graves, los cuales, cayendo desde lo alto, siempre lo hacen por una línea recta y perpendicular a la superficie de la Tierra; argumento considerado irrefutable, pues, si ella se moviese con la rotación diurna, al dejar caer una piedra desde lo alto de una torre, y al ser arrastrada la torre por la rotación de la Tierra durante el tiempo que la piedra emplea en su caída, aquella correría muchos centenares de brazas hacia oriente, y la piedra, en consecuencia, habría de caer otro tanto espacio desplazada de la torre. Este efecto lo confirman con otra experiencia, es decir, dejando caer una bola de plomo desde la cima del mástil de una nave en reposo y señalando el lugar exacto donde esa bola incide, que es próximo al pié del mástil; y dejando caer la misma bola desde el mismo punto de la cima del mástil, estando la nave en movimiento, se observará que el punto de incidencia estará alejado del primer punto señalado en tanto espacio cuanto ha sido el del avance de la nave; y esto lo explican diciendo que el movimiento natural de una bola puesta en libertad es el de dirigirse en línea recta hacia el centro de la Tierra. Se robustece tal argumento con la experiencia de un proyectil lanzado hacia arriba a grandísima distancia, como sería por ejemplo un proyectil lanzado por una pieza de artillería enderezada perpendicularmente sobre el horizonte;* (...) *Añaden, además, una tercera y muy eficaz experiencia, consistente en lanzar con un cañón una bala hacia levante y después otra con igual carga y con la misma elevación hacia poniente; el tiro hacia poniente resultará extremadamente más largo que el lanzamiento hacia levante: pues mientras la bala se dirige hacia occidente, la artillería es transportada por la Tierra hacia oriente y, por tanto, la bala incidirá en tierra a una distancia resultante de la suma de dos viajes: uno, el hecho por ella hacia occidente, y el otro, el del cañón, transportado por la Tierra hacia levante; y al contrario, del viaje hecho por la bala lanzada hacia levante, será necesario restarle el que la artillería ha hecho siguiéndola en su movimiento* (...) *pero la experiencia nos muestra que ambos tiros son iguales, por tanto* *la artillería está inmóvil y, en consecuencia, también la Tierra. Y, al igual que con estos tiros, sucedería con otros lanzados hacia el norte o hacia el sur, los cuales confirmarían la estabilidad de la Tierra; pues nunca se daría en la diana que se hubiese tomado como blanco, sino que siempre saldrían los tiros ladeados hacia poniente, debido al movimiento que tendría el blanco al ser transportado por la Tierra mientras la bala está por el aire. (...) Presentan Ptolomeo y sus seguidores otra experiencia, similar a la de los proyectiles, y es ésta: hay cosas que, separadas de la Tierra se mantienen largo tiempo en el aire, como, por ejemplo, las nubes o los pájaros voladores; y de la misma manera que no se puede decir que son transportados por la Tierra, puesto que no está adheridos a ella, no parece posible que puedan seguir la velocidad de esta, pues nos parecería que se movían velocísimamente hacia occidente; pues si nosotros, transportados por la Tierra recorremos en 24 horas 16.000 millas, ¿cómo podrían los pajaros resistir a una similar corriente?; más bien, al contrario, sin ninguna sensible diferencia, los vemos volar tanto hacia levante como hacia occidente, como hacia cualquier parte. Además, si cuando corremos a caballo, sentimos perceptiblemente que el aire nos golpea la cara, ¿qué viento no deberíamos sentir del oriente, transportados en tan rápida carrera contra el aire?. Y, sin embargo, este efecto no se siente en absoluto. Y he aquí aún otra muy ingeniosa razón, obtenida de una experiencia cierta, y es la siguiente: el movimiento circular tiene la facultad de expulsar, despedir y arrojar de su centro las partes del cuerpo que se mueve, siempre que el movimiento no sea demasiado lento o que esas partes no están sólidamente pegadas al cuerpo móvil (...) Y así, si la Tierra se mueve con tanta y mayor velocidad, ¿qué materia pesada, qué fuerza de cal o cemento sujetaría las piedras, a las casas y a las ciudades enteras, para que con tanta precipitada velocidad no fueran despedidas hacia el cielo? (...) Quedan las razones de la otra clase, es decir, las que guardan relación con las apariencias celestes, pero como constituyen un tema diferente (negar el movimiento anual de la Tierra), podrán ser presentadas después (...).*

La eliminación de todas estas objeciones constituye el argumento de esta trascendental Jornada cuya culminación es el que, probablemente sea uno de los pasajes más famosos de la obra galileana: aquél en el que, con su prosa clara y punzante, enuncia lo que con posterioridad pasará a denominarse Principio de Relatividad de Galileo: «(...) *Y para cerrar con un último broche todas las experiencias presentadas hasta ahora, me parece momento oportuno el mostrar cómo experimentarlas todas fácilmente. Encerraos con algún amigo en la mayor estancia que esté bajo la cubierta de algún navío y procurad que haya en ella moscas, mariposas y otros semejantes animales voladores; procuraos también un gran vaso de agua con algunos peces dentro; añádase también un recipiente, que habrá de ser colgado en lo alto* *de modo que vaya vertiendo su contenido gota a gota, sobre otro vaso colocado debajo, que sea de boca estrecha; pues bién, si la nave no se mueve, veréis como estos animales se dirigen con igual velocidad hacia todas las partes de la estancia; a los peces se los verá nadar indiferentes en todas las direcciones, y las gotas que caen del recipiente entrarán todas en el vaso colocado debajo; también si vos arrojáis alguna cosa a vuestro amigo, no necesitaréis de más fuerza para echarla hacia un lado o hacia otro, siempre que las distancias sean iguales; y si saltáis, como haciendo carrera de sacos, iguales espacios saltaréis en todas las direcciones. Observad con atención cómo estas cosas suceden así, bien que no haya por qué dudar de que así sea, pues si la nave está quieta, esto es lo normal; ahora, pues, haced mover la nave con la velocidad que se quiera; si el movimiento es uniforme y no fluctuante hacia un sitio u otro, vos no observaréis la más ligera mutación en los efectos enumeradas, y por ninguno de ellos podréis averiguar si la nave se mueve o está inmóvil.* (...) *La causa de toda esta correspondencia estriba en que el movimiento de la nave es común a todas las cosas contenidas en ella, incluido el aire, que por eso dije que la experiencia se hiciera bajo cubierta, pues si la experiencia se hiciera al aire libre y, por tanto sin que éste siguiera el curso de la nave, se verían algunas diferencias notables a los efectos nombrados; no hay duda de que el humo se quedaría atrás, al igual que el aire, las moscas y las mariposas, obstaculizadas por el aire, no podrían seguir el movimiento de la nave, si se separan de ella en un cierto espacio; más, si se mantuvieran próximas a la nave, debido a que ésta tiene una superficie desigual y, por tanto, capaz de arrastrar la parte de aire que está contigua a ella, éstas, digo, seguirían sin dificultad ni fatiga a la nave* (...)*; pero en las gotas que caen, la diferencia sería escasísima y en cuanto a los saltos y a las cosas que se arrojan, la diferencia sería imperceptible».*

4. El problema de la fuerza

El concepto de fuerza no es nada sencillo y su depuración ha sido consecuencia de un largo de proceso.

Para entender las razones por las que Galileo elude pronunciarse sobre las causas del movimiento de caída de los cuerpos, quizás convendría recordar que la noción intuitiva de fuerza va asociada al «contacto» (empujar, halar, resistir, etc.) y que en este tipo de acciones es fácilmente identificable el agente responsable (motor o resistencia). De ahí las dificultades que surgen tanto en el movimiento de caída —al que hábilmente se le denomina «natural» para así obviar sus causas motoras— como en los movimientos de objetos lanzados —fuente de innumerables problemas para toda la física desde Aristóteles—; de ahí, también, la adjudicación de una naturaleza especial a los móviles objetos celestes. En todos estos casos no aparece de modo identificable el motor reponsable del movimiento y, por ello, hasta que no se clarificó adecuadamente tanto la noción de gravedad como el principio de inercia, reinó la confusión. El mismo Galileo, una vez que hubo acabado con la separación del Cosmos en dos zonas adscribiendo a la Tierra y a los cielos unas propiedades similares, tuvo que afrontar en sus reflexiones el tema de las causas del movimiento y en un pasaje, justamente famoso, de la Jornada Segunda de los Diálogos prefigura el Principio de Inercia así como la conexión existente entre fuerza y aceleración:

Salviati: (...) Y así, pues, decidme: si vos tenéis una superficie plana, tan lisa como un espejo, y de materia dura como el acero y que no esté paralela al horizonte, sino un poco inclinada, y colocáis sobre ella una bola perfectamente esférica y de materia grave y durísima, por ejemplo, de bronce, dejada en libertad ¿qué creéis vos que haría?; ¿ no creéis vos, como yo lo creo, que ella permanecería quieta? (...).

Simplicio: Yo no creo que permaneciese quieta, sino que estoy seguro de que se movería por la pendiente con toda espontaneidad (...).

Salviati: Y esto lo afirmáis como cosa segura, no porque yo os lo haya enseñado, puesto que yo intentaba persuadiros de lo contrario, sino por vos mismo y por vuestro natural juicio. (...) Y ¿cuánto duraría en su movimiento esa bola y con qué velocidad?. Advertid que he hablado de una bola perfectamente redonda y de un plano exquisitamente pulimentado y liso, para así alejar todos los impedimentos externos y accidentales; y así también quiero que vos hagáis completa abstracción del aire, con su resistencia, y de todos los otros obstáculos accidentales, si es que otros pueden existir.

Simplicio: Lo he comprendido todo perfectamente, (...) la bola continuaría en movimiento infinitamente, si tanto durase la pendiente del plano, y con un movimiento continuamente acelerado; pues esta es la naturaleza de los cuerpos graves, (...) y cuanto mayor fuese la inclinación, mayor sería la velocidad.

Salviati: Y si alguien quisiese que esa misma bola se moviese hacia arriba sobre esa misma superficie, ¿creéis vos que se movería?

Simplicio: Espontáneamente no, sino lanzada o empujada con violencia. (...) El movimiento iría languideciendo y retardándose siempre, por ser contrario a su naturaleza, y sería más o menos largo, según el mayor o menor impulso que hubiera recibido, y según la menor o mayor inclinación del plano.

Salviati: (...) Ahora decidme lo que sucedería al mismo móvil, en una superficie que no fuese inclinada.

Simplicio: (...) Si no hay inclinación, en el plano, no se da tendencia natural hacia el movimiento, de modo que el móvil sería indiferente a la propensión y a la *resistencia al movimiento; me parece, por tanto, que debería permanecer naturalmente quieto (...).*

Salviati: Así sucedería siempre que el móvil fuera colocado en estado de reposo; pero si le fuese comunicado algún movimiento ¿qué sucedería?

Simplicio: Sucedería que se movería hacia aquella parte hacia la que fue empujado.

Salviati: Pero ¿con qué clase de movimiento, con el continuamente acelerado, como sucede en los planos descendentes, o con el sucesivamente retardado, como sucede en los planos ascendentes?

Simplicio: Yo no creo que se diera causa de aceleración o de retraso, al no haber ninguna clase de inclinación.

Salviati: Sí, pero si no existiese causa de retraso, tampoco deberá haberla de quietud; ¿cuánto tiempo creéis vos que el móvil continuaría en su movimiento?

Simplicio: Tanto cuanto durase la longitud de esa superficie no inclinada.

Salviati: Por tanto, si ese espacio no tuviese fin, ¿el movimiento por él sería igualmente sin fin, es decir, perpetuo?

Simplicio: Me parece que sí, si el móvil fuera de materia duradera.

El texto anterior, que hemos querido citar in extenso, termina con lo que parece ser una formulación del Principio de Inercia —al que Galileo tanto se aproximó en multiples ocasiones sin conseguir, sin embargo, atrapar—; al mismo tiempo, a lo largo de la argumentación, sugiere lo que más tarde será la Ley fundamental de la Dinámica: «*La fuerza no es la causa del movimiento sino la causa de que el movimiento cambie*». Encerraría, pues, gran parte de lo que va a constituir el trabajo de Newton.

La continuación del diálogo, sin embargo, muestra que Galileo dirige sus conclusiones —y en consecuencia yerra— hacia la enunciación de un Principio de Inercia Circular mediante el cual poder justificar el modelo copernicano.

Salviati: (...). *Decidme ahora: ¿cual creéis vos que es la causa de que una bola se mueva espontáneamente sobre el plano inclinado, y no sin violencia, por el elevado?*

Simplicio: Porque la tendencia de los cuerpos graves es la de moverse hacia el centro de la Tierra, y sólo por violencia pueden moverse hacia arriba, hacia la circunferencia; y en un plano descendente, cada vez se adquiere mayor proximidad al centro, mientras que en el ascendente, cada vez es mayor la separación.

Salviati: Por eso una superficie que no estuviera inclinada tendría todas sus partes igualmente distantes del centro. Pero ¿existe en el mundo alguna de esas superficies?

Simplicio: No faltan; he ahí la del globo terrestre, si fuera lisa y no como en realidad es, quiero decir, escabrosa y montañosa; pero existe la del agua, si ésta está plácida y tranquila.

El movimiento perdurará sobre esa superficie ideal circular en la que se ha convertido el plano horizontal galileano. Mediatizado por el mundo real Galileo no dará el salto hacia un mundo vacío en el que una bola se mueve en línea recta con un movimiento sin fin e infinito. Será a Descartes, que como físico no tiene la consistencia y solidez de Galileo, al que corresponderá sin embargo el honor de «haber proporcionado una fórmula 'clara y distinta' del principio de inercia».

Con estas claves resulta menos llamativo el «olvido», en la obra de Galileo, de todo el trabajo de Kepler, —al que considera un místico más que un físico y del que confiesa *haber pensado siempre que poseía una inteligencia sutil y libre (aunque tal vez demasiado libre), siendo mi manera de filosofar muy otra que la suya*—, y en concreto del relativo a la ruptura del mito de la circularidad.

En efecto, ya se señaló en una ponencia anterior que la introducción de órbitas irregulares (excéntricas recorridas con velocidad no uniforme o elipses) pone en un primer plano la cuestión clave, alrededor de la que girará la Astronomía hasta Newton: ¿cual es la causa (la fuerza) responsable del movimiento de los objetos planetarios? Uno de los primeros intentos por responder a esta cuestión la protagoniza el mismo Kepler quien encuentra en los estudios de Gilbert sobre el magnetismo un soporte, y así imaginará al Sol rotante como fuente de unos efluvios que arrastran a los planetas y los desplazan en sus trayectorias. Galileo verá en estas misteriosas acciones una reintroducción del animismo y rechazará esa acción a distancia aferrándose a un sistema, el Copernicano, que se automantiene apoyándose en el Principio de Inercia circular. Tampoco aceptará esta acción a distancia el filósofo francés Descartes quien, sin embargo, reconoce los hallazgos keplerianos y articula, para dar cuenta de esas desconocidas fuerzas, una física corpuscular en un espacio pleno plagado de vórtices.

Este copernicanismo y este horror a la acción a distancia explican algunos de los notorios errores del científico de Pisa quien, en «El ensayador» (1623), sostendrá contra toda evidencia la naturaleza atmosférica de los cometas cuyas órbitas alargadas no se ajustan al patrón copernicano y cuyo movimiento resulta, en su esquema físico, inexplicable:

5. Algunas consideraciones sobre el Método

Quizás sea llegado el momento de señalar algunas de las precisiones que Galileo hace, en diferentes textos, a propósito del modo en el que se descubren las leyes de la naturaleza.

«Salviati: (...) afirmo que hemos visto en nuestro siglo accidentes y observaciones tan nuevas y de tal magnitud, que no me cabe ninguna duda que, si Aristóteles

viviera en nuestro tiempo, no vacilaría en cambiar de opinión. Lo que se deduce de su mismo modo de filosofar; pues cuando él escribe que los cielos son inalterables, etc., porque nunca se ha visto que se genere alguna cosa nueva, o disuelta alguna de las antiguas, deja entender implícitamente que cuando se vean tales accidentes, habrá de juzgarse lo contrario, y anteponer, como conviene, la experiencia sensorial al razonamiento natural, pues aunque no hubiese querido hacer caso de los sentidos, al menos no hubiera argumentado la inmutabilidad por el hecho de no ver sensorialmente mutación alguna.

Simplicio: Aristóteles establece el principal fundamento de su discurso a priori, mostrando la inalterabilidad necesaria del cielo en sus principios naturales, manifiestos y claros; y lo mismo establece luego a posteriori, por los sentidos y por las tradiciones de los antiguos.

Salviati: Ese que vos decís es el método con que escribió su doctrina, pero no creo que coincida este método con el que usó para investigar lo que escribió; pues estoy casi seguro de que él procuró en primer lugar, por vía de los sentidos, de las experiencias y de las observaciones, asegurarse al máximo de la conclusión, y luego anduvo buscando los medios para poderla demostrar, ya que así procede la mayor parte de las veces en las ciencias demostrativas; esto sucede porque, cuando la conclusión es verdadera, sirviéndose del método resolutivo, fácilmente se encuentra alguna proposición ya demostrada o se llega a cualquier principio claro por sí mismo; pero si la conclusión es falsa, se puede proceder al infinito sin encontrar nunca verdad alguna conocida, si antes no encontrase algún imposible o absurdo manifiesto».

Galileo aparece reivindicando aquí, claramente, la importancia de la empiria para estudiar la naturaleza y, en su caso, ese estudio exige, por estar aquella escrita en el lenguaje de las matemáticas, cuantificación, medida. Dicho en otras palabras, la realización de experimentos. El juez que dictamina sobre la certeza o no de una teoría es esta observación matizada y controlada.

También se permite Galileo licencias expositivas, —en un sentido próximo al que atribuye a Aristóteles—, cuando en distintas partes del diálogo anterior afirma que no le resulta necesario hacer experimentos para afirmar que la bola dejada caer desde lo alto del mástil de un barco navegando en aguas tranquilas caerá al pié de aquél o para mantener que una inclinación de 45° provoca un lanzamiento de alcance máximo: «*Simplicio: Conque vos no habéis hecho no cien, sino ni siquiera una prueba, ¿y afirmáis su resultado con tan completa seguridad?. Yo vuelvo a mi incredulidad y continúo convencido de que la experiencia ha sido hecha por los principales autores que se sirven de ella, y de que muestra lo que éstos afirman.*

Salviati: Yo, sin experiencia, estoy seguro de que el efecto será tal como os digo, porque así es necesario que sea, y añado además que vos mismo sabéis también *que no puede suceder de otro modo, aunque fingís o simuláis fingir no saberlo. Pero yo soy tan buen arreglador de cerebros que os lo haré confesar a la fuerza* (...).

La necesidad de convencer a sus oponentes y, no lo olvidemos, por elevación a la curia romana y al mismísimo Papa de que lo que se defiende no es herético o contra natura explica, a nuestro juicio, el uso recurrente de la doctrina platónica de la reminiscencia.

Por ello, extraer de aquí argumentos para sostener un esencial platonismo de Galileo nos parece excesivo.

Por otra parte, la razón de esta boutade galileana en torno a lo innecesario de la prueba experimental, hay que buscarla más bien en el hecho de que toda ley a la que se llega por medio de la medición tiene necesariamente una forma matemática, razón por la cual su manejo (su dinámica propia) en las convenientes proporciones revelará consecuencias no menos ciertas que la medida necesariamente corroborará.

No hay duda de que, a lo largo de este proceso de mutua interrelación entre experimento y construcción teórica, Galileo llegó a darse cuenta de que las matemáticas eran fundamentales para la física, no porque el mundo de papel de las matemáticas fuera más interesante que el mundo sensible que nos rodea, sino porque el lenguaje de las matemáticas le permitía leer el «gran libro de la naturaleza».

Galileo al afirmar que el libro de la naturaleza está escrito en el lenguaje de las matemáticas y que sólo las cualidades primarias son susceptibles de conocimiento científico objetivo demarca el terreno de la Ciencia.

Conocer científicamente será, pues, establecer relaciones (efecto-causa), —expresadas en ese lenguaje—, entre cantidades que miden cualidades primarias. A estas relaciones llegará observando la Naturaleza con una mirada «cargada de teoría». Hay, pues, un proceso de inducción guiado por una pregunta «interesada». Acertar con la pregunta exige imaginación creadora e intuición científica.

La inducción incorpora abstracción, idealización a fin de «aislar» lo relevante (de ahí la importancia de los experimentos, a veces mal llamados mentales), desmenuzamiento de la complejidad real de un fenómeno y reducción a sus esqueleto sustancial. Se construye, así, un modelo al que se incorporan relaciones matemáticas de las que se extraen consecuencias apoyadas en la dinámica interna del lenguaje, para, finalmente, someter al veredicto de la experiencia las conclusiones extraídas.

Este proceder ha venido repitiéndose, con extraordinaria fortuna y con variantes de mayor o menor detalle, en todos los ámbitos de la Ciencia. Constituye la esencia del denominado Método Científico.

BIBLIOGRAFÍA

Biografías de Galileo:

DRAKE S. Galileo. Ed. Alianza Bolsillo.

GEYMONAT L. Galileo. Ed. Tecnos.

SHEA W.R. La revolución intelectual de Galileo. Ed. Ariel.

Estudios sobre aspectos de la obra de Galileo:

KOYRÉ A. Estudios Galileanos. Ed. Siglo XXI.
Estudios de historia del pensamiento científico. Ed. Siglo XXI.
Del mundo cerrado al universo infinito. Ed. Siglo XXI.

COHEN I.B. El nacimiento de una nueva física. Ed. Alianza Univ.

HALL A.R. From Galileo to Newton. Ed. Dover.
La Revolución Científica 1500-1750. Ed. Grijalbo.

Obras de Galileo:

GALILEO GALILEI El mensaje sideral. Ed Alianza Bolsillo.
Carta a Cristina Lorena. Ed. Alianza Univ.
Opúsculos sobre el sistema copernicano. Ed. Alianza Bolsillo.
El ensayador. Ed Sarpe.
Diálogo sobre los dos sistemas máximos. Ed. Aguilar.
Consideraciones y demostraciones sobre dos nuevas ciencias. Ed. Editora Nacional.

Otras obras consultadas:

COPERNICO N. Sobre las revoluciones de los orbes celestes. Ed. Editora Nacional.

DIJKSTERHUIS E.J. The mechanization of the World Picture. Princeton.

ROSSI P. Los filósofos y las máquinas 1400-1700. Ed. Labor.

LA GEOMETRÍA DE LOS INDIVISIBLES: BUENAVENTURA CAVALIERI

José Barrios García
Dpto. de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Antecedentes históricos

El cálculo de áreas y volúmenes constituye uno de los temas recurrentes de las matemáticas desde la más remota antigüedad hasta nuestros días, y en haber hallado una solución adecuada basan éstas buena parte de su prestigio. Las técnicas desarrolladas por las diferentes civilizaciones en este largo espacio de tiempo recorren un sinfín de métodos. En lo que podemos llamar matemáticas occidentales la búsqueda de soluciones exactas en línea con los descubrimientos de los geómetras griegos llevará primero al método de exhaución y después al cálculo integral.

La naturaleza del continuo geométrico forma parte de los problemas relacionados con esta búsqueda, pues ¿de qué están formados un segmento de recta, un trozo de plano o una porción de volumen? ¿Qué le sucede a una figura geométrica cuando la dividimos una y otra vez en partes cada vez más y más pequeñas?

Tal cuestión suscitó un debate amplio y profundo entre los geómetras griegos que no cabe reproducir aquí. Señalemos tan sólo que hubo dos grandes posicionamientos: los partidarios del atomismo frente a los partidarios de la infinita divisibilidad.

Representantes destacados de ambas posturas fueron Demócrito de Abdera (460-370), y Aristóteles de Estagira (384-322), respectivamente [1].

Demócrito sostuvo que los cuerpos físicos estaban compuestos en última instancia por átomos indivisibles y parece haber aplicado esta idea a las matemáticas. Dado que sus escritos geométricos se han perdido sólo cabe especular sobre la verdadera naturaleza de sus ideas, pero algunos autores han argumentado que estas le permitieron descubrir que dos pirámides triangulares con igual base y altura tienen el mismo volumen. Para ello habría descompuesto los dos pirámides en un número indefinido de secciones planas o láminas indefinidamente delgadas paralelas a las bases. Comparando entre sí las secciones que se encuentran a la misma altura, y viendo —por semejanza— que son iguales, concluiría que las dos pirámides tienen el mismo volumen (Figura 1).

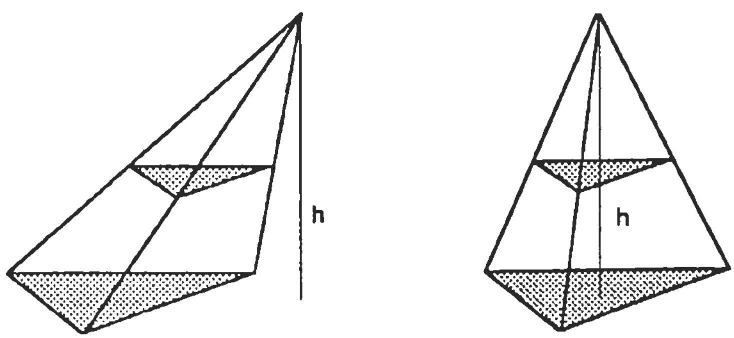


Fig. 1

Este resultado le permitiría argumentar que el volumen de una pirámide (o un cono) es la tercera parte del prisma (cilindro) que tiene su misma base y altura. Para ello basta ver que toda pirámide triangular define un prisma, con su misma base y altura, que puede descomponerse en tres pirámides, todas de igual base y altura, una de las cuales es la dada. El resultado se extiende fácilmente a cualquier pirámide de base poligonal, y en el caso del cono se consigue aumentando el número de lados de la pirámide (Heath 1981: 176-181).

1. Ya antes Zenón de Elea (490-425) había dirigido sus famosas cuatro paradojas sobre el movimiento a cuestionar tanto la teoría atomista (paradojas de La Flecha y El Estadio), como la infinita divisibilidad (paradojas de La Dicotomía y de Aquiles). Ver Heath (1981: 275).

Estos teoremas sólo serían rigurosamente demostrados más adelante por Eudoxo de Cnido (400-347), empleando el método de exhaución desarrollado por él [2]. Más tarde pasarían a formar parte del Libro XII de *Los Elementos* de Euclides (322-285).

Aristóteles sostuvo que al dividir el continuo en trozos cada vez más y más pequeños se seguirían obteniendo continuos de la misma naturaleza que el de partida, sin que se pudiera aislar nunca un elemento mínimo indivisible. Según esta opinión, la prueba de Demócrito sería inaceptable.

Como en tantas otras cuestiones, el enfoque de Aristóteles —acreditado por Eudoxo y Euclides— prevaleció en la comunidad científica. Pero no por unanimidad, Arquímedes de Siracusa (287-212), Nicolás de Oresme (1323-1382), Galileo Galilei (1564-1642), Johann Kepler (1571-1630), Buenaventura Cavalieri (1598-1647) y Evangelista Torricelli (1608-1647), entre otros, no dudaron en avanzar por la dirección que ya señalara Demócrito. Entre quienes lo hicieron de forma más decidida figuran Arquímedes y Cavalieri.

Arquímedes, en efecto, utiliza en *El Método* el tipo de argumentación atribuido a Demócrito planteando la posibilidad de calcular áreas y volúmenes de figuras operando mediante métodos mecánicos sobre las secciones que las componen. Considera, sin embargo, que este tipo de razonamiento, aunque de gran valor heurístico, no proporciona una demostración totalmente satisfactoria de los resultados que deben ser verificados rigurosamente por otras vías [3]. En la práctica, y hasta la creación del cálculo infinitesimal en el siglo XVII, el método de exhaución.

Cavalieri será quien —aún manteniendo una postura ambivalente respecto a la composición del continuo— se atreva a proponer una fundamentación rigurosa del cálculo de áreas y volúmenes de figuras mediante los infinitos segmentos rectos o infinitas superficies planas que las componen, y que él llama los *indivisibles* de la figura. Para ello intentará, con relativo éxito, una fundamentación rigurosa de sus indivisibles basándose en la teoría de magnitudes de Euclides. Su sofisticado método le permitirá obtener importantes resultados sobre cuadratura y cubatura de figuras lo que explica el éxito que obtuvo en su época, especialmente en la versión simplificada desarrollada por su amigo Evangelista Torricelli.

Sin embargo, tanto las dudas que planteaban sus fundamentos como la oscuridad con que escribió sus tratados motivaron que su obra fuese contradictoriamente entendida por los matemáticos, sucumbiendo pronto ante el empuje de los mucho más potentes y eficaces métodos algebraicos que por entonces se gestaban en Europa.

2. Sobre el método de exhaución ver Delgado (1992).

3. Una discusión sobre los motivos que podrían haber inducido a Arquímedes a negar la rigurosidad de su método puede verse en Vega (1992).

En nuestra ponencia trataremos de acercarnos al papel que jugaron sus ideas en el desarrollo del cálculo infinitesimal.

Biografía

Buenaventura Cavalieri nace en Milán hacia 1598. Durante su juventud en esa ciudad entra en contacto con la orden de los Jesuatas [4] en la que ingresa a los 17 años y donde permanecerá hasta su muerte. Entre 1616 y 1620 (con excepción de un año de estancia en Florencia hacia 1617) reside en el convento de la orden en Pisa, ciudad en la que muy pronto atiende las lecciones de matemáticas del benedictino Benedetto Castelli, discípulo a su vez de Galileo Galilei.

Fig. 2

Los progresos de Cavalieri son rápidos. En 1617 entra en contacto con Galileo. En 1618 sustituye temporalmente a Castelli en sus clases de matemáticas en Pisa. En 1619 aspira a una plaza vacante de profesor de matemáticas en la universidad de Bolonia, que en su opinión no consigue por la animadversión de Roma hacia su orden. Entre 1620 y 1628 imparte clases de matemáticas en Milán, Lodi y Parma. En 1629 obtiene, probablemente por medio de Galileo, una plaza temporal de profesor en la Universidad de Bolonia que ocupará hasta su muerte en 1647.

Entre 1619 y 1641 mantiene una abundante correspondencia con Galileo a quien envía más de un centenar de cartas sobre temas científicos que éste responde esporá-

4. Esta orden fue creada en 1367 por el papa Urbano V para prestar ayuda a las víctimas de la peste bubónica que asolaba Europa por esas fechas. Con el tiempo la orden entró en declive y su rama masculina fue disuelta por el papa Clemente IX en 1668. Su poca difusión y corta existencia ha motivado que, en ocasiones, Cavalieri haya sido erróneamente considerado miembro de la mucho más conocida orden de los Jesuitas.

dicamente. También mantiene una estrecha relación con Torricelli, e intercambios con científicos de distintos países europeos.

La Figura 2 muestra un retrato de Cavalieri conservado en el archivo fotográfico del Civici Musei de Milán (Andersen 1985: 290).

Obra publicada

Sus intereses científicos se centraron principalmente en la geometría, los logaritmos, y la astrología, materias sobre las que llegó a publicar once libros:

1632a *Directorium generale vranometricum, in quo trigonometriae logorithmicae fundamenta (...).* Bolonia.

1632b *Lo Specchio vstorio ouero Tratatto delle settioni coniche.* Bolonia (2ª ed. Bolonia 1650).

1635 *Geometria indiuisibilibus continuorum noua quadam ratione promota.* Bolonia. (2ª ed. Bolonia 1653). (Traducción al ruso comentada de los Libros I y II por S. J. Lure, Moscú-Leningrado 1940. Traducción al italiano y notas por Lucio Lombardo-Radice, Turín 1966).

1638 *Compendio delle regole de triangoli.* Bolonia.

1639a *Centuria di varii problemi. Per dimos trare l'uso e la facilità de logaritmi nella gnomonica, astronomica, geograffia, altimetria, pianimetria, stereometria, & aritmetica prattica.* Bolonia.

1639b *Nuoua pratica astrologica.* Bolonia.

1640 *Appendice della nuoua pratica astrologica.* Bolonia.

1643 *Trigonometria plana et sphaerica.* Bolonia.

1646 *Trattato della ruota planetaria perpetua e dell'uso di quella.* Bolonia. (Publicado bajo el pseudónimo de Silvio Filomantia).

1647 *Exercitationes geometricae sex.* Bolonia (reimpresión, con introducción de Enrico Giusti, Bolonia 1980). (Traducción al ruso comentada del Libro IV por S. J. Lure, Moscú-Leningrado 1940. Traducción al italiano del Libro III y notas por Lucio Lombardo-Radice, Turín 1966).

S. f. *Tavola prima logarithmica. Tavola seconda logarithmica.* Bolonia.

El método de los indivisibles

Aunque desde 1621 mantenía correspondencia con Galileo sobre su método, las dudas que le seguían planteando sus fundamentos hicieron que retrasara su publicación hasta 1635 (*Geometria*) y 1647 (*Exercitationes*), las dos obras donde se ocupará de exponer con detalle los resultados alcanzados [5]. El contenido de estos dos libros sería el siguiente (Andersen 1985: I.3):

Geometria 1635 (siete libros):

Libro I: Expone cuestiones previas referentes a figuras planas y sólidas. Teoremas introductorios.

Libro II: Presenta una primera versión del método de los indivisibles (método colectivo), y prueba algunos teoremas generales sobre colecciones de indivisibles.

Libros III, IV y V: Aplica los teoremas del Libro II a la cuadratura y cubatura de figuras relativas a las secciones cónicas.

Libro VI: Lo dedica a la cuadratura de la espiral y otros resultados sobre cilindros, esferas, paraboloides y esferoides.

Libro VII: Presenta una segunda versión del método de los indivisibles (método distributivo).

Exercitationes 1647 (seis libros):

Libro I: Presenta una versión revisada del método colectivo, sugiriendo algunas simplificaciones.

Libro II: Desarrolla una nueva presentación del método distributivo.

Libro III: Defiende su método frente a las acerbas críticas del suizo Paul Guldin (1577-1642).

Libro IV: Presenta una generalización del método colectivo que le permite trabajar con curvas algebraicas de grado mayor que dos.

Libro V: Determina centros de gravedad basándose parcialmente en el método de los indivisibles.

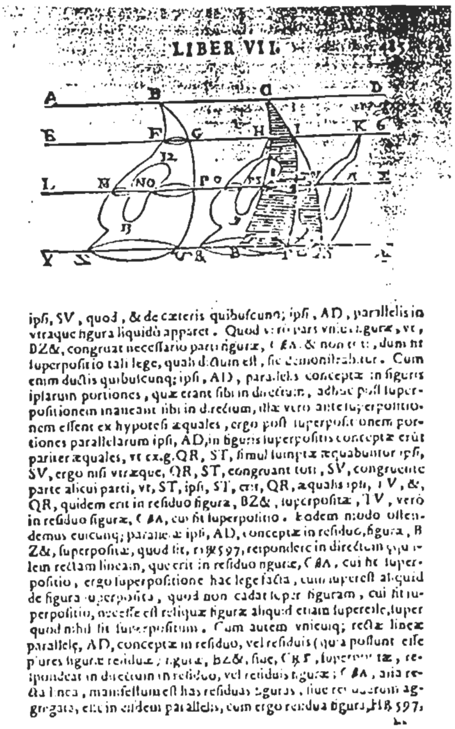
Libro VI: Presenta material misceláneo.

Cavalieri intentó dotar a su cálculo con indivisibles de todo el rigor de la matemática griega elaborando una sofisticada maquinaria conceptual que resulta muy difícil de resumir en unos pocos folios sin traicionar a su autor, dada la extensión, dificultad, originalidad y oscuridad de su obra, por otra parte de muy difícil acceso [6].

5. La larga gestación de estos dos libros, y sus discusiones con Galileo sobre el manejo de infinitas líneas (en acto) pueden verse en Andersen (1985: I.4, IX.1). Al parecer Galileo, aunque él mismo utilizara los indivisibles en alguna ocasión, no terminó nunca de aprobar el método de Cavalieri.

6. Afortunadamente, una excelente recopilación de sus ideas —muy a menudo malinterpretadas en la literatura— puede verse en Andersen (1985), donde el lector encontrará una completa y valiosa fuente de datos e interpretaciones sobre el método y su difusión por los círculos matemáticos de la época. En gran parte mi exposición se basa en dicho trabajo. Ver también Andersen (1984).

En la Figura 3 reproducimos una página del Libro VII de *Geometría* (Struik 1969: 212). Como se observa en ella, Cavalieri procede de forma retórica sin apenas simbolismo algebraico, lo que hace farragosa y difícil la lectura de sus obras.



ipsi, SV, quod, & de cæteris quibuscunq; ipsi, AD, parallelis in
vtraque figura liquidò apparet. Quod vero pars vnius figuræ, vt,
BZ&, congruat necessario parti figuræ, C [illegible], & non toti, dum fit
superpositio tali lege, quali dictum est, sic demonstrabitur. Cum
enim ductis quibuscunq; ipsi, AD, parallelis conceptæ in figuris
ipsarum portiones, quæ erant sibi in directum, adhuc post super-
positionem maneant sibi in directum, illæ vero ante superpositio-
nem essent ex hypotesi æquales, ergo post superpositionem por-
tiones parallelarum ipsi, AD, in figuris superpositis conceptæ erũt
pariter æquales, vt ex.g. QR, ST, simul sumptæ æquabuntur ipsi,
SV, ergo nisi vtræque, QR, ST, congruant toti, SV, congruente
parte alicui parti, vt, ST, ipsi, ST, erit, QR, æqualis ipsi, TV, &,
QR, quidem erit in residuo figuræ, BZ&, superpositæ, TV, verò
in residuo figuræ, C [illegible], cui fit superpositio. Eodem modo osten-
demus cuicunq; parallelæ ipsi, AD, conceptæ in residuo, figuræ, B
Z&, superpositæ, quod sit, [illegible]597, respondere in directum æqua-
lem rectam lineam, quæ erit in residuo figuræ, C [illegible], cui fit super-
positio, ergo superpositione hac lege facta, cum supersit aliquid
de figura superposita, quod non cadat super figuram, cui fit su-
perpositio, necesse est reliquæ figuræ aliquid etiam superesse, super
quod nihil sit superpositum. Cum autem vnicuiq; rectæ lineæ
parallelæ, AD, conceptæ in residuo, vel residuis (quia possunt esse
plures figuræ residuæ) figuræ, BZ&, siue, [illegible], superpositæ, re-
spondeat in directum in residuo, vel residuis figuræ, C [illegible], alia re-
cta linea, manifestum est has residuas figuras, siue [illegible]
gregata, esse in eisdem parallelis, cum ergo residua figura, [illegible] 597,

Fig. 3

La esencia del método consiste en dividir las figuras planas en segmentos rectos paralelos a un segmento dado. Análogamente, se dividen los volúmenes en superficies planas paralelas a un plano dado. Estos elementos mínimos en que divide a una figura los llama Cavalieri los *indivisibles* de la figura. Sobre esta base mantendrá que: dos superficies planas o dos volúmenes cualesquiera (con la misma altura) guardarán entre sí la misma relación que guarden sus indivisibles, dicho de otra manera, comparando sus indivisibles podremos conocer la relación que guardan sus áreas o volúmenes. Sin embargo, presenta dos modos de llevar a cabo esta comparación:

Método colectivo: se comparan todos los indivisibles de una figura tomados de forma colectiva, con todos los indivisibles de la otra figura tomados también de forma colectiva.

Método distributivo: se comparan por separado cada uno de los indivisibles de una figura con el correspondiente indivisible de la otra figura [7].

Dado que Cavalieri le dio preeminencia al primer método frente al segundo, nos ocuparemos casi exclusivamente de él, señalando con cierto detalle su fundamentación y algunos de los resultados alcanzados.

Las colecciones de indivisibles

Desarrollando con habilidad su método, Cavalieri elabora diversos tipos de colecciones de indivisibles que le permiten tratar una gama muy variada de figuras geométricas.

Entre estas colecciones se encuentran las formadas por *todos los puntos* de un segmento recto, *todas las líneas* de una figura plana, *todos los planos* de una figura sólida, *todas las figuras planas similares* construidas sobre las líneas de una figura plana dada, o *todos los rectángulos* formados a partir de dos figuras planas dadas. Detallemos algunos de estos conceptos (Andersen 1985: III-IV).

Todas las líneas TL(F)

Si a través de tangentes opuestas a una figura plana dada se dibujan dos planos paralelos e indefinidamente extendidos, bien perpendiculares o bien inclinados al plano de la figura dada, y si uno de los planos paralelos se mueve hacia el otro permaneciendo paralelo con él y hasta coincidir con él; entonces las rectas individuales que durante el movimiento forma la intersección entre el plano que se mueve y la figura dada, tomadas colectivamente, se llaman todas las líneas (omnes lineae) de una figura tomadas con una de ellas como directriz (regula); esto es cuando el plano es perpendicular a la figura [*recti transitus*]. *Sin embargo, cuando los planos están inclinados con respecto a la figura las líneas se denominan todas las líneas de la misma figura dada con respecto a un tránsito oblicuo (obliqui transitus), la directriz sigue siendo, de forma similar, una de ellas.*

(*Geometria*, Definición II.1)

A la colección de todas las líneas de una figura plana F tomadas respecto de una *regula*, la notaremos por TL(F), asumiendo que no hay confusión respecto a la *regula* (Figura 4) [8].

7. La creación de este segundo método parece haber sido un intento de mejorar la fundamentación de su teoría frente a las reticencias que mostraba Galileo por el método colectivo (Andersen 1985: IX.1).

8. En esta y en las siguientes definiciones simplificamos ligeramente la notación propuesta por Andersen (1985).

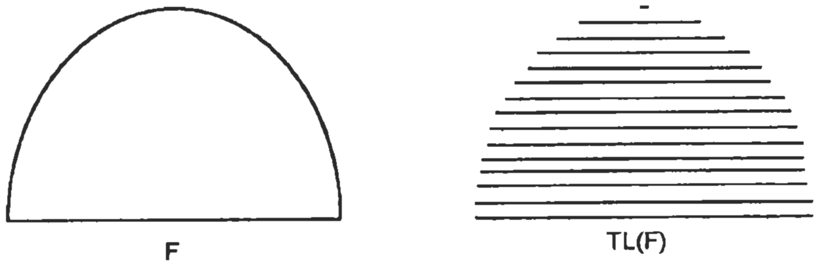


Fig. 4

Todos los planos TP(S)

En la siguiente definición (II.2), Cavalieri extiende el concepto a figuras sólidas que posean dos planos tangentes opuestos. Así, *todos los planos* de una figura sólida S, tomando uno de los planos tangentes como *regula*, son todas las figuras planas TP(S) que produce la intersección de la figura sólida con un plano que se mueve entre los dos planos tangentes paralelamente a la *regula* (Figura 5).

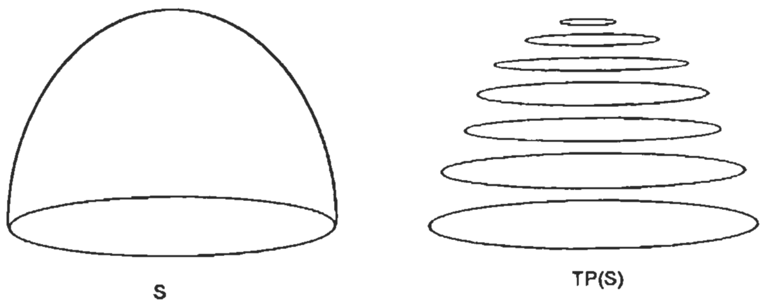


Fig. 5

Todos los cuadrados TC(F)

Dada una figura plana F, Cavalieri también considera colecciones de figuras planas, paralelas y semejantes entre sí, construidas sobre cada una de las líneas de F. En particular, *todos los cuadrados* de F, que notaré TC(F), serán todos los cuadrados que tienen por lado una línea de F (Figura 6).

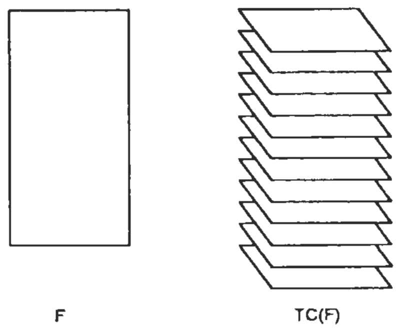


Fig. 6

Todas las potencias n-ésimas TL^n (F)

Cavalieri extiende el concepto anterior considerando para una figura plana F lo que llamaremos *todas las potencias n-ésimas* de las líneas de F, y notaremos por TL^n (F). En los casos n = 1, 2 se tiene TL^1 (F) = TL(F) y TL^2 (F) = TC(F).

Todos los rectángulos TR(F, G)

Dadas dos figuras planas F y G con una misma altura y regula común, *todos los rectángulos* de las dos figuras son todos los rectángulos *f* x *g* formados a partir de todos los pares de líneas correspondientes, *f* y *g*, de las dos figuras (Figura 7).

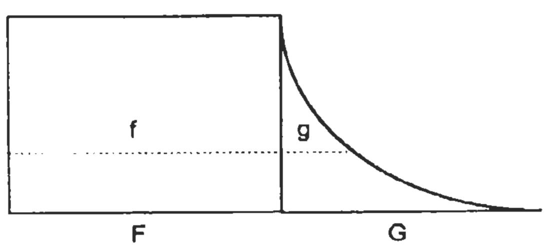


Fig. 7

Fundamentación del método colectivo

La intención de Cavalieri es demostrar que las colecciones de indivisibles (o más exactamente, las clases de equivalencia definidas por la relación de congruencia) son magnitudes en el sentido estricto de *Los Elementos* de Euclides, pero su argumento se debilita en varios puntos debido tanto a las propiedades de los indivisibles que asume implícitamente, como a los problemas que presenta el manejo de infinitos indivisibles en cada colección (Andersen 1985: V).

Restringiéndonos a figuras planas (el proceso es análogo en dimensión superior), el orden en que procede Cavalieri es el siguiente:

Definición II.1	Todas las líneas de una figura plana, TL(F)
Postulado II.1	F congruente con G => TL(F) congruente con TL(G)
Teorema II.1	TL(F) y TL(G) son magnitudes que tienen razón [9]
Escolio	Lo que se usa en la comparación no es el número de líneas de una colección sino *la magnitud que es igual, congruente con, el espacio ocupado por estas líneas.*
Teorema II.2	F = G => TL(F) = TL(G) [10]
Teorema II.3	F : G = TL(F) : TL(G)

Asunciones implícitas. El principio ut unum

En todo este proceso Cavalieri asume implícitamente varias propiedades de las colecciones de indivisibles y sus relaciones con las figuras, que utiliza pero no explicita.

Estas propiedades son:

Dadas dos colecciones A y B de la misma clase:

1. A < B ó A = B ó A > B.
2. A y B pueden sumarse. El resultado A+B es una magnitud de la misma clase que A y B.
3. Si A > B, B puede ser substraído de A. El resultado A-B es una magnitud de la misma clase que A y B.

9. Para probarlo utiliza la Definición V.4 de Euclides: dos magnitudes tienen razón una a otra cuando al multiplicarse son capaces de exceder una a otra. La demostración está poco cuidada y presenta entre otros problemas la elección del máximo de una cantidad infinita de segmentos.

10. Su demostración conlleva un problema de proceso infinito.

Dadas tres figuras F, G y H de la misma clase:

4. F = G + H => TL(F) = TL(G) + TL(H).

5. F > G => TL(F) > TL(G).

Y el crucial principio *ut unum:*

6. Como un antecedente es al consecuente, así son todos los antecedentes a todos los consecuentes [11].

Principio de Cavalieri

Pero Cavalieri basará en gran parte la obtención de resultados en su siguiente teorema, más conocido como principio de Cavalieri:

Si dos figuras planas (o sólidas) tienen igual altura, y si las secciones hechas por rectas paralelas (o planos paralelos) a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en una misma razón, entonces las figuras planas (o sólidas) están también en esa misma razón.

(*Geometria*, Teorema II.4)

Su demostración se sigue inmediatamente del principio *ut unum* y el Teorema II.3.

Aunque en la actualidad las debilidades que presenta su fundamentación lo han excluido de lo que se entiende por matemática rigurosa, sigue siendo un instrumento útil en cursos introductorios a la geometría como justificación plausible de resultados básicos, de otro modo inaccesibles a quienes no estén iniciados en las técnicas más complejas del método de exhaución o del cálculo integral.

Como ilustración —y abandonando por un momento el contexto histórico— veamos algunas aplicaciones sencillas pero potentes, de utilidad en el aula.

Figuras distorsionadas

La Figura 8 muestra como utilizar este principio para argumentar la conservación del volumen en figuras adecuadamente distorsionadas. Dado que las tres figuras tienen la misma altura y sus secciones paralelas a las bases son iguales, las tres tienen el mismo volumen.

11. En el caso de figuras planas su significado sería: si dos figuras planas F y G tienen sus bases situadas sobre una misma recta, tienen la misma altura, y todos los pares de secciones correspondientes f y g, en TL(F) y TL(G) , están en una misma razón, entonces TL(F) y TL(G) están en esa misma razón. Como veremos después, Cavalieri generalizaeste principio a otros tipos de relaciones entre las líneas.

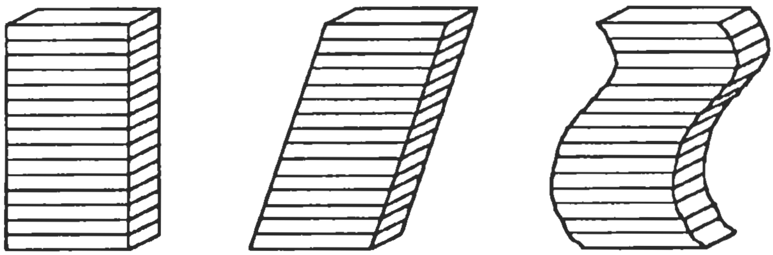


Fig. 8

Área de la elipse

Como se deduce de las ecuaciones de la elipse de semiejes a y b, y del círculo de radio a mostrados en la Figura 9, sus respectivos indivisibles l y m están en la proporción $l / m = b / a$. Del principio de Cavalieri se deduce que las áreas de las dos figuras están en la misma proporción. Es decir:

$$\frac{l}{m} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\text{Área de la elipse}}{\text{Área del círculo}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{Área de la elipse} = \pi \cdot a \cdot b$$

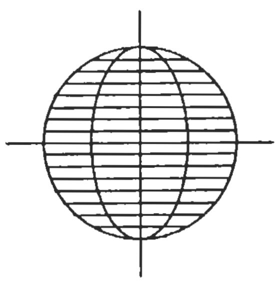


Fig. 9

Volumen de la esfera

Consideremos una semiesfera de radio r y un cilindro de radio r y altura r al que le sustraemos el cono que tiene por base la tapa superior del cilindro y por vértice el centro de la base inferior del cilindro (Figura 10). Dado que las secciones de las dos figuras (un círculo y una corona circular) coinciden para cualquier altura h, el principio de Cavalieri asegura:

Volumen de la semiesfera = Volumen del cilindro - Volumen del cono

de donde:

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

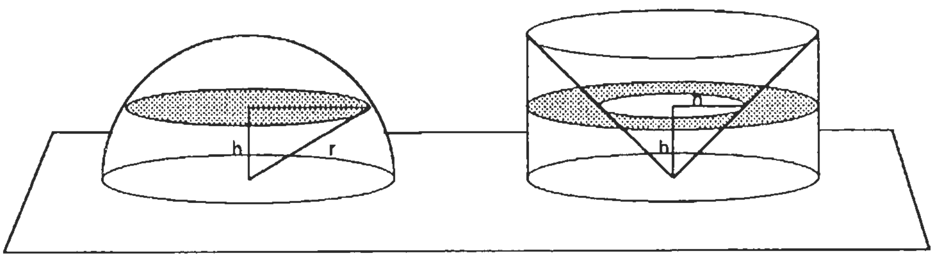


Fig. 10

Nótese que el principio de Cavalieri *no* se aplica a segmentos contenidos en el plano (Figura 11) ni tampoco, por una razón similar, a figuras planas contenidas en el espacio. Evitar estos casos podría ser el motivo que llevó a Cavalieri a distinguir los tránsitos rectos de los tránsitos oblicuos (Andersen 1985: III.7).

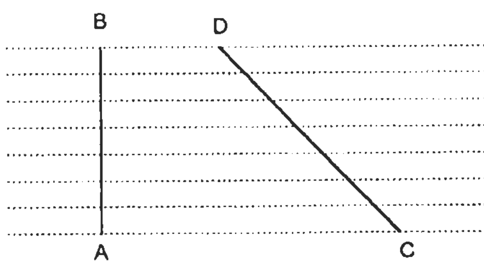


Fig. 11

La cuadratura de la parábola

Con las herramientas mencionadas anteriormente Cavalieri es capaz de conseguir una cantidad tal de resultados que sólo su resumen nos llevaría demasiado lejos. Nos limitaremos a esbozar su contribución a un resultado estrechamente vinculado con el nacimiento del cálculo: la cuadratura de la parábola $y = x^n$. En notación moderna:

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Veamos como reduce esta cuadratura a una comparación de indivisibles que logra resolver para $n = 1, \ldots, 6$ y 9, lo que le lleva a enunciar que la solución es cierta para todo n natural [12] (Andersen 1985: VI.1-3 y VIII.7-8).

Sea ABCD un rectángulo dividido en dos triángulos por su diagonal AC (Figura 12). Sea AHC la parábola y = xn con eje AD. Sea FE un indivisible del rectángulo ABCD, y sean H y G los puntos de corte de FE con la parábola y con la diagonal. En estas condiciones [13]:

$$FE : FH = BC : FH = (AB)^n : (AF)^n = (BC)^n : (FG)^n = (FE)^n : (FG)^n$$

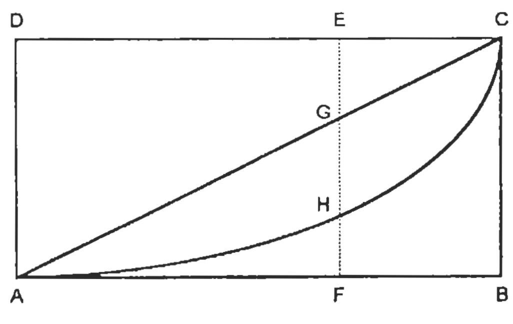


Fig. 12

12. En *Geometria* (1635, Libro II) consigue el resultado para n = 1 y 2. En 1637 le comunica por carta a Galileo haber descubierto el caso general en el que se ha visto interesado por un problema planteado por Kepler en su *Stereometria* (1615) sobre el volumen de un casco parabólico. En *Centauria* (1639) publica como apéndice una solución en la que establece el caso general, pero sólo prueba los casos n = 1, ..., 4. En *Exercitationes* (1647, Libro IV) publica una prueba de los casos n = 3, ..., 6 y 9, estableciendo de nuevo el caso general.

13. Como se deduce de la propia definición de la parábola y de la semejanza de los triángulos AFG y ABC.

Tomando las correspondientes colecciones de indivisibles, se obtiene:

$$ABCD : AHCB = TL\ (ABCD) : TL\ (AHCB) = TL^n\ (ABCD) : TL^n\ (ABC)$$

Pero Cavalieri demuestra que esta proporción es:

$$TL^n\ (ABCD) : TL^n\ (ABC) = (n+1) : 1 \text{ para } n = 1, \ldots, 6 \text{ y } 9.$$

Resolviendo así la cuadratura de la parábola en los siete casos señalados.

Veamos brevemente su demostración para los casos $n = 1$ y 2 (el caso $n = 3$ puede verse también en Struik 1969: 214-216).

Caso $n = 1$ $\qquad$ $TL\ (ABCD) : TL\ (ABC) = 2 : 1$

Sea un rectángulo ABCD dividido en dos triángulos por su diagonal AC (Figura 13). Tomando CG = FA, a cada indivisible EF del triángulo ABC le hacemos corresponder el indivisible GH del triángulo ACD. Es fácil ver que EF=GH, luego TL(ABC) = TL(ACD), y TL(ABCD) = 2 TL(ABC).

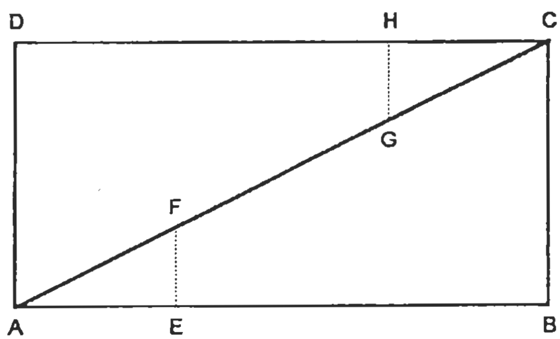


Fig. 13

Caso $n = 2$ $\qquad$ $TC\ (ABCD) : TC\ (ABC) = 3 : 1$

Construyamos ahora cuadrados sobre los indivisibles del rectángulo ABCD y sobre los indivisibles del triángulo ABC (Figura 14). Sea RV un indivisible de ABCD. Sean F y E los puntos medios de AD y BC. Sean G y M los puntos medios de AB y FE. Sean S y T los puntos de corte de RV con FE y AC.

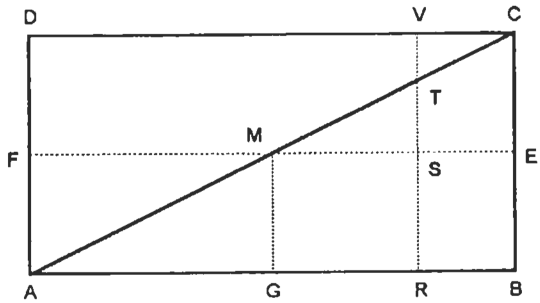


Fig. 14

En estas condiciones el Teorema II.9 de Euclides asegura: $RT^2 + TV^2 = 2\,(RS^2 + ST^2)$. Pero como esto ocurre para todos los indivisibles RV de ABCD, Cavalieri mantiene, basándose en una especie de principio *ut unum* generalizado, que las correspondientes colecciones de cuadrados guardan la misma relación, es decir:

TC(ABC) + TC(ACD) = 2 TC(ABEF) + 2 TC(MEC) + 2 TC(AMF).

De donde obtiene, por congruencia:

TC(ABC) = TC(ABEF) + 2 TC(AMF) (1)

Por otra parte, es fácil ver [14] que:

TC(ABCD) = 4 TC(ABEF) (2)

y TC(ABCD) = 8 TC(AGMF)

Luego [15] TC(ABC) = 8 TC(AMF) (3)

De (2), (1) y (3) se sigue:

TC(ABCD) = 4 TC(ABEF)
= 4 TC(ABC) - 8 TC(AMF)
= 4 TC(ABC) - 1 TC(ABC)
= 3 TC (ABC). c. q. d. [16]

14. Aunque apoya la demostración en un teorema anterior más general, el II.11.

15. Según *Geometria* (Teorema II.22): la razón entre *todos los cuadrados* de un paralelogramo y *todos los cuadrados* de uno de sus triángulos diagonales, es constante. En este caso: TC(ABCD) : TC(ABC) = TC(AGMF) : TC(AMF).

16. Una consecuencia inmediata de este teorema es que la pirámide de base cuadrada es un tercio del prisma correspondiente. Procediendo análogamente con colecciones de rectángulos construidos sobre trapecios consigue los resultados equivalentes a la integral del polinomio general de primer y segundo grado.

El método distributivo

Preocupado por las reticencias de Galileo y las reacciones que pudiera provocar su publicación, Cavalieri esbozó una segunda versión de su método que publicó en los Libros VII de *Geometria* y II de *Exercitationes*, y destinada a evitar los problemas relacionados con el manejo de infinitas líneas en cada colección.

Digamos tan sólo que en esta segunda versión demuestra primeramente el llamado teorema de Cavalieri de forma distributiva y sin hacer uso de las colecciones de indivisibles (la demostración procede por superposición y presenta un problema de proceso infinito). A partir de este teorema, y sin utilizar colecciones de líneas, duplica algunos de los resultados que ya había alcanzado por el método colectivo (para más detalles ver Andersen 1985: IX)[17].

Algunas objeciones al método

Como hemos señalado antes, Cavalieri sostenía desde 1621 un intercambio epistolar con Galileo sobre la fundamentación del método. En el centro de la discusión se encontraba el viejo y espinoso problema de la composición del continuo, tema sobre el que la iglesia se había pronunciado en el Concilio de Constanza (1415) considerando herético su composición por indivisibles (Galilei 1981: 107 n. 27).

La postura de Cavalieri sobre esta importante cuestión es ambivalente según se desprende de las cartas que envió a Galileo (Andersen 1985: III.5). De hecho no entra a juzgarla en profundidad por considerarla ajena a su método.

Tras ser publicada, la *Geometria* gozó de gran popularidad en los círculos matemáticos de la época dados los resultados que alcanzaba, pero su fundamentación suscitó serias objeciones. Conocemos poco las del propio Galileo pues sus cartas a Cavalieri en su mayor parte se han perdido, nos limitaremos, pues, a señalar las que partieron de Paul Guldin y de cierto autor anónimo.

Paul Guldin arremetió duramente en su *Centrobaryca* (Viena 1635-1641) contra la fundamentación del método de los indivisibles, negando que entre dos colecciones infinitas de líneas pueda existir razón. Entiende que sólo caben dos posibilidades de concebir estas colecciones como magnitudes, y que ambas son inútiles para cuadrar figuras (Andersen 1985: III.4):

a) Cavalieri entremezcla todas las líneas de TL(F), descritas por el plano que se mueve, con el espacio interior a la figura, es decir, con la propia figura.

17. La forma distributiva del teorema puede verse tambien en Struik (1969: 209-214). La página de *Geometría* que contiene la ilustración de esta versión del teorema puede verse en nuestra Figura 3.

b) La magnitud igual al espacio ocupado por TL(F) es una longitud, compuesta por todas las líneas de la figura.

A estas cuestiones Cavalieri (1647) responde que aunque TL(F) es infinito con respecto al número de líneas, es finito en cuanto a su extensión espacial. Señalando que si uno asume que el continuo está compuesto por indivisibles, entonces una figura plana y la magnitud de *todas sus líneas* son una sola y misma cosa, y si uno asume la infinita indivisibilidad —en cuyo caso sí puede mantenerse que TL(F) consiste sólo de longitudes—, como todas las líneas de TL(F) deben ser consideradas puestas en su sitio en la figura, la magnitud de TL(F) está limitada por los mismos límites que los de la figura. No termina de aclarar como debe entenderse exactamente el espacio ocupado por TL(F) si se asume la infinita divisibilidad, pero asegura que también en ese caso existe razón entre colecciones de indivisibles. En cualquier caso, argumentaría, si el continuo no está compuesto de indivisibles estará compuesto de indivisibles y algo más, y con mayor motivo las TL(F) serán magnitudes finitas con razón unas a otras.

Otra conocida objeción se la hizo llegar un comunicante anónimo hacia 1644, señalándole la debilidad de su método sobre un simple triángulo (Andersen 1985: III.7): Sea un triángulo no isósceles ABC dividido en dos triángulos por la altura CD (Figura 15). Tomando CD *como regula*, a cada línea *l* de TL(ACD) le podemos hacer corresponder la línea *m* de TL(BCD) con su misma longitud, luego: TL(ACD) = TL(BCD), lo que implica (Geometria Teorema II.3) ACD = BCD. De ello se deduce el resultado, absurdo, de que todos los triángulos con la misma altura son congruentes.

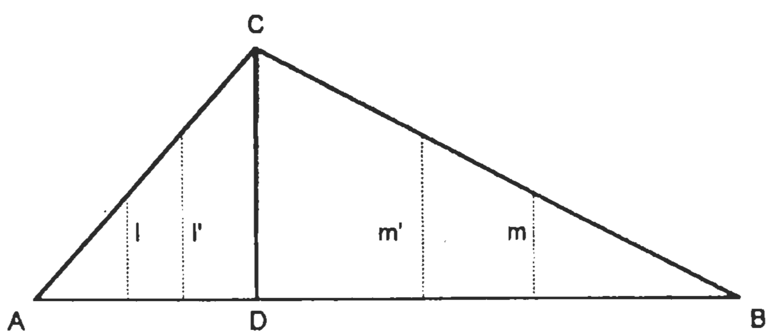


Fig. 15

Cavalieri replica que el Teorema II.3 se refiere a colecciones de líneas generadas por el mismo tránsito, lo que obviamente no es el caso, pues la distancia entre dos líneas, *l* y *l'*, de ACD no es la misma que entre las dos líneas, *m* y *m'*, que les corresponden en BCD.

Bibliografía

Andersen K.

1984 Las Técnicas del Cálculo 1630-1660. En: Grattan-Guinness (1984: 22-68).

1985 Cavalieri's Method of Indivisibles. *Archive for History of Exact Sciences* (Berlin), pp: 291-367.

Arquímedes

1986 *El Método.* Introducción y notas de L. Vega. Madrid, Alianza Editorial (LB 1151).

Boyer C. B.

1941 Cavalieri, Limits and Discarded Infinitesimals. *Scripta Mathematica,* 8: 79-91.

1959 *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* 2nd printing [1949]. New York, Dover.

1968 *A History of Mathematics.* New York, John Wiley & Sons.

Delgado Marante A.

1992 Método de Exhaución. En: *Historia de la Geometría Griega. Actas del I Seminario Orotava de Historia de la Ciencia.* S/C de Tenerife. Consejería de Educación, Gobierno de Canarias, pp: 292-308.

Euclides

1956 *The Thirteen Books of The Elements.* Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Sir T. L. Heath. 2nd ed. revised with additions [1925]. New York, Dover. 3 vols.

Galilei G.

1981 *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas sobre dos Nuevas Ciencias* [1638]. Edición preparada por C. Solís y J. Sádaba. Madrid, Editora Nacional.

González Urbaneja P.

1992 *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII. Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal.* Madrid. Alianza Editorial (AU 716).

Grattan-Guinness I. (Compilador)

1984 *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos 1630-1910. Una Introducción Histórica.* Traducción de M. Martínez Pérez. Madrid, Alianza Editorial (AU 387).

Heath T. L.

1981 *A History of Greek Mathematics (From Thales to Diophantus)* [1921]. New York, Dover. 2 vols. (Reimpresión corregida).

STRUIK D. J.
1969 *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Cambridge (Massachusetts), Harvard University Press.

VEGA REÑÓN L.
1992 Arquímedes: El Método. En: *Historia de la Geometría Griga. Actas del I Seminario Orotava de Historia de la Ciencia.* S/C de Tenerife, Consejería de Educación, Gobierno de Canarias, pp: 393-421.

DESCARTES FILÓSOFO

Sergio Toledo
Profesor de Filosofía
I.B. Villalba Hervás / La Orotava

René Descartes nace en Turena en 1596; su padre, con quien no tendrá mucho trato, es abogado y consejero en el Parlamento de Bretaña; su abuelo paterno es médico; su madre, hija de abogado y de una rica heredera, morirá de parto un año después. Criado por su abuela paterna y una nodriza, es enviado al colegio jesuita de La Flèche, recién fundado y apadrinado por el rey Enrique IV, donde estudiará desde 1606 a 1615. Su constitución enfermiza —tos crónica y tez cerúlea— le otorga el privilegio de no madrugar y poder entregarse en la cama a sus ensoñaciones hasta bien entrada la mañana, lo que quizás explica el optimismo narcisista de que hará gala toda su vida. Durante el primer ciclo educativo, que dura seis años, se instruye en latín, griego, gramática francesa, retórica, teología y filosofía escolástica. El segundo ciclo comprende tres cursos: en el primero estudia las obras de Aristóteles sobre Lógica y Etica; en el segundo, la Física del estagirita, así como Matemáticas con un libro de texto de Clavius, rótulos bajo los que se enseñaba no sólo aritmética, geometría y mecánica, sino también óptica, topografía, filosofía natural, magia, alquimia, balística y música; el tercero se dedicaba a la Metafísica de Aristóteles. En la biblioteca de La Flèche tuvo acceso a obras de Agrippa, Della Porta, Ramelli, Montaigne, Charron, algunas de ellas incluidas en el Indice. Las clases se impartían según el modelo medieval: lecciones, repeticiones, disputas sabatinas y disputas mensuales.

En 1616 se licencia en Derecho Canónico y Civil; dos años después se lanza a recorrer mundo defraudando la expectativa paterna de dedicarse a las Leyes; se alista en el ejército de Mauricio de Nassau, lo que le da ocasión de continuar instruyéndose en balística y técnicas de fortificación. El 10-XI-18 conoce a Isaac Beeckman, médico y físico holandés dedicado a la Mecánica e Hidráulica, que utiliza las matemáticas para resolver problemas físicos; será quien encamine a Descartes hacia la imbricación de ambas ciencias. Su duradera amistad permitió que gracias al Diario (1604-34) del holandés tengamos información de los primeros trabajos cartesianos sobre asuntos físicos: uno relativo a la presión de líquidos en recipientes y otro sobre caída de graves basado en el método de Oresme; encontramos asimismo un breve estudio sobre la aritmética de la armonía musical: «Compendium Musicae».

En 1619 conoce a Juan Faulhaber, ingeniero y profesor en la Escuela de Ingeniería de Ulm, que lo reafirmará en su intento de aplicar las Matemáticas a la Física. Su interés por el simbolismo y la «mathesis universalis» le conduce al Ars Combinatoria de Lulio y a escritores hermético-cabalísticos como Agrippa y los Caballeros de la Rosacruz, a los que en su madurez desdeñará por su confusa y pretenciosa estulticia. En 1619 inventa un compás que le permite resolver ciertos problemas geométricos clásicos, tales como el de la duplicación del cubo y el de la trisección del ángulo; Descartes comprende que su método mecánico-geométrico equivale a la resolución de ecuaciones cúbicas; de ahí arranca su método algebraico que le permite unificar aritmética y geometría.

La noche del 10-XI-19 tiene tres sueños que le revelarán el camino de la sabiduría universal, conforme a la aspiración renacentista. A partir de entonces ordena sus ideas en cuadernos bajo diversos títulos: «Olympica», donde narra los sueños, su interpretación y una miscelánea de ideas espirituales; «Experimenta», donde anota sus creencias, sentimientos y reacciones espontáneas; en «Parnasus», influido por la literatura rosacruciana, intenta relacionar desde una perspectiva hermética lo corpóreo-sensible con lo espiritual-inteligible a través del simbolismo; en «Preambula», cuya frase inicial es: «El temor de Dios es el principio de la sabiduría», trata sobre la «mathesis universalis» y recopila sus trabajos matemáticos. La mayoría de estos escritos juveniles se ha perdido y los conocemos parcialmente por Baillet —biógrafo temprano— y Leibniz, que tuvieron ocasión de consultarlos; en ellos aparecían por vez primera dos temas muy cartesianos:

a) Su preferencia por la invención sobre la tradición, expresando una alta valoración de la creación poética, que quería trasladar a los demás ámbitos del saber.

b) Las «semillas de la ciencia» que moran en nuestra alma, metáfora que le conducirá después a las verdades eternas o ideas innatas.

En 1620 se reincorpora a la vida militar con las tropas del Duque de Baviera, que abandona a finales de año para viajar por diversos países centroeuropeos mientras prosigue sus trabajos sobre geometría, series numéricas y ecuaciones; es posible que visitara a Kepler. El 11-XI-20 anota, refiriéndose al método algebraico: «Comienzo a comprender el fundamento de una invención admirable». Empieza su primera obra metodológica, «Studium bonae mentis», donde se explaya sobre el deseo de saber, las disposiciones del espíritu para el aprendizaje, el método para adquirir sabiduría y sobre las ciencias, que clasificará en experimentales —aquellas cuyos principios se aprenden por observación y experiencia—, liberales —las que requieren hábito y sacan sus principios de otras ciencias—y cardinales —las más generales y que se deducen de los principios más simples; estas últimas son la Filosofía y las Matemáticas, que dependen respectivamente del entendimiento y de la imaginación.

Regresa a Francia en 1622 y entra en contacto con el círculo del Padre Mersenne, al que pertenecían Gassendi, Mydorge, Desargues y Roberval, entre otros; tras renunciar a casarse con Mlle. du Rosay emprende en 1623 un largo viaje de peregrinación a Italia. Son años en que consolida el método algebraico y aplica la geometría al estudio de la óptica; trabaja en las ecuaciones y propiedades de las cónicas, estudia los fenómenos de reflexión y refracción, resolviendo el problema de la anaclástica; concibe la idea de un libro «Thaumatis regia» en el que describir las propiedades de lentes y espejos y cómo construir artefactos para producir efectos ópticos divertidos y sorprendentes. Regresa a Francia en 1625 y se establece en París; hacia 1627 sustituye el plan del «Studium» por una nueva obra didáctica: «Regulae ad directionem ingenii», que iba a constar de tres partes con doce reglas cada una, dedicadas al conocimiento filosófico, matemático y físico. Tampoco acabará este proyecto del que redactará la primera parte y la mitad de la segunda; su edición será póstuma. Cito algunas de las reglas más interesantes:

II) Debemos ocuparnos solamente de aquellos objetos que pueden ser conocidos por nuestro espíritu de un modo cierto e indudable.

III) Acerca de los objetos por considerar hay que buscar no las opiniones de los demás o las propias conjeturas, sino lo que se puede ver por intuición con claridad y evidencia, o deducir con certeza, porque la ciencia de ese y no de otro modo se adquiere.

V) El método consiste en el orden y disposición de las cosas a las que debemos dirigir el espíritu para descubrir alguna verdad. Lo seguiremos fielmente si reducimos las proposiciones oscuras y confusas a las más sencillas y si partiendo de las cosas más fáciles tratamos de elevarnos gradualmente al conocimiento de todas las demás.

VII) Para completar la ciencia es preciso, por un movimiento continuo del pensamiento, recorrer todos los objetos que se relacionan con el fin que nos proponemos y abarcarlos en una enumeración suficiente y ordenada.

VIII) Si en la serie de cosas por investigar se presenta alguna que nuestro entendimiento no pueda intuir suficientemente bien, es preciso detenerse ahí y no examinar lo que sigue, sino abstenerse de un trabajo superfluo.

En esta parte filosófica encontramos la mayoría de los temas que desarrollará en el Discurso del Método (1637):

a) Unidad de las ciencias, puesto que la inteligencia humana es una.

b) Necesidad de conocer con absoluta certeza.

c) Intuición y deducción son las únicas operaciones de la inteligencia que garantizan un conocimiento cierto.

d) Los fines del método son no confundir lo verdadero con lo falso y llegar a conocerlo todo (mathesis universalis).

e) El método establece un orden que permite pasar de lo simple a lo complejo mediante la intuición y deducción y de lo complejo a lo simple mediante análisis.

f) La verificación de la solución a una cuestión exige una enumeración o inducción de todos los pasos dados en el proceso resolutivo.

g) Los medios de nuestro conocimiento son la Inteligencia o Entendimiento, que se ayuda con la Imaginación o capacidad de forjar representaciones, la Memoria y los Sentidos.

h) La inteligencia distingue entre cosas simples y compuestas; las simples pueden ser inteligibles —conocimiento, duda, volición—, corpóreas —figura, extensión, movimiento— o mixtas —nociones comunes, axiomas; las complejas pueden ser derivadas de cosas simples —matemáticas— o complejas según nuestra experiencia —físicas.

i) Para ser evidente la intuición necesita ser clara —intuir todos los aspectos— y distinta —delimitar su objeto frente a todos los demás.

j) La Lógica no aporta conocimiento, aunque sirve para exponerlo.

La regla XII esboza una psicología mecanicista con la que intenta aclarar las reglas anteriores; destacamos lo siguiente:

k) Los sentidos son pasivos y las sensaciones se transmiten de manera instantánea.

l) El conocimiento es una fuerza espiritual única, aunque adopte formas diferentes, como comprender, imaginar, recordar, sentir...

m) Podemos conocer las cosas según su existencia o según nuestra inteligencia.

n) Conocemos cosas complejas que lo son por experiencia —percepciones— o porque las componemos nosotros, bien sea por impulsión —divina, libertaria o imaginativa—, por conjetura o por deducción.

De las reglas matemáticas sólo citaré de la XIII una mesurada mención al sistema heliocéntrico y otra sobre los problemas filosóficos.

«Si después de las observaciones que se han hecho relativas a los astros, investigamos lo que podemos afirmar como cierto sobre su movimiento, no debemos admitir gratuitamente con los antiguos que la Tierra está inmóvil y colocada en el centro del Universo porque desde nuestra infancia nos ha parecido que estaba así; es preciso poner esta creencia tradicional en duda para examinar lo que podemos considerar como cierto al respecto».

«Si los filósofos se pusieran de acuerdo en lo relativo a la significación de las palabras cesarían casi todas sus discusiones».

En 1628 Descartes, a instancia del Cardenal Bèrulle empieza un «Tratado sobre la Divinidad» y un «Tratado de Metafísica», de los que no nos ha llegado ningún fragmento, aunque quizá un texto encontrado entre sus papeles póstumos titulado «La búsqueda de la verdad» pertenezca a uno u otro; en la primavera del 29 abandona Francia definitivamente para instalarse en los Países Bajos, donde permanecerá hasta el 49 cambiando frecuentemente de residencia. Vivirá en soledad, cuidado por sus sirvientes, cultivando su salud, la higiene personal y una dieta que mantuviera a raya su insaciable apetito; prefiere la ocasional compañía de la gente sencilla a los intelectuales, con quienes sólo mantendrá contacto epistolar, sobre todo a través de Mersenne. Enterado de que Beeckman había comentado haber sido su maestro respecto a ciertas teorías físicas rompe su amistad violentamente en 1630, año en el que confiesa haberse desinteresado de las matemáticas puras; dedicará su atención a la meteorología, óptica —reflexión, refracción, lentes— y anatomía, estudiando mediante disección de animales la digestión y distribución de alimento, el pulso, la circulación sanguínea, las sensaciones; en 1632 anuncia que va a diseccionar cabezas para estudiar la imaginación y la memoria. Entre 1630 y 1634 escribe «El Mundo», compuesto por un «Tratado de la Luz» y un «Tratado del Hombre»; la condena de Galileo en 1633 le hace desistir de su publicación, que no tendrá lugar hasta 1664, de forma póstuma.

Tratado de la luz

Descartes inicia el tratado con una formulación epistemológica: la experiencia indica que no tiene por qué haber ninguna concordancia entre nuestras sensaciones y los objetos que las producen; critica así el realismo psicológico de la filosofía clásica y medieval, que él mismo había sostenido en las «Reglas», que daba por supuesto la correspondencia entre los datos de los sentidos y las cualidades de los objetos. Contra la física aristotélica, que buscaba la causa de los acontecimientos en formas sustanciales y cualidades visibles u ocultas, Descartes recurre exclusivamente al movimiento de la materia, de lo extenso; por ejemplo , nos habla de que el fuego es el movimiento velocísimo de partículas muy pequeñas, y señala como cosas distintas e independientes la potencia con que una partícula se mueve —módulo de la velocidad— y la dirección de su movimiento, lo que constituye uno de los aspectos más característicos de su física.

Toda la materia del universo está en movimiento y lo transmite por contacto; aunque no afirma que las partículas sean infinitas —dado que la materia es infinitamente divisible— indica que en el menor grano de arena hay millones de ellas. Establece la diferencia entre cuerpos sólidos y líquidos según sus partículas posean o no movimiento unas respecto de otras. Los sólidos serán tratados como si fueran una sola parte de materia con un único movimiento, con independencia de su tamaño. Hay distintos grados de liquidez: el fuego lo es más que el aire, y éste más que el agua.

Todos los cuerpos están formados por la misma materia, que ocupa la extensión de la totalidad del universo, o para ser preciso, la distinción entre cuerpos y extensión no es real sino ideal. La negación del vacío es una característica fundamental de la física cartesiana, pues determina la circularidad del movimiento. Descartes distingue tres tipos de partículas, inobservables e infinitesimales, para las que conserva los nombres clásicos de Empédocles, eliminando el agua, que es asimilada al aire:

a) Primer elemento o del Fuego: Partículas de gran velocidad que pueden tener cualquier tamaño y figura, pluralidad geométrica destinada a asegurar la continuidad físico-espacial.

b) Segundo elemento o del Aire: Partículas de velocidad intermedia, de figura aproximadamente redonda y tamaño definido.

c) Tercer elemento o de la Tierra: Partículas de menor velocidad y mayor tamaño.

El sol y las estrellas, es decir, los cuerpos que emiten luz están formados por el primer elemento; los cielos, es decir, los cuerpos que transmiten luz están compuestos del segundo elemento; la Tierra, los planetas y los cometas, es decir, los cuerpos que reflejan luz se hallan constituidos por el tercer elemento; queda clara la importancia de la luz en el sistema del universo. Los intersticios de los cuerpos formados por el segundo y tercer elementos están rellenos del primero. Descartes advierte que no se debe confundir los tres elementos puros con el fuego, el aire y el agua empíricos, que son cuerpos mixtos y corruptibles. Todas las cualidades físicas de los cuerpos —calor, frío, humedad, sequedad—han de explicarse únicamente en términos de tamaño, figura, movimiento y disposición de sus partes.

A partir de aquí el filósofo avisa que nos va a contar una fábula, explicación posible de por qué el universo es como es; mediante este recurso retórico pretende soslayar las posibles críticas teológicas. Comienza ironizando sobre el universo «infinito» de los filósofos; el universo cartesiano no tiene límites definidos, ya que en vez de hacer hipótesis sobre su magnitud, Descartes se circunscribe a explicar los fenómenos dentro de la dimensión que va desde la Tierra a las estrellas fijas. Imagina que Dios crea un universo pleno de materia que puede dividirse en partes de todos los tamaños y figuras, y al que aplica en el mismo instante una fuerza que las capacita para adoptar todos los movimientos posibles; a continuación muestra que con tiempo suficiente ese universo se convertiría en el que conocemos, debido a las tres leyes que Dios le ha conferido.

Primera Ley de la Naturaleza: Cada parte de materia individual permanece siempre en el mismo estado mientras el choque con las demás no la obligue a modificarlo.

Segunda Ley: Cuando un cuerpo empuja a otro le transmite movimiento en la medida que lo pierde, o priva al otro de movimiento en la medida que él lo adquiere.

Tercera Ley: Aun cuando todos los movimientos son circulares, cuando un cuerpo se mueve cada una de sus partes individuales tiende a conservar el suyo en línea recta.

Descartes justifica estas leyes mediante la inmutabilidad divina y su teoría de la creación continuada del universo: como para Dios no hay tiempo, desde la perspectiva divina la creación del mundo equivale a su conservación; ello causa la conservación de estado —figura, tamaño, disposición de las partes y movimiento o reposo—, la conservación de la cantidad de movimiento y la conservación de la dirección instantánea del movimiento.

La diversidad inicial de movimientos hace que estos se produzcan en forma de torbellinos o vórtices; con el tiempo ocurre una progresiva uniformación de figuras, tamaños y velocidades, adquiriendo la mayoría de las partículas la forma del segundo elemento; las de figura irregular se van enganchando entre sí dando lugar al tercer elemento; las que surgen de la fragmentación de los ángulos del segundo elemento —mientras se van redondeando— dan lugar al primero. En cada torbellino las partículas se disponen en un orden respecto al centro que depende de su tamaño y velocidad, siendo las de mayor tamaño o velocidad las que describen círculos más amplios; una parte de las partículas del primer elemento se dirige hacia los centros de los vórtices formando allí cuerpos redondos, líquidos y sutiles —sol y estrellas— y girando a gran velocidad causan una fuerza centrífuga: la luz.

El firmamento es una superficie sin espesor que separa un cielo —una estrella más sus planetas— de otro. Las partículas más rápidas están en la zona periférica de cada cielo; la velocidad disminuye en función del radio orbital de las partículas hasta una zona intermedia a partir de la cual comienza a aumentar hasta llegar a la estrella central, aunque sin llegar a igualar la velocidad de las exteriores; con el tamaño ocurre lo contrario, aumenta desde la periferia hasta la zona intermedia y luego va disminuyendo hasta la estrella; el tamaño de las estrellas es despreciable en relación a la magnitud de sus cielos.

Los cometas y los planetas, formados por partículas del tercer elemento, son arrastrados por los cielos; los cometas, formados por partículas de mayor velocidad y tamaño que las de los planetas, van pasando de un cielo a otro; son escasos y se mueven más rápido al entrar en un cielo que al salir de él. Los planetas se ven llevados a la zona intermedia de los cielos; sus órbitas están a una distancia del centro tal que se da un equilibrio entre la tendencia al movimiento en línea recta y la presión de los cielos que impide su fuga hacia el firmamento o su caída hacia la estrella. Los radios orbitales dependen del tamaño, velocidad y superficie de los planetas; estos tienen inferior densidad que la mayor parte del cielo, exceptuando las partes más próximas al centro; a mayor densidad del planeta mayor órbita. Las partículas de los cielos comunican o restan movimiento a los planetas según sus respectivos movimientos coincidan o difieran; de ello deduce Descartes la rotación de los planetas sobre sus propios centros, así como la formación de pequeños cielos a su alrededor, de tal manera que si un planeta se aproxima a otro mayor es capturado y convertido en satélite.

La pesantez de la Tierra, es decir, la fuerza que hace a todas sus partes tender hacia el centro, se debe a que la velocidad de los cielos que la rodean repelen dichas partes hacia el centro; si en vez de un universo pleno existiera el vacío la materia de los planetas saldría centrifugada. Al considerar el movimiento de la Tierra Descartes incluye como parte de ella los océanos y la atmósfera, lo que le sirve para explicar por qué un objeto lanzado verticalmente cae en el mismo lugar, refutando así los argumentos antiheliocéntricos. Explica las mareas como consecuencia de la presión que ejerce la materia de los cielos sobre el agua y el aire terrestre, a los que achata en las zonas más próxima y más lejana y expande en las zonas perpendiculares al eje Luna-Tierra; el retraso diario de las mareas se explica en función de la traslación de la Luna alrededor de la Tierra.

A continuación Descartes analiza el movimiento de las partículas del segundo elemento, que forman los cielos; su movimiento real es circular en torno al astro que ocupa su centro, pero además tienen dos tendencias al movimiento, ambas rectilíneas: una, tangente al círculo en el punto en que se halla, y la otra, centrífuga dentro de un campo direccional delimitado por la prolongación de las líneas que van desde el centro del astro hasta la partícula. La luz consiste en la presión centrífuga que transmiten —al girar velozmente— las partículas del primer elemento que forman la estrella sobre las del segundo; por tanto, los rayos luminosos son rectilíneos y al presionar nuestros ojos producen sensaciones visuales. Como propiedades principales de la luz enumera las siguientes:

1) Se extiende en círculo alrededor de los cuerpos luminosos.

2) Se extiende de manera instantánea a cualquier distancia.

3) Se transmite de ordinario en líneas rectas.

4) Los rayos pueden confluir en un mismo punto o diverger a partir de él.

5) Rayos que vienen de puntos distintos y se dirigen a puntos diversos pueden cruzarse en un mismo punto sin estorbarse.

6) Los rayos pueden estorbarse cuando su fuerza es muy desigual.

7) Los rayos pueden desviarse por reflexión y por refracción.

8) La fuerza de los rayos puede aumentar o disminuir en función de las disposiciones y cualidades de la materia que los recibe.

Descartes finaliza ahí su fábula y afirma que tal universo imaginario tiene que parecer idéntico al nuestro, ya que se da una perfecta concordancia entre ambos, como prueban los siguientes fenómenos de los que tenemos experiencia:

a) Desde un planeta debe verse su estrella llena de luz.

b) La luz de las demás estrellas debe llegar por la cara del planeta no iluminada por su estrella.

c) Los grandes cielos en torno a una estrella pueden ser muy desiguales en magnitud, aunque han de tener la misma fuerza en sus fronteras mutuas; queda así explicada la desigual distribución estelar.

d) La distancia que separa las estrellas de la Tierra causa la inexistencia de paralaje.

e) Aunque por la lejanía parezcan menores, las estrellas deben tener un tamaño aproximado al del sol; por ser más luminosas que los cielos que las rodean parecen mayores que ellos en proporción, a lo que quizá contribuye los efectos refractivos en las fronteras celestes.

f) La fluidez de las fronteras celestes causa el centelleo de las estrellas y explica los aparentes cambios de tamaño sin cambio de posición y viceversa, así como la súbita aparición y desaparición de estas; los efectos refractivos motivan que casi nunca veamos las estrellas en sus lugares reales.

g) Planetas y cometas son visibles por la reflexión de la luz que procede de su estrella.

h) Puesto que la fuerza de los rayos solares se conserva o aumenta con la distancia no se observa una sensible diferencia de iluminación entre los planetas interiores y exteriores.

i) La rotación de los planetas causa su centelleo; la Luna, al no rotar, no centellea.

j) Los cometas producen una curvatura de las fronteras celestes al aproximarse a ellas; sólo pueden ser vistos desde la Tierra una vez que entran en el cielo del sistema solar, excepto cuando su magnitud es enorme; la cola es un efecto de la refracción.

El método

Como compensación por su renuncia a publicar «El Mundo» Descartes planea editar otros trabajos científicos menos comprometidos y recurre en primer lugar a la «Dióptrica», donde recoge estudios de óptica ya realizados a partir de 1629 sobre el comportamiento de la luz, la reflexión y la refracción, cuya ley de los senos había redescubierto, probablemente de manera independiente de Snell; añadirá nuevos trabajos sobre la visión, el ojo y los sentidos en general, que muestran amplios conocimientos de anatomía y fisiología, producto de sus continuadas experiencias de disección; el interés cartesiano por la Medicina como saber útil se manifiesta aquí en las precisas descripciones analíticas de las formas geométricas que han de tener las lentes y cómo tallarlas para mejorar la visión de los miopes, hipermétropes y présbitas.

Hacia finales de 1635 decide añadir una «Meteorología», que constituye una especie de Física Aplicada, en cuanto que trata una multitud de fenómenos terrestres, acuáticos y atmosféricos, reducidos a explicaciones mecánicas según el modelo teórico de «El Mundo»; algunos de sus principales temas de estudio son: lo caliente y lo frío; la congelación del agua; los vapores y exhalaciones; las propiedades de la sal; los vientos; las nubes, niebla, nieve, lluvia, granizo, tempestades, rayos, truenos, fuegos fatuos; el arcoiris; las auroras boreales; los parhelios.

A principios de 1636 Descartes amplía el plan de la obra y decide adjuntar una «Geometría», que redactará a lo largo de ese año; finalmente compone un prólogo para encabezar la edición de sus ensayos: el «Discurso del Método». Emprende así la realización de un sueño: sustituir a Aristóteles como maestro en las escuelas de la Cristiandad. Una nueva Razón se abre camino, mostrando orgullosa sus logros en matemática pura —«Geometría»—, en matemática aplicada —«Dióptrica»— y en física aplicada «Meteorología»; la física teórica tendrá que esperar hasta la nueva versión de «El Mundo»: los «Principios de la Filosofía» de 1644. Esta Razón universal, igual para todos los hombres, avanzadilla de la democracia, afirma su poder frente a la Autoridad y la Tradición, y busca un saber útil que mejore la vida humana: la matemática aplicada a la física favorecerá el desarrollo de la Técnica y la consiguiente disminución del trabajo. Una Razón que pretende superar el clima de escepticismo cultural, motivado no tanto por la recuperación de la «skepsis» clásica cuanto por la eclosión renacentista, cuya plural impronta encontramos en Rabelais, Cardan, Montaigne... El saber ha roto los moldes de la Teología, la ciudad ha cambiado las formas de la vida social, la religiosidad ya no depende de Roma. Descartes quiere restaurar la confianza en la ciencia, la seguridad de la fe, la unidad de la vida. Derruído el aristotelismo escolástico, ni el hermetismo cabalista ni la filosofía natural habían podido erigirse como nuevo paradigma del saber; para su proyectada sabiduría universal Descartes necesitará un método, el geométrico algebraico, y un fundamento, la metafísica del «yo pensante».

El «Discurso» consta de seis capítulos de tono autobiográfico que tratan temas muy diversos. El primero narra parte de su formación intelectual; el segundo describe la génesis de su método, condensado en cuatro reglas; el tercero nos presenta las reglas morales de que se proveyó para la vida práctica, dado que las urgencias vitales no admiten demorar la toma de decisiones hasta tanto se adquiera el conocimiento pertinente; el cuarto consiste en una anticipación de las «Meditaciones», exponiendo las demostraciones de la existencia de Dios y del Alma; el quinto es un resumen de la física teórica de «El Mundo» y de algunas cuestiones de meteorología; el sexto, que fue redactado inicialmente como prólogo a la «Dióptrica» y «Meteorología», es un canto a la Ciencia, que hará a los hombres dueños de la Naturaleza; explica la dificultad para transitar en Física desde los principios teóricos a los fenómenos concretos y deja bien clara la supremacía de las «experiencias» sobre los «experimentos».

Comprender el método cartesiano significa usarlo según el modelo de los ensayos que lo ejemplarizan; el «Discurso» simplifica la versión de las «Regulae» reduciéndolo a cuatro reglas:

Regla de evidencia: «No recibir como verdadero lo que con toda evidencia no reconociese como tal, evitando con cuidado la precipitación y los prejuicios, y no aceptando como cierto sino lo presente a mi espíritu de manera tan clara y distinta que acerca de su naturaleza no pudiera caber la menor duda».

La búsqueda de la certeza requiere la eliminación de toda duda posible; de ahí, la exigencia de claridad —evidencia de la totalidad de lo intuído— y distinción —delimitación de lo intuído respecto a lo exterior; así se pretende evitar la parcialidad y la confusión. La supresión de los prejuicios alude, además del rechazo a la autoridad y a la tradición, a la desconfianza frente a ciertos hábitos psicológicos que proceden de la infancia. Evitar la precipitación significa impedir el desorden.

Regla de análisis: «Dividir cada una de las dificultades con que tropieza la inteligencia al investigar la verdad, en tantas partes como fuera necesaria para resolverlas».

Hay que descomponer la cuestión investigada en unidades simples; es preciso encontrar las relaciones, proporciones, orden serial, que permitan pasar de lo complejo a lo simple.

Regla de síntesis: «Ordenar los conocimientos, empezando siempre por los más simples, elevándome por grados hasta llegar a los más complejos, y suponiendo un orden en aquellos que no lo tenían por naturaleza».

El método es la expresión de la obsesión cartesiana por el orden, orden de producción, no orden taxonómico. El proceso deductivo es el criterio de orden de todos los elementos de una cuestión.

Regla de enumeración: «Hacer enumeraciones tan completas y generales que me dieran la seguridad de no haber incurrido en ninguna omisión».

Se trata de verificar que todo ha quedado probado por el análisis —que remonta desde los efectos a las causas— o explicado por la síntesis —que desciende desde las causas a los efectos. En cuanto al conocimiento físico, la enumeración implica usar procedimientos inductivos con la evidencia empírica disponible seleccionando los aspectos pertinentes de una cuestión.

El método sólo admite dos operaciones racionales: intuición y deducción. La primera es el acto mental unitario por el que nuestro entendimiento concibe un objeto físico o matemático, o alguna relación o inferencia entre objetos. La segunda significa no sólo inferencia lógica, sino cualquier argumentación demostrativa.

Descartes mantiene el esquema escolástico de facultades del conocimiento. El entendimiento, capacidad de intuición intelectual, forma ideas, que pueden ser: innatas, verdades eternas que dependen de la estructura del entendimiento; adventicias, cuando se forman por abstracción a partir de las sensaciones; facticias, las que no tienen referente exterior, formadas por la imaginación combinando otras ideas. La finitud humana impide tener certeza de cualquier operación intelectual que no constituya un acto continuado de conciencia; para poder confiar en la memoria recabará la garantía de Dios. Distinguirá entre una memoria corporal, que tiene que ver con los sentidos y con lo particular, y una memoria intelectual, vinculada al entendimiento y a lo universal. Sus estudios de fisiología, basados en la frecuente práctica anatómica, le permiten conocer el funcionamiento de los sentidos, de los que desconfía por su imperfección. Considera que hay tres grados de experiencia sensorial: la afección no consciente, la sensación consciente y el juicio perceptivo. Define la voluntad como decisión de acción u omisión que expresa la relación del espíritu con el mundo exterior; ella es la que afirma la correspondencia entre las ideas y las realidades a que se refieren.

Meditaciones metafísicas

Entre 1638-40 Descartes redacta las Meditaciones y las envía a Mersenne para que algunos filósofos y teólogos —Hobbes, Arnauld, Gassendi y el propio Mersenne, entre ellos— expongan sus objeciones, que acompañarán al texto desde su primera edición, así como las respuestas cartesianas. El concepto «infinito» resulta central en la obra: Dios es definido como «Ser Infinito». Infinito que exige la primacía de la razón en el terreno del conocimiento, puesto que no puede ser aprehendido por la imaginación ni por los sentidos. La lógica aristotélica, que prohibía el infinito en acto y aceptaba el infinito potencial, ya no sirve para demostrar la existencia de Dios, al estilo de Tomás de Aquino, cuyas pruebas se basan en la imposibilidad del«regressum ad infinitum», es decir, de una serie infinita. Esto ya no era un argumento válido para Descartes, que habiendo estudiado las series numéricas, sabía calcular el término enésimo y la suma de «n» términos de una serie infinita sin conocer los intermedios, pues le basta saber su ley de formación, su razón: lo infinito era posible y manejable. Como ha señalado Koyré, el famoso texto juvenil «Tres milagros hizo Dios: algo de la nada, el hombre-dios y el libre arbitrio» empareja términos finitos —materia, cuerpo, causalidad— con términos infinitos —nada, pensamiento, libertad; tal mezcla sólo es comprensible para nuestra razón en matemáticas, y no, por ejemplo, en metafísica.

El objetivo de las Meditaciones consiste en la fundamentación metafísica del método cartesiano, mediante la certeza de la existencia del «yo» y de Dios. En seis jornadas narradas según el modelo de los «Ejercicios espirituales» de Loyola, expone paso a paso el itinerario que conduce desde la duda total a la certeza absoluta. Es una obra que no puede ser leída como exposición deductiva de un sistema, pues deja mucho que desear desde el punto de vista lógico, sino como el relato psicológico de un proceso de investigación. La duda metodológica que en el «Discurso» pendía sobre los sentidos se amplía aquí al nivel ontológico: aparte de dudar de la exactitud de las sensaciones se duda de la propia existencia de las cosas que las causan; la ciencia queda provisionalmente en suspenso. Para justificar la legitimidad de la duda Descartes se apoya en el «argumento del sueño»: mientras se sueña se cree estar despierto y que lo soñado es real, luego no podemos distinguir con claridad entre realidad y sueño. Para entender la importancia desmedida que le concede a este argumento hay que recordar que Descartes había interpretado los sueños del 10-XI-19 como una iluminación divina que determinará el curso de su vida; además, la idea de que la vida es sueño está en el ambiente de la época, como dramatizarán Shakespeare y Calderón; buen cristiano, Descartes siente que la verdadera vida es el cielo y la realidad sólo un sueño pasajero. Contra la fiabilidad de los sentidos menciona también el «argumento de la locura»: el loco cree estar cuerdo, que sus alucinaciones son reales y sus desvaríos razonables, luego no podemos distinguir claramente locura y razón. Ambos argumentos son simétricos, pues el loco no es sino un soñador despierto.

Una vez que la realidad ha quedado en suspenso Descartes extiende la duda al ámbito de las verdades eternas de la matemática, mediante el poderoso argumento del dios engañador, cuyo poder bastaría para hacer que dos más tres no sean cinco. Sólo considera la posibilidad de que las ideas matemáticas sean engañosas en cuanto a su valor de verdad, es decir, respecto a su adecuación a la realidad; en efecto, no puede considerar el engaño en cuanto a su consistencia formal o validez —que lo que nos parecen deducciones correctas fueran inválidas— porque es el propio mecanismo de deducción lo que determina qué es válido, y por extensión a lo real, verdadero. Aun así parecería que los dos tipos de falsedad posible —existencia de las ideas y adecuación de las matemáticas— generan por combinación tres tipos de engaño:

a) La realidad existe, pero la matemática es falsa, aunque parezca aplicarse con éxito.

b) La matemática es válida, pero la realidad a la que creemos aplicarla no existe.

c) La realidad no existe y la matemática es inválida.

El segundo caso corresponde al mundo de un yo solipsista; Descartes no distingue explícitamente entre el primer y el tercer caso, debido a su identificación de la física con la matemática; en efecto, en el caso de que esta última sea falsa el hecho de si la realidad existe o no existe es irrelevante, lo que importa es que el formalismo matemático no se corresponde ni con la lógica de la realidad física —caso primero— ni con la lógica de las ideas corpóreas —caso tercero.

Lo único que traspasa la barrera de la duda es la siguiente afirmación: «Pienso, luego soy». Este enunciado no es la conclusión de un silogismo sino una intuición evidente. Examinemos el significado de sus términos. Para Descartes «pensamiento» es cualquier acto mental: querer, imaginar, sentir, dudar... El adverbio «luego» expresa la necesidad de que no puede pensar —tanto si acierta como si se engaña —sin existir. Descartes no define «ser», término que utiliza como lo opuesto a «nada». A continuación se pregunta: ¿Quién piensa? Y responde: «Yo». Aún la filosofía no está en condiciones de plantear el tema a la inversa y decir: «Pensar yoíza». Descartes, por reducción al absurdo, concluye que «yo» es espíritu. «Yo» no es cuerpo, argumenta, porque puede concebise a sí mismo, en cuanto «yo» pensante, sin los atributos corporales: extensión y movimiento; «yo» y sus pensamientos ni pueden ser medidos ni consisten en movimiento alguno. Si recordamos que para Descartes el movimiento es pasivo, puesto que los cuerpos no se mueven en virtud de un dinamismo interno sino del movimiento que Dios les confiere y conserva, comprenderemos por qué necesita recurrir a la semejanza con Dios para justificar la facultad del espíritu —huella divina impresa en el hombre— para mover lo corpóreo.

Tras desechar que el yo sea alguna de las facultades que Aristóteles situaba en el alma, como nutrición, movimiento y sensibilidad, ya que las tres necesitan de lo corpóreo, concluye que «yo» es sólo pensamiento, es decir, espíritu, entendimiento, razón, y extrae la siguiente consecuencia: Si «yo» soy capaz de conocerme sin conocer el mundo móvil y extenso eso quiere decir que soy independiente de él. Descartes pasa luego a demostrar que ni la imaginación ni los sentidos bastan para conocer el mundo, mediante un famoso ejemplo: puedo sentir las diversas propiedades de un trozo de cera —figura, magnitud, olor...— y puedo tener una imagen mental de la cera, pero al aplicarle calor todas esas propiedades cambian, luego el conocimiento de la cera no puede depender de los sentidos ni de la imaginación, ya que no podrían captar la ilimitada variedad de estados posibles de la cera; el conocimiento depende del entendimiento, que es capaz de abastrer la idea «cera».

Al inicio de la tercera meditación Descartes se enfrenta a un dilema crucial: si existiera un genio maligno omnipotente podría engañarlo incluso en sus mayores evidencias, pero la evidencia le dice que no hay omipotencia que consiga que «yo» no sea cuando piensa, o que alguna vez futura sea cierto que «yo» no haya sido, o que dos más tres no sean cinco. Si eligiera como más fuerte la primera alternativa condenaría al conocimiento a quedar sin garantía de certeza; al elegir la segunda opta por una vía que le dará tal garantía, pero es discutible —contra lo que él cree— que logre refutar la hipótesis del dios engañador. O se pretende que la omnipotencia sea absoluta, y por ende, independiente del «yo», o se acepta que es relativa, y por tanto tiene el significado que el «yo» le otorga, en cuyo caso la mencionada hipótesis equivale a decir que para que un dios sea omnipotente tiene que existir el «yo», lo cual es ya un límite a la omnipotencia. Descartes no contempla la posibilidad de que el genio maligno lo engañe *mediante la lógica* y subordina a esta la pseudoomnipotencia de aquel; por eso, su respuesta natural —ya que necesita superar el escepticismo—es elegir como axioma la evidencia del «yo», y por tanto, la estructura lógico-matemática de la conciencia.

Las ideas son definidas como «pensamientos del yo sobre el mundo», pudiendo ser tanto afectivos —siento, quiero— como intelectivos: los juicios. Entre las ideas hay unas que parecen formar parte del «yo», innatas; otras parecen proceder del mundo exterior —adventicias— y otras parecen haber sido inventadas por el«yo» —facticias. Se plantea luego la relación entre ideas y cosas: «Las ideas objetivan una realidad formal que es su causa». Descartes se propone encontrar entre sus ideas aquellas que le puedan garantizar la existencia exterior al«yo» de aquello a que se refieren, es decir, ideas que no puedan haber sido producidas exclusivamente por su «yo». Aduce que las ideas «hombres», «animales», «ángeles» y las de cualidades sensibles —«color», «dureza»— no cumplen esa condición porque pueden haber sido formadas por el yo mediante una mezcla de la propia idea «yo» e ideas corpóreas. Afirma, en consecuencia, que el «yo» puede ser el autor de las ideas corpóreas, pero para probarlo tiene que sacar de su chistera un conejo aristotélico: la sustancia. El yo se conoce a sí mismo como sustancia, y pensándose en distintas ocasiones podría generar las ideas «duración» y «número». Además, la sustancia contiene de manera eminente las ideas de «extensión», «figura», «movimiento» y «situación», que no son sino sus modos. Aquí Descartes parece muy cercano a Kant, pero no da el paso hacia la metafísica idealista de considerar al «yo» como sistema apriorístico base del conocimiento, aunque Hegel reconoció su deuda proclamándolo padre del idealismo alemán.

Al «yo» sólo le queda la idea «dios» como fuente posible de un ser existente distinto de sí; tal idea es en realidad, la de «ser infinito», ser que posee todas las perfecciones en grado infinito, ser supremo, eterno, inmutable, omnisciente y creador. Si es cierto que la idea teológica de infinito —como negación de cualquier límite para Dios— abre desde Agustín de Hipona el camino a su homóloga científica, aquí se produce el movimiento de retorno: la matemática cartesiana del infinito despeja el camino para la demostración de la existencia de Dios. La existencia es una más entre las perfecciones divinas, por tanto, de la idea «dios» se deduce su existencia. Para justificar este renovado argumento ontológico, original de Anselmo de Canterbury, argumenta:

a) Tal idea no puede provenir de la nada, pues la nada no puede producir cosa alguna.

b) Tampoco puede provenir del «yo»; lo que se prueba por el axioma escolástico: «En la causa tiene que haber tanta realidad como en el efecto».

c) No proviene de la mera negación de la idea «finito», sino al contrario, esta procede de aquella por privación.

d) Es una idea clara y distinta y por tanto ha de tener un referente que la cause.

e) Siendo Dios infinito el «yo» sólo puede aspirar a conocerlo como idea.

f) Como el «yo» no es infinito el conocimiento no puede llegar nunca a ser infinito y tampoco puede tener nunca una perfección en grado infinito.

Descartes se interroga: ¿Podría ser «yo» sin Dios? Su respuesta negativa, que significa distinguir entre seres necesarios que existen por sí mismos y seres contingentes cuyo existir depende de otro ser, le conduce a la prueba de la existencia divina por la contingencia del «yo». La prueba pretende ser a la vez sincrónica y diacrónica, puesto que se asevera que el «yo» no tiene poder en sí mismo para conservarse más allá del instante en que vive y que no ha podido ser creado sino por Dios. Así como la extensión es continuidad el tiempo es discontinuidad, sucesión indefinida de instantes sin duración. Sus argumentos son:

a) Si el «yo» se hubiera creado a sí mismo estaría dotado de todas las perfecciones, ya que se habría dado la existencia, que es la más difícil.

b) «Yo» no tengo el poder de conservarme a lo largo del tiempo, pues no soy consciente de tal poder.

c) «Yo» no puedo haber sido creado por una causa única distinta de Dios, pues tengo la idea de «Dios infinito» y tiene que haber tanta realidad en la causa como en el efecto.

d) «Yo» no puedo haber sido creado por un conjunto de causas tal que cada una me haya aportado la idea de una sola perfección, pues mi idea «Dios» contiene la perfección «simplicidad».

e) La filiación afecta al cuerpo, no al «yo».

f) Como el engaño depende de alguna imperfección Dios no puede ser engañador.

A semejanza de los teólogos cristianos que explican la existencia del mal desligándola de Dios mediante el recurso a la libertad humana, Descartes trata de explicar el error como producto del libre albedrío, sin intervención de quien es veraz por definición. Argumenta:

a) «Yo» soy un término medio entre Dios y la nada; yerro en cuanto finito, conozco con certeza en cuanto divino.

b) Los fines divinos son incognoscibles.

c) Lo que parece imperfección respecto de un ser particular puede ser perfección desde el punto de vista de la totalidad de los seres, es decir, desde la perspectiva divina.

d) Se puede concebir qué es un entendimiento finito y uno infinito; se puede concebir qué es una voluntad finita —la del yo—pero no qué es una voluntad infinita, pues aunque ambas sean distintas respecto a su alcance no se puede concebir que sean distintas en su concepto, en cuanto libre arbitrio. Esta semejanza de la voluntad humana con lo infinito trae como consecuencia el error, que no se debe al entendimiento en sí ni a la voluntad en sí, sino a su relación, ya que la voluntad pretende ir más allá de los límites del entendimiento.

Descartes dirige luego su atención hacia las ideas de cosas materiales que tiene su «yo»; encuentra algunas, como «extensión», «magnitud», «figura», «situación», «duración», «movimiento», y en general, las ideas aritméticas y geométricas, cuya verdad inmutable, que no depende del «yo», le convence de que no es el «yo» su autor, aunque las descubra en su espíritu como si hubieran estado ahí desde siempre, como si las recordara. Distingue entre tales ideas matemáticas innatas y la idea «dios» así:

Idea de Dios:

a) Es la única que no admite separación entre esencia y existencia, porque la existencia pertenece a su esencia.
b) Es una idea necesaria, pero la necesidad no la pone el «yo» en la idea sino Dios en el pensamiento.
c) Incluye los rasgos de unicidad y simplicidad.
d) No puedo cambiar nada en ella.

Ideas matemáticas:

a) No hay nada en su esencia que asegure su existencia independiente de mi razón.
b) Dependen de mi pensamiento; sólo hay necesidad en ellas en tanto las actualizo en mi pensamiento.
c) Son verdades eternas en el sentido de que su verdad dura mientra dure el tiempo; no expresan la esencia divina sino una libre decisión de Dios.
d) Cambian en mi pensamiento a medida que perfecciono mi conocimiento, aunque solo llego a conocer de ellas lo que Dios había puesto desde siempre.

Aquí alcanza Descartes el «círculo virtuoso» de su razonamiento: conozco la existencia de Dios porque tengo de él una idea evidente, clara y distinta, y la verdad de tales evidencias queda garantizada por la existencia de Dios. «Dios» y «yo», únicas ideas demostrables sin recurso al concepto de «veracidad divina» se erigen como axiomas fundamentales de la filosofía cartesiana. Circuito lógico —de «yo» a «Dios»— y ontológico —de «Dios» a «yo»—en el que se establece una asimetría, pues la certeza de una evidencia del «yo» sólo vale por sí misma mientras dura la intuición o proceso deductivo correspondiente; en cambio, basta haber demostrado la existencia de Dios para poder estar seguros el resto de la vida de que las evidencias del «yo» son ciertas.

El «yo» puede concebirse, mediante el entendimiento, sin imaginación ni sensibilidad; por contra, estas no pueden concebirse sin hallarse ínsitas en un espíritu, lo que indica que tales facultades no son la esencia del «yo», sino que dependen de algo exterior: de lo corpóreo. Como Dios no es falaz y dado que el «yo» tiene sensaciones e imágenes que cree procedentes de cosas externas, puede estar ahora seguro de la existencia de dichas cosas. La Naturaleza es el orden que Dios ha impuesto en las cosas del mundo; la naturaleza humana, que consiste en ser un espíritu vinculado a un cuerpo es parte del orden divino. Ahora bien, las cosas no tienen por qué ser semejantes a las sensaciones que me producen; ello se debe a que las cualidades secundarias —como calor o sabor— no pueden concebirse con claridad y distinción, y por tanto, nada nos asegura que estén en las cosas, al contrario de lo que ocurre con las cualidades primarias —como extensión y movimiento— que son claras y distintas.

Descartes se plantea la siguiente objeción: ¿Si mi naturaleza me enseña a evitar el dolor y procurar el placer cómo es posible que realice por error acciones contrarias a mi preservación? La explicación es que se debe al funcionamiento de nuestro sistema nervioso, pues la glándula pineal se engaña al atribuir siempre la misma causa exterior a la misma excitación sensible, ya que esta puede ser provocada igualmente por la excitación de cualquier tramo del nervio que la transmite al cerebro. Considera que es en esa glándula donde se produce la comunicación entre alma y cuerpo; en ella reside el sentido común o luz natural, saber propio del cuerpo que no es producto del entendimiento. Gracias a la existencia de Dios queda restaurada la confianza en la experiencia, en la memoria y en el entendimiento: los sentidos conocen correctamente la mayoría de las veces, nuestros recuerdos nos proporcionan el conocimiento adquirido en el pasado y el entendimiento nos permite descubrir las causas del error. Incluso el «argumento del sueño» pierde su relevancia, pues Descartes advierte una diferencia: durante la vigilia las percepciones están conectadas entre sí, se percibe las cosas con lugar y duración; en cambio, al soñar las percepciones aparecen inconexas. Como la vida nos urge a actuar, sin tiempo para exámenes cuidadosos, es frecuente errar, debido a nuestra endeble naturaleza.

Los principios de la filosofía

En 1644 Descartes publica «Los principios de la filosofía», compendio general del sistema cartesiano escrito en forma de manual escolástico para su mejor comprensión y enseñanza, donde cada principio aparece numerado, definido y explicado. En la primera parte expone la doctrina de las «Meditaciones», aunque trata más extensamente el problema de la libertad y la relación de la sustancia con sus atributos y modos. En la segunda, empieza afirmando que la unión alma-cuerpo es confusa, como casi todo lo que tiene que ver con la materia, pero aun no pudiendo conocer esa unión con certeza nuestros sentidos y nuestra experiencia la confirman; luego expone parte de la física teórica de «El Mundo» y las leyes mecánicas del choque elástico. En la tercera, amplía la astronomía de «El Mundo» y se desmarca de la polémica geocentrismo versus heliocentrismo mediante un recurso retórico, afirmando que no se puede decir ni que la Tierra se mueve —pues no tiene ningún principio dinámico interno— ni que no se mueve, ya que es arrastrada por los cielos. En la cuarta, siguiendo su costumbre de establecer analogías entre lo inobservable microscópico y la experiencia macroscópica, empieza con física teórica de «El Mundo» y luego trata multitud de fenómenos, dedicando gran atención al estudio de los imanes y el magnetismo; continúa con un resumen de la fisiología de los sentidos y concluye reconociendo que aunque en Física no se puede alcanzar la certeza metafísica, excepto en su parte matemática, sí se logra una certeza moral, psicológica.

Las pasiones del alma

En 1649 Descartes publica «Las pasiones del alma» donde trata de explicar la afectividad mediante la relación alma-cuerpo. Las pasiones son modos del alma causadas por el cuerpo, efecto de esos «espíritus animales» —las partículas más sutiles y veloces de la sangre— que producen los movimientos corporales mediante su acción en los músculos y nervios. Distingue entre actos involuntarios, provocados por las impresiones sensibles, y voluntarios, expresión del alma a través de la glándula pineal. La lucha entre la razón y las pasiones consiste en que dicha glándula puede ser afectada a la vez con movimientos contrapuestos por el alma y por los «espíritus animales». Hay seis pasiones primarias: admiración, amor, odio, deseo, alegría y tristeza; las demás están compuestas de ellas. Cada una sufre una doble determinación, del cuerpo y sus hábitos, por un lado, y del espíritu en cuanto entendimiento y voluntad. Ello permite un camino ascético de sublimación moral que convierte paulatinamente la pasión corporal en pasión intelectual.

Al final de su vida Descartes abandona el socratismo de que había hecho gala y concede a la voluntad supremacía sobre el entendimiento; ya no cree que la evidencia del bien, intuída por el entendimiento, constriñe a nuestra voluntad a actuar moralmente; ahora piensa que negarse a realizar el bien, conociéndolo con claridad y distinción, es prueba indiscutible de la libertad humana, a la que declara valor máximo. No es de extrañar este puerto de arribada considerando el voluntarismo teológico cartesiano; la infinitud mantiene alejado a Dios de la razón humana, que sólo lo conoce ligeramente por sus obras: el orden de la Creación y el espíritu del hombre, espíritu que ya no es la medida de todas las cosas ni de la verdad —como en las «Regulae»— sino tan sólo de sus juicios. Resurgen algunos temas de la ética del «Discurso»: Descartes se mueve entre el fatalismo resignado que exige capacidad de adaptación y una exaltación de la resolución y el coraje como virtudes imprescindibles para la vida.

Física y metafísica en Descartes

Desde la perspectiva histórica hay que resaltar el antiaristotelismo de la física cartesiana; el sistema de Aristóteles había iniciado su crisis con la obra de Grosseteste, Oresme, Buridán, Alberto de Sajonia y los mertonianos, y aunque seguía siendo defendido por los filósofos escolásticos del XVII los trabajos de Copérnico, Kepler y Galileo lo tenían amenazado de ruina. Antiaristotelismo que se manifiesta de entrada en el rechazo a considerar lo físico y lo matemático como géneros irreconciliables; asimismo en la voluntad de eliminar las «cualidades» como causas físicas y sustituirlas exclusivamente por magnitudes geométricas —figura y disposición de sus partes— y aritméticas —tamaño y velocidad. Sin embargo, el defecto fundamental de la física cartesiana consiste en que no es una física cuantitativa —y «a fortiori» experimental— sino un sistema teórico muy especulativo que se toma poco interés por medir los fenómenos que explica. Para Descartes tienen mucha más importancia las «experiencias» en que la Naturaleza se nos revela tal cual es que los «experimentos» en que le imponemos condiciones, límites y artificios. Las pocas veces que menciona a Galileo es para criticarlo por no tener espíritu de sistema y dedicarse simplemente al examen de fenómenos particulares, o como él dice, por ponerse a explicar efectos sin pararse a averiguar sus causas primeras o fundamentos.

Descartes intenta librarse de las «causas finales» aristotélicas, sustituyendo la física teleológica por una física mecanicista, pero su radicalismo matemático le lleva a construir una física ni dinámica ni cinemática, meramente geométrica. En su afán de crear una ciencia de certeza absoluta por sus axiomas y su método deductivo se deja fuera de la física la materia, por ser causa de oscuridad y confusión, como se verá forzado a reconocer con frecuencia, lo que tiene consecuencias desastrosas en su consideración de entidades como «fuerza» y «peso»; igual que le supone enormes problemas separar la magnitud de la velocidad y su dirección, tratándola de hecho como si no fuese una magnitud vectorial.

Al equiparar materia y extensión extrapola la infinita divisibilidad de la segunda —geométrica— a la primera —física— y aunque, en teoría, su sistema rechaza los átomos y el vacío, en la práctica es a menudo compatible con una física atomista; con ella comparte la aceptación de entidades inobservables —los tres elementos— que producen efectos verificables, en función de su tamaño y velocidad, que no se pueden medir. Conforme a su alta estima del arte de la invención Descartes elabora una física muy imaginativa, haciendo gala de un asombroso ingenio para crear hipótesis «ad hoc» y experimentos mentales que confirmen sus teorías. De ahí que sus mayores aciertos en física, como la ley de la refracción o su explicación del arcoiris, deban su éxito a su capacidad matemática.

La visión que Descartes tiene del saber pondera lo religioso y lo útil; por una parte, conocer el mundo significa comprender la obra de Dios; por otra, el conocimiento supone poder mejorar la vida humana. Consciente de que la nueva ciencia entra en conflictiva competencia con la teología, adopta dos medidas prudentes: se retira a los Países Bajos, espacio de tolerancia religiosa, alejándose de la vida pública y pone como fundamento de la ciencia al Dios de los teólogos. La sabiduría cartesiana no es como la teológica, pensamiento substancialista, lógica de conceptos erigida sobre la interpretación de los textos sagrados y del mundo, sino un pensamiento matemático relacional, calculador y predictivo; por eso su éxito no se prueba con razones lógicas sino mediante descubrimiento de leyes.

La física matemática cartesiana se abre al dominio de la Naturaleza y dos de sus objetivos declarados son la disminución del trabajo físico y alargar la vida mejorando la salud. Como ha señalado Heidegger, la ciencia se convierte en una empresa social con múltiples especializaciones que aspira a conocerlo todo, y en consecuencia, a manejar todo, a convertir toda sabiduría teórica en artilugio técnico; la manufactura deja lugar a la era del maquinismo.

El hombre se proyecta como dueño del mundo, no sin la legitimación del Creador; proceso de antropologización que deja sus huellas en la metafísica: se constituye el «yo» transcendental como sujeto de conocimiento —Descartes, luego Kant— y de ahí se pasa al «Nosotros» hegeliano: la Humanidad como autoconciencia del despliegue de la Razón. Se abandona la filosofía de la presencia —el saber como presencia del mundo en el lenguaje del hombre— y comienza la filosofía de la representación: lo existente como objeto de conocimiento para un sujeto pensante. Se sustituye la verdad —el mundo da forma al conocimiento— por la certeza: el pensamiento da forma al mundo. El «yo», sujeto pensante, se halla doblemente sujeto: a las leyes de la Razón en cuanto espíritu y a la ley divina que lo hace libre en cuanto voluntad.

La humanización del mundo entraña la pérdida de importancia de lo sagrado natural; lo sagrado revierte en lo humano: la vida individual, los derechos del ciudadano, la intimidad. Criticaba Pascal, defensor de un Dios íntimo, que en la filosofía cartesiana el único papel que jugaba Dios era poner en marcha el mundo; en efecto, el Dios de Descartes no es un dios animista que juega con la Naturaleza, ni el dios justiciero del Antiguo Testamento, ni el dios salvador de los Evangelios; es un dios filosófico del que la razón humana puede conocer poco, aunque la voluntad humana lo espere todo de él, esperanza que se funda en la libertad. Diré que este Dios casi incognoscible y que nos quiere libres se parece sospechosamente al «Yo», y que este «yo» tan matemático se parece sospechosamente a Descartes, quien sin embargo, declaraba en su juventud el propósito de avanzar enmascarado por los caminos de la vida. Dejamos aquí a este hombre resuelto que tuvo el coraje de seguir durante treinta años el camino trazado por el sueño que iluminó su destino, guerra no menor que aquella que lo vió por los campos de Europa señor en su caballo y de la que se apartó eligiendo la libertad del viajero, del solitario y del pensador.

BIBLIOGRAFÍA

ALQUIÉ, F.: «Descartes, vida y obra». ____

CLARKE, D.: «La filosofía de la ciencia de Descartes», Alianza.

DESCARTES, R.: «Reglas para la dirección del espíritu», Porrúa:
«Tratado de la luz», Alianza.
«Tratado del hombre», Ed. Nacional.
«Discurso del método», Alianza.
«Meditaciones metafísicas», Alfaguara.
«Principios de la Filosofía», Reus.
«Las pasiones del alma».

GARIN, E.: «Descartes». ____

GÓMEZ PIN, V.: «Descartes y su obra», Dopesa.

GOUHIER, H.: «La pensèe religieuse de Descartes», Vrin.

GUEROULT, M.: «La philosophie de Descartes selon l'ordre des raisons», Vrin.

KOYRÉ, A.: «Entretiens sur Descartes», Brentano.

LIATKER, YA.: «Descartes», Progreso.

RODIS-LEWIS, G.: «L'oeuvre de Descartes», Vrin.

SHEA, W.: «La magia de los números y el movimiento», Alianza.

TURRÓ, S.: «Descartes. Del hermetismo a la nueva ciencia», Anthropos.

SPINOZA: DE CUERPOS Y MENTES

Francisco Rodríguez Gutiérrez
Profesor de Filosofía
I. B. Tacoronte

Empezaré con una analogía pictórica. El siglo XVII, representado en las telas y los barnices de la escuela holandesa, es un siglo pleno de luz, de una luz serena, luz en expansión que llena el espacio, luz que resalta los relieves y las texturas porque se manifiesta bajo una intensidad corpuscular. En los Países Bajos, no es siglo de estudio de perspectivas, tampoco lo es de naturalezas muertas; es el siglo de Vermeer (1632/1675). En sus cuadros percibimos el microcosmos de la Holanda de la época, pero no el cosmos menudo de los reyes de la aristocracia, tampoco lo es de médicos que ejercen una disección maestra; también se excluyen la temática de personalidades relevantes así como los motivos que no sean casos de una inspiración más natural. La importancia de las obras no está en la temática ampulosa, está en que cada lienzo es una mirada, una representación sobre temas comunes: mujeres pensativas con turbantes, humanos manipulando objetos cotidianos como balanzas, tocando clavicémbalos y tañendo laúdes, contrapesando perlas, talleres de pintura, salas de astronomía, cortesanas, cocineras, etc. Vemos que en cada cuadro el objeto desempeña una acción sencilla descrita con una mirada simple. La acción siempre está ahí, pero se manifiesta silenciosamente, sin sobresaltos. Las obras de Vermeer representan a humanos siempre ejecutando una tarea, y siempre la hacen con un cierto aire de reflexivo pensamiento. Tenemos pues, una obra que refleja una sucesión de escenas comunes *representada* con una caracterización íntima y sencila. Todas las escenas son, en definitiva, manifestaciones que se advierten acaso con el mismo esquema perceptivo, como si formasen un todo. En su obras de madurez «El taller», «El soldado y la muchacha» y «La mujer y la ventana» (por citar las más importantes) muestra a humanos trabajando con naturalidad sin precedentes, sin mostrar esfuerzo en el trabajo, como tampoco en la técnica del pintor de Delft, sin revelar Vermeer la enorme complejidad de su técnica pictórica, y en todos estos cuadros, (como en muchos otros) aparecen siempre mapas cartográficos de su mundo, para recordar que esas escenas espontáneas, se enmarcan en algo mucho más extenso, en algo que contiene y engloba todas las posibles actividades comunes. Otra caraterística de la composición de Vermeer, consiste en que utiliza como elementos arquitectónicos formas geométricas abastractas: formas triangulares.

En unos de sus pocos paisajes «Vista del Delf», bajo una apacible atmósfera se retrata el puerto de su ciudad. Marcel Proust dijo «...es un pequeño lienzo de muro pequeño y amarillo, de una belleza que se basta a sí misma». La técnica de Vermeer, al contrario que la de Rembrandt, no necesita de grandes superficies, casi siempre menos de un metro de largo; no necesita dorados reales, ni blancos con tintes rosa. El color de Vermeer es humilde, a disposición de una técnica de trazo fino y preciso. «La verdad es patrón de sí misma», nos dirá Spinoza.

La filosofía de Baruch de Spinoza comparte con las telas de Juan Vermeer un valor: el valor que tiene la acción, desde una actividad serena, pensada y reflexiva. Spinoza busca para su filosofía una aplicación instalada en la vida diaria de los humanos. Suministrar una teoría completa sobre la acción que conduzca a una actitud ética coherente con la naturaleza pasional del hombre. En ambos, los actos cotidianos se muestran más puros si comparten el rasgo de la serenidad, que surge de reconocerse en ellas el valor de la naturaleza. Comparten una cierta forma de mirar. Quizás por eso, Spinoza buscaba la compañía en vida de pintores. El dios de Spinoza, mera figura lógica y retórica, no ha sido construído con la técnica del bordado, tejido con fina seda, laboriosamente, día tras día, tal como nos lo narra poéticamente Borges. El dios de Spinoza, es una figuración semántica representadora del todo, epónimo de la naturaleza, o si se prefiere, dios es una representación intuída ante la fragmentación con que se nos muestra la dinámica naturaleza, representación intuída con la técnica de la pintura de Vermeer, y luego expuesta geométricamente. Lo geométrico se corresponde con integración holista, más que demostración matemática, con una luz desveladora lateral que impregna a una infinita sucesión de seres finitos que llamamos naturaleza, como las telas de Vermeer.

Esta ponencia pretende sintetizar la obra de Baruch de Spinoza. Ese es el fin de su primera parte. En ella se exponen brevemente las características de la Metafísica, la Tª del conocimiento y la ética contenidas en sus obras fundamentales. No he desarrollado su Tª Política y Social por razones de economía de espacio. El lector que busque simplemente una síntesis esquemática del pensamiento del filósofo holandés puede leer esta primera parte.

La segunda parte de la ponencia se ha visto notablemente cercenada por motivos de brevedad y espacio en este volumen. Proporciona una aproximación somera a la concepción de la mente (alma) en Descartes y Spinoza. El objetivo es demostrar que la concepción cartesiana de la mente es un claro obstáculo para una ciencia centrada en el humano. En esta introducción me centro en estos aspectos: ¿Podemos comprender al humano sólo con los instrumentos y herramientas conceptuales de la ciencia natural? ¿Es la mente humana reductible a los estados y procesos cerebrales? ¿Son los procesos mentales libres? Estos problemas son capitales para el desarrollo de la imagen que del humano tenemos en el siglo XX, y tienen sus raíces desde la antigüedad griega, pero adquieren un énfasis especial a partir del siglo XVII. Podemos afirmar que existen dos posiciones:

a) la posición cartesiana, que afirma una doble estrategia para resolver la demanda de conocimientos sobre el hombre, un estudio científico de los mecanismos y componentes corpóreos o materiales del humano, y otro, un enfoque no causal y no determinista para la parte espiritual; o bien,
b) la posición ilustrada, y por tanto spninoziana, que describe al humano como una entidad natural íntegramente material, y por tanto debemos de acercarnos a ella con los mismos utensilios con los que describimos los fenómenos físicos y biológicos.

La primera posición es conocida como *dualista*, al postular dos entidades separadas, alma y cuerpo, que interactúan, y es la posición de Platón, Descartes, Popper, Ecclers. La segunda es la opción *monista psicofísica*, la cuál sostiene que las propiedades mentales son materiales, reductibles a ciencias elementales [1] o no. Es la postura defendida por el Aristóteles tardío, Spinoza, Hobbes, Cajal y una infinidad de teóricos e investigadores de las capacidades humanas.

La posición que se mantenga en este problema va a repercutir necesariamente en un conjunto variado de temas y entre ellos la posibilidad o negación de estudiar al humano, en sus dimensiones psicológica y social, conforme al espíritu de la ciencia experimental. Este será el tema primero de la segunda parte de la ponencia. Se intenta en ella discutir la opción de Spinoza en lo referido al tratamiento científico del humano, especialmente el caso conocido como «problema alma-cuerpo» material.

1. Incluso eliminable, por ejemplo la obra de F. B. Skinner.

Baruch de Spinoza es un pensador inusual en los manuales de historia de la ciencia. Sus estudios se centran en problemas preferentemente filosóficos. Generalmente, si clasificamos los trabajos de Hª de la Ciencia, nos encontramos con un repertorio de autores y temas cuya aportación podemos circunscribirla bajo el rótulo de ciencias físicas [2], biología y matemáticas. Ocasionalmente, detectamos figuras pertenecientes a las áreas de medicina e ingeniería, o también estudios sobre las aplicaciones tecnológicas de los saberes teóricos. El segundo objetivo de esta ponencia consiste en exponer la tesis de que la historia de la ciencia [3] no debemos entenderla de manera restringida, centrada exclusivamente en unas disciplinas que estudian áreas de conocimiento con alto desarrollo predictivo, tecnológico y un lenguaje matemático para describir la naturaleza. Muy al contrario, sería meritorio afrontar el hecho de que la historia de la ciencia debe de acoger en su mismo seno los desarrollos de las llamadas ciencias humanas y sociales, (en realidad preciencias). Esta reivindicación hacia la apertura, corrimiento de la hª de la ciencia hacía las disciplinas que estudian las conductas y los procesos psicológicos, psicoculturales y económicos se fundamenta en dos supuestos que considero concluyentes:

a) No existe ninguna razón metodológica o epistémica que excluya la construcción de modelos científicos del humano bajo los mismos criterios que los de las ciencias más desarrolladas y
b) Los fenómenos humanos son tan naturales como cualesquiera otros.

Veremos las razones que Spinoza aporta para unificar el estudio humano con las demás ciencias naturales.

No voy a discutir en esta ponencia las razones tradicionalmente esgrimidas para la marginación de los criterios de cientificidad de la investigación psicológica y social, ni tampoco aportar una justificación del monismo metodológico implícito en estas dos afirmaciones anteriores. Me propongo exponer la filosofía de Spinoza como un caso de justificación de las dos proposiciones. Su filosofía —pintar con conceptos—, es optimista en lo que se refiere a la confianza de que el humano pueda ser investigado, teorizado con las mismas herramientas con las que indagamos los demás seres naturales. La posición spinoziana, ejemplifica a los que «no se sienten a gusto» con un trato diferencial en el área de la ciencia humana con respecto a las ciencias más avanzadas. El punto central de su filosofía es la afirmación y justificación de un

2. Es la categoría más amplia: incluye astronomía, cosmología, física en todas sus especialidades, y química.

3. Proponer una definición de ciencia, que incluya los desarrollos psicosociales además de los clásicos.

monismo materialista, todo es materia, y por otro lado, la eliminación del dualismo mente versus cuerpo. Este segundo aspecto aparece como uno de los argumentos preferidos contra las ciencias humanas naturalistas [4].

La polémica está representada por la posición cartesiana frente a la spinoziana. En esta ponencia se sintetizarán ambas posiciones y se intentará demostrar el error de Descartes en la misma.

Aproximación biográfica

Nace el veinticuatro de Octubre de 1632, un año antes de la condena a Galileo, hijo de una familia sefardí supuestamente convertida al cristianismo pero que perseguida y hostigada por la Inquisición y las favorables condiciones económicas de Holanda, deciden emigrar a Amsterdam, donde ingresan en la colonia judía de sefardíes. Su padre es nombrado incluso «guardián de la sinagoga» título honorífico con el que se nombra a personas de especial importancia en la comunidad [5]. Sabemos que su idioma natal era el castellano y que sus primeros estudios versan en las doctrinas talmúdicas y bíblicas, con los maestros Nenasseh Ben Israel y S. Morteira. Hacia 1650 sigue perfeccionando estudios latinos e ingresa en la comunidad judía del Hets Haim, donde conoce la teorías cabalísticas judías y neoplatónicas. Spinoza no sólo recibe una educación hebrea, sino que participa de las enseñanzas escolásticas, ya que su estilo argumentativo y terminológico es claramente deudor de ellas, y sobre todo del cartesianismo holandés (recordemos que Descartes vive casi veinte años en los Países Bajos). Estudia latín con el expulsado de la orden jesuita Van de Euden, hombre comprometido con los nuevos métodos filosóficos, y liberal en lo político (muere ejecutado en Francia por promover la rebelión) y con otros reconocidos «liberales» como Uriel de Costa [6].

Ya firmada la paz con España, en Münster, la zona norte de los Países Bajos goza de suficiente sosiego para invitar al joven Spinoza a reuniones con «judíos liberales», en el curso de las cuales conoce a Juan del Prado, de adscripción deísta, cuya tendencia crítica influye en él. Según los biógrafos más reconocidos de Spinoza, en los medios hebreos dadivosos se practicaba una actitud crítica que heredaron de su estancia en España como «marranos». Juan del Prado, excomulgado en 1656 (el mismo

4. No confundir con los dualismo metodológicos, de una ciencia social comprensiva y hermenéutica.

5. Este hecho podría explicar, por qué la comunidad judía antes de expulsar a Spinoza, con las maldiciones del Deuteronomio, le ofrezca una cantidad de dinero anual, vitalicia, de 1000 florines, una cantidad nada despreciable que Spinoza rechazó.

6. Todos sus profesores liberales fueron sin embargo acusados de negar la verdad revelada, y de interpretar a Dios sólo desde la naturaleza.

año que Spinoza), entre otros, se convirtió en blanco de sospechas por parte de la ortodoxia judía por sus contactos con protestantes no calvinistas y progresistas sociales. Este marco de relaciones influirá en la sonada expulsión de Spinoza de la comunidad judía a los veinticuatro años, en concreto el veintisiete de Julio. Spinoza publicará un manifiesto técnico en donde dará cuenta de las diferencias entre su pensamiento y la ortodoxia judía, y años mas tarde publicará su «Tratado Teológico Político», un testimonio filosófico contra el proceder teológico. Este carácter de desarraigo frente a las posiciones dogmáticas será una de las características del pensamiento del autor de la «Reforma del Entendimiento».

Trabajó en Amsterdam como pulidor de vidrios para aparatos de precisión, lentes ópticas para telescopios, lupas... . El mismo año que muere su padre, sufre un atentado por parte de un judío fanático, y salva la vida gracias a un abrigo de piel tupida que llevaba puesto, pieza ésta que conservó durante toda su vida y que gustaba enseñar a sus amigos como ejemplo de lo que podría ocurrir cuando al otro lado del diálogo se encuentra una persona cuyo comportamiento no está regido por la razón. Tres años después, se traslada a Rijnsburg, cerca de Leyden [7], e inicia una larga actividad epistolar con Oldenburg, secretario de la Royal Society de Londres. En 1666 publica sus tratados cartesianos, únicas dos obras que publicará en vida, con la excepción del Tratado Teológico Político (1663) que recorrerá toda Holanda [8]. Más tarde se traslada nuevamente a Voorburg, próximo a La Haya, en cuya ciudad residía el físico holandés Huygens y varios protestantes franceses exilados. En 1670, ya en La Haya y alojado en la casa del pintor holandés Vander Spick, su vida transcurrirá entre los sobresaltos políticos de Witt. Rechaza en 1674 una propuesta de la Universidad de Heidelberg para ocupar una cátedra de filosofía natural. En este mismo año se prohíbe en Inglaterra la lectura de sus «Tratados». Recibe a Leibniz en un precario estado de salud, visita que Leibniz, hombre que afirmaba saberlo todo, negara pasado el tiempo y muerto Spinoza.

Muere en 1677 supuestamente afectado de tuberculosis (que suponía haber heredada de su madre) a los 45 años de edad, aún joven y dejando [9] una gran cantidad

7. En estos años Leyden era el auténtico centro cultural de Holanda, y probablemente de la Europa central. Allí se concentraban los seguidores de la nueva filosofía natural, especialmente cartesianos, con los que Spinoza mantendrá una relación intensa, aunque nunca comprometedora.

8. Se publicó de forma anónima en Amsterdam en 1663, aunque rápidamente fue identificado y criticado por su liberalismo. Lo más curioso de esta publicación es que se lanzó no del todo pulida, y con nombre de imprenta y ciudad trastocados ¡Hamburgo!. La obra tienen «una rara unanimidad: es condenada y atacada por judíos, católicos, calvinistas luteranos, e incluso por cartesianos ortodoxos» (de Lorenzo, Javier, «El racionalismo y los problemas del método», Edt Cincel, Madrid, 1985, pg 151).

9. La tragedia de la muerte es doble. Spinoza se centra en la década anterior en la preparación de la *«Etica demostrada según el orden de la geometría»* que no publica, y escribe dos incompletos

de proyectos por concluir. Gracias a un grupo de amigos, muy especialmente su médico Luis Meyer, recoge todos los manuscritos que publica íntegramente mediante una editorial anónima [10] formada por un pequeño círculo de seguidores que sufragaron los gastos. «Opera Posthuma» fue el título con el que se publicó: «El Tratado para la Reforma del Entendimiento» (sabemos que lo escribía desde 1663, y quedó incompleto), «Tratado Breve» (incompleto), «Etica demostrada según el Orden Geométrico» (completa. su redacción le ocupó desde 1662 hasta 1672 en las que sus amigos se pasan la edición primera [11]), y los «Tratados Políticos» (el último en escribir, que también quedó incompleto) y el ya mencionado «Tratado Teológico Político» (ahora con el nombre real).

No es fácil hacer un balance de su biografía; por un lado se observa que Spinoza nada tenía que ver con la idea romántica de hombre aislado y solitario. Su obra se gesta en un entramado bien definido de intereses personales y sociopolíticos, frente a los cuales participa con «una protesta reflexiva» como lo hace notar el profesor Misrahi.

La naturaleza y Dios

La filosofía racionalista es un marco de pensamiento idealista [12]. Existen unos rasgos similares típicos de pensadores que van desde el siglo XVII a nuestros días. Los filósofos e investigadores racionalistas comparten la creencia de que existe un conjunto completo de nociones básicas con las que la mente nace equipada. Estas

---

trabajos que retomaría una vez concluida la «Etica»: «*El Tratado para la Reforma del conocimiento*» y sus dos Tratados políticos, «Tratado Teológico Político» y «*Tratado Político*». Obras todas inacabadas, aunque en avanzado plan de redacción. Curiosamente, Spinoza sólo publica en vida las dos obras dedicadas a la difusión de a F^{a} de Descartes «*Principios de la F^{a} de Descartes*» y sus «*Pensamientos Metafísicos*», obras que le causarían auténticos quebraderos de cabeza frente los cartesianos ortodoxos, y pese a la conciliadora introducción de su amigo, anticartesiano, Luis Meyer.

10. Nuestro pensador en sus últimos años de vida llegó a ser una auténtico pensador maldito, no por su actitud que era ejemplar e independiente, sino por su creciente fama de materialista y ateo. Odelburg y otros amigos epistolares disminuyen su correspondencia con Spinoza para no ser calificados con idénticos términos.

11. Aunque esta obra no fuera publicada en vida, sabemos que sus amigos, y no amigos, disponían de las partes primera y segunda desde mediados de la década de los sesenta, hecho que permite explicar la considerable influencia de Spinoza en el contexto universitario holandés y británico.

12. El Idealismo en filosofía es un tipo de pensamiento que postula que en la representación de la realidad interviene el sujeto. El sujeto de conocimiento no es pasivo, como en el caso de realismo filosófico (la verdad como correspondencia directa o adecuación). La filosofía idealista pone el acento en el análisis de los procesos que el sujeto realiza en la construcción del conocimiento.

ideas fundamentales son las que determinan las verdades fundamentales. Por lo general, el movimiento racionalista considera que es posible llegar a la verdad sobre el mundo sin partir del dato sensible, gracias a ese equipamiento de ideas y de estructuras innatas. A esta postura, que afirma que existen estructuras de conocimiento anteriores al dato sensible y que determinan el valor real de la experiencia, podemos llamarlo apriorismo. El apriorismo no se manifiesta por exclusiva en tautologías [13]: la razón, que es algo más que los sentidos y la adquisición de conocimiento, establece verdades no tautológicas que tienen aplicabilidad práctica. Sin excepción, los racionalistas sostienen que la experiencia por sí sola es insuficiente para explicar el origen de las ideas y la producción de conocimiento verdadero. Ahora podemos comprender por qué son las matemáticas el modelo de conocimiento. En ellas, estas estructuras [14], se expresan libres de experiencia, donde la verdad es siempre necesaria y coherente con el sistema de definiciones iniciales. Cuando pensamos que es posible descubrir verdades necesarias, no probables, sobre el mundo, mantenemos una posición muy cercana al racionalismo spinozista: el mundo, pese al conocimiento, es una construcción objetiva, se manifiesta mediante una férrea cadena de leyes necesarias y universales que pueden llegar a ser conocidas. La doctrina necesitarista (la verdad es necesaria) es la interpretación que de la causalidad dan los filósofos racionalistas [15].

La Fª racionalista no refuta el valor cognoscitivo de la experiencia. Por el contrario, Descartes o Spinoza, creen que la experiencia es el fin último del trabajo científico.

La noción capital de la metafísica de Spinoza es la Substancia. Por substancia, el lector puede entender la clase, o clases, a las que se reduce todo lo que existe, que cumpla la condición lógica de tener predicados propios, y que se conciba con independencia. Una substancia es una clase lógica en la que se incluyen todos los seres que comparten unas propiedades. Nos dice qué existe, y lo engloba en clases

13. Una tautología es una verdad establecida mediante una definición analítica, no sintética «Todos los solteros son no casados», proposición producida con independencia de la experiencia. El ideal de conocimiento racionalista es analítico, pues espera llegar a verdades mas allá de la tautología.

14. Los racionalistas definen estas estructuras por su carácter sintáctico, más que por su significado semántico. Conciben la estructura profunda del alma como un conjunto de reglas de operación y combinación impermeables a la experiencia aprendida, insensibles al contenido semántico. Una aproximación sintáctica a la mente.

15. Esta doctrina será criticada por D. Hume, para el que la necesidad es un supuesto psicológico. «*... esa conexión invariable que sentimos en la mente, es el sentimiento o impresión a partir del cual formamos la idea de poder o de conexión necesaria. No hay nada más en esta cuestión*» «*Investigación acerca del entendimiento humano*», Sección IV, parte I. en Alianza Editorial, Madrid 1982).

lógicas. El monismo spinoziano impone una sola clase (substancia natural) de seres con infinitos predicados (atributos mentales y físicos) sobre la materia. Todos los paradigmas científicos tienen un supuesto metafísico que les compromete con una o varias clases de seres. La ontología de la ciencia actual es la materialista: todo se reduce a una clase lógica, la materia. Para Spinoza, conocer una substancia no es una cuestión de filósofos; conocer una substancia, en la medida de las posibilidades finitas del humano, es conocer sus causas, sus leyes, sus propiedades necesarias. Veamos con algo más de detalle estos asuntos.

Los principios metafísicos están esencialmente contenido en su obra *La Ética Demostrada según el Orden Geométrico.* (ET) De las cinco partes de las que consta la ética, es la primera «De Dios» la que expone el principio básico de la metafísica:

> *«Por Dios entiendo un ser absolutamente infinito, esto es, una substancia que consta de infinitos atributos, cada uno de los cuales expresa una esencia eterna e infinita» (ET I, Def VI).*

Esta definición depende de seis definiciones más, que son más nominales que definidoras de ontología. En las dos primeras se definen la noción de «causa de si» y «finita». En la de causa ya se configura la estrategia monista: «*Cuya naturaleza sólo puede concebirse como existente*» y dado que una substancia «*aquello que es en sí y se concibe por sí, esto es cuyo concepto para formarse no precisa del concepto de otra cosa*» (Def III). Cualquier realidad concebible debe de ser necesariamente una. Estamos ante una substancia infinita que es causa de sí misma.

El segundo paso en la metafísica spinoziana radica en la fundamentación de Dios como equivalente a la naturaleza «Deus sive natura sive substancia». La naturaleza como expresión absoluta de la substancia divina es el concepto central de la metafísica. El lector podrá cambiar en cualquier parte de la «Etica» la palabra Dios por naturaleza sin que pierda el significado básico.

Spinoza niega la posibilidad de que existan varias substancias. (ver las proposiciones I, II y III). Se necesita una sola substancia infinita para fundamentar el criterio de orden causal que exige su metafísica aspirante a ser soporte para la ciencia:

> *«En el orden natural no pueden darse dos o más substancias de la misma naturaleza, o sea, con el mismo atributo» (Et, Prop V)*

Es por tanto un monismo recurrente: «*Todo cuanto es, es en Dios y sin él nada puede ser ni concebirse*» (Et I, Prop XV). Cualquier ser finito es un despliegue de una sustancia única. Si en la metafísica de Leibniz se determina la substancia por el carácter accidental con respecto a otras substancias; en la de Spinoza por el contrario, la dinámica de los accidentes la subordina al nivel de los atributos y los modos, jamás al de la substancia pues eso implica que existirían varias.

Hasta ahora no hemos dicho nada de los seres particulares (modos finitos). Los seres naturales son *«afecciones de una substancia, o sea, aquello que es en otra cosa, por medio de la cuál es también concebido»* (Et I, Def V). Son, en definitiva, casos puntuales producidos por la infinita potencialidad de Dios. Es más, los objetos particulares son negaciones [16] de la substancia dado que la substancia es indefinida e infinita: *«Como el ser finito es realmente una negación parcial...»* (escolio I a la prop VIII, Et I). Los seres naturales dependen para existir de Dios y además obran de forma necesaria siguiendo la inquebrantable disposición de las leyes naturales (Dios mismo): *«Dios no es sólo causa eficiente de la existencia de las cosas, sino también su esencia»*. (ET I, Prop XXV). Podemos observar el mismo pensamiento determinista en la prop XXIX:

> *«En la naturaleza no hay nada contingente, sino que, en virtud de la necesidad de la naturaleza divina, todo está determinado a existir y obrar de cierta manera»*.

Este nuevo planteamiento devuelve la esperanza de una explicación causal y racional del universo mediante el conocimiento de las causas. Esta idea *«de toda causa definida se sigue necesariamente un efecto* [17]*»*, recibe el nombre de necesitarismo. Para Spinoza no sólo hay causas necesarias, además niega que en el mundo ocurran acontecimientos contingentes, como hemos visto en la proposición XXIX. Es obvio, que este principio metafísico sea una consecuencia más de su monismo, muy especialmente los modos cómo comenta en la demostración: *«Dios es la causa de estos modos no sólo en cuanto simplemente existen, sino también cuando se les considera como determinados a obrar algo. ... Si son determinados por Dios, es imposible, y no contingente, que se conviertan a sí mismos en indeterminados»*. La repercusión de esta doctrina en la ética es capital: la negación de la libertad humana. En una carta [18] a su amigo Schuller, carta que comentaremos en otro apartado, Spinoza nos dice:

> *«Aún más, conciba ahora, si lo desea, que la piedra mientras prosigue su movimiento, piensa y sabe que ella se esfuerza, cuando puede, por seguir moviéndose. Sin duda esa piedra, como tan sólo es conciente de su conatus y no es de*

16. Este concepto de negación, está relacionado con la llamada teología negativa de pensadores como Nicolás de Cusa, de los cuales ya sea hablado en este Seminario.

17. Ver Axioma III, 1ª parte de la Etica.

18. Carta 58, La Haya, octubre de 1674. (Spinoza, «Correspondencia» 1988, pg 339).

modo indiferente, creerá que es totalmente libre y que la causa de perseverar en el movimiento no es sino que así lo quiere. Y ésta es esa famosa libertad humana, que todos se jactan en tener, y que tan sólo consiste en que los hombres son concientes de su apetito e ignorantes de las causas por las que son determinados. Así, el niño cree apetecer libremente la leche, el chico irritado querer venganza, y el tímido la fuga. Por su parte, el borracho cree decir por libre decisión de su alma lo que después, ya sobrio, quisiera haber callado.... Creen, sin embargo, que son libres por la sencilla razón de que desean levemente algunas cosas y que ese deseo puede ser fácilmente reprimido por el recuerdo de otra cosa que nos viene frecuentemente a la memoria.

Con esto he explicado suficientemente, según creo, cuál es mi opinión sobre la necesidad libre y coaccionada y sobre la ficticia libertad humana [19]».

La carta es trascendental para entender el determinismo que comparten los humanos con los demás modos finitos. Para Spinoza *la conciencia de la necesidad, no elimina la necesidad misma.* La conciencia es un proceso natural limitado a leyes. Esta diferente actitud en el tema de la conciencia tiene implicaciones en la Tª del Alma de Spinoza y Descartes, que creían que era motivo suficiente para predicar del humano una substancia pensante independiente. Spinoza objeta que la conciencia es un estado privilegiado de la materia.

La substancia puede concebirse de dos maneras: como extensión o como pensamiento; de todas las posibles formas por las que el entendimiento determina la esencia de la substancia sólo estas dos formas son consideradas reales. En síntesis, la mente humana discierne entre las infinitas propiedades inmutables de la naturaleza reduciéndolas a extensión y a pensamiento. Este punto lo trataremos con mas amplitud cuando se exponga la naturaleza del alma y la ética humana. Por ahora basta saber que es la diferencia básica entre la filosofía de Descartes y la del pensador holandés.

Hemos afirmado que la equiparación de Dios con la naturaleza es una afirmación fundamental. Spinoza, no teme dar una interpretación corpórea de Dios. En la parte segunda de la Etica, concretamente en la proposición II argumenta que: «*La extensión es un atributo de la naturaleza*»; Dios es asimilado con la naturaleza como conjunto, posible o real, de todos los atributos y modos. El monismo radical es una consecuencia de equiparar la sustancia con la naturaleza. Para Spinoza el mundo es creado, en el sentido de producido de unas condiciones iniciales libremente dispuestas por Dios, es decir por la condiciones iniciales potencialmente infinitas en posibilidades cuya legalidad, expresadas como necesidades lógicas en la argumentación

19. Hacia el final de la carta Spinoza responde a objeciones sobre la noción de mal «¿es excusable la malicia?» y la responsabilidad moral.

geométrica, constriñen esas mismas posibilidades. En un mundo así, necesario, todo ocurre de forma determinada *«a menos que uno pensara perversamente que el mundo fue hecho al azar»* (Spinoza, epístola n.º 54, octubre de 1674, destinada a Hugo Boxel). El lector atento habrá notado que Spinoza se refiere al inicio del mundo como hecho, no como credo.

En torno a la controversia de si Spinoza propone o no un panteísmo, es de capital importancia dejar bien claro lo siguiente: que el sistema filosófico de Spinoza no es un panteísmo. Existe la posibilidad de que alguien sostuviese que lo es, al igualar a Dios con su producto. Pero en la metafísica que tratamos no se igualan dos cosas distintas, por un lado Dios y por otro la naturaleza, sino que se postula la absoluta igualdad ontológica de ambos. Por otro lado los sistemas panteístas de Eckard y Bruno por ejemplo, suelen concebirse bajo un estilo de «pensar místico», pero no se infieren de un sistema de definiciones exactas y de una lógica deductiva ajenas por completo a la mística. La naturaleza extensa y pensante son materiales (naturales), no tienen propiedades vitales o mágicas como en el panteísmo clásico. Este, junto con el emanentismo y el espiritualismo, es sólo una de las posibles interpretaciones de la triada: Dios, naturaleza, substancia. La afirmación «la naturaleza no es ontológicamente diferente a Dios» desde el inicio del cosmos, no es intercambiable por la proposición teísta y panteísta de «Dios está en todas las partes» o «la materia tiene espíritu de Dios». Por el contrario, Spinoza busca una afinidad entre lo creado y el creador: Dios comprende todas las extensiones posibles y es idéntico al mismo tiempo con estas extensiones. Dios es el producto y el productor. En Spinoza la naturaleza no emana ni se sostiene de la voluntad del divino en ningún momento. Realmente el panteísmo y el emanentismo son dos pésimos enfoques del sistema filosófico spinoziano.

Su universo es dinámico y emergente [20]. La naturaleza es activa, es generadora de nuevos seres por su infinita potencialidad, llamándose «Naturaleza Naturante [21]». Es también describible el mundo natural indicando sus productos en acto, actuales en un momento dado: «Naturaleza Naturada». Se puede describir como dinámica creadora, bien como una estructura estática, creada. Esta diferencia debe entenderse desde un análisis lógico. Ontológicamente ambas versiones de la naturaleza son equivalentes: es igual observar la naturaleza como sistema creador que como sistema creado, de lo contrario caeríamos en una contradicción palpable. En la extensa epístola sexta

20. Es imprescindible llegado este punto que el lector consulte el escolio de la proposición XXVX además del capítulo segundo del *Tratado Político*.

21. La naturaleza naturante o «naturans», coincide con los atributos predicables de Dios, que son infinitos y necesarios. La naturaleza naturada son los infinitos modos que afectan a los atributos.

(destinada a Oldelburg en 1661) Spinoza dice sobre el tema *«yo no separo a Dios de la naturaleza tanto como lo hicieron todos aquellos de que tengo noticia»*. En la definición cuarta y en la proposición décima de la primera parte se explica cómo se deducen de los atributos los modos finitos e infinitos siguiendo un esquema gradual. Lo que sigue a continuación es un resumen de la «jerarquía de los modos» extraída de la correspondencia epistolar dirigida a su amigo Schuller [22]: (Carta 64)

Atributos de la extensión:

Modos infinitos:

Modo Infinito Inmediato: «el movimiento y el reposo».

Modo Infinito Mediato: «Faz del universo», el sistema de cuerpos naturados, mediado por el movimiento y el reposo.

Modos finitos: «Los cuerpos»

Atributos del pensamiento:

Modos Infinitos:

Modos Infinito inmediato: «Entendimiento absolutamente infinito»

Modo Infinito mediato: (no lo indica)

Modos Finitos: «las ideas particulares» falsas o verdaderas.

El movimiento no es más que un estado que se atribuye a la substancia, sus características son el movimiento y el reposo. Esto es equivalente a la afirmación de que el movimiento no necesita de causa externa. Si el movimiento tiene él mismo carácter natural, no es posible concebir una causa del movimiento que no sea su propia naturaleza. El movimiento es eterno y permanece constante [23]. Cuando el atributo en extensión concuerda con el estado de movimiento se le denomina modo infinito mediato o eterno. La naturaleza entonces no es mas que un sistema espacial de cuerpos: «la cara del Universo». Spinoza parece que sigue aquí la metáfora de la composición de los cuerpos en partículas cada vez más sencillas y elementales. Los cuerpos complejos cambian en el sentido de que transfieren partículas con el medio. Es gracias a esta transferencia del conjunto de los cuerpos, como modo infinito, como la naturaleza, conserva su identidad.

El modo infinito inmediato es el estado del atributo por el que cambia sus partículas elementales. Aquí Spinoza no es muy explícito cuando lo aplica al atributo del

22. Existe un excelente edición de la correspondencia en Alianza Editorial 1988.

23. Estamos ante una aproximación cualitativa del principio de la conservación de la cantidad de movimiento que Spinoza conocía de los trabajos de Descartes.

pensamiento. Lógicamente equivaldría a la capacidad del entendimiento para comprender algo que es infinito y por tanto inconcebible en términos absolutos. El modo del pensamiento incluye las disposiciones afectivas de amor y odio, así como cualquier actividad localizada en el pensamiento. Las actividades mentales sólo son ideas del cuerpo y en su grado más complejo, son asociaciones de estas ideas. Toda actividad mental aparece bajo la vibración del amor o el deseo.

Los modos finitos son creados por la naturaleza como contingentes, es decir, que su existencia no implica una esencia independiente. No equivale a decir que poseen propiedades errantes sino que son finitas expresiones de la estructura causal de la substancia. Los modos finitos han de evaluarse como un postulado de optimismo de la práctica científica: un suceso tiene un orden y una causa que la relacionan con un sistema mucho más amplio que esa porción de mundo extenso.

El éxito de la metafísica naturalista de Spinoza consiste en compatibilizar las nociones de mente y cuerpo con una misma ontología. Existe sólo un sistema infinito que puede considerarse de dos formas distintas pero equivalentes. En una carta dirigida a su amigo Simon de Vries (epístola n.º 9, 1663)) Spinoza trata el tema de «¿cómo una y la misma cosa puede ser designada con dos nombres? [24]». Da dos ejemplos, uno bíblico y otro de óptica (Blanco y Plano de luz). En el fondo Spinoza, nos da a entender en esta carta que la mera utilización de significantes distintos, meras palabras sinónimas, no implica la existencia de realidades distintas. Esta posición es conocida como monismo psicofísico. La mente y el cerebro no son sino diferentes niveles de organización de la materia, siendo la mente en especial, un nivel de organización material con propiedades catalogables en su propio vocabulario [25].

Otra éxito de la metafísica de Spinoza es la simplicidad, yo diría incluso belleza, contenida en la afirmación de una única realidad material dinámica.

Los niveles de conocimiento

Uno de los objetivos de su filosofía es establecer un método de conocimiento seguro y distinguir entre diferentes niveles de certeza. La epistemología racionalista, como se conoce a este esfuerzo, es una búsqueda de certeza, una huida de las posiciones

24. Alianza Editorial (Bolsillo, n.º 1305) 1988, pág 121.

25. «Una decisión mental y un estado corporalmente determinado, son una o la misma cosa...» Escolio a la Prop II, ET III). He utilizado aquí en este fragmento la traducción de Aguilar de 1973, porque me parece que llega mas rápido al lector en la interpretación del escolio en concreto. Sin embargo, en otro apartado pondré el mismo texto en la interpretación de Vidal Peña, que es la que sigo en toda la ponencia, y cuya traducción recomiendo. (Editora Nacional, 1884, n.º 4).

de duda. En Spinoza esta búsqueda tienen una triple motivación: primero, huir de las posiciones escépticas con las que se han etiquetado siempre a los panteísmos; segundo, proporcionar una metodología de consolidación del conocimiento para su programa ético y político; y tercero, demarcarse de la posición cartesiana negativa frente a la experiencia sensible.

El fin último de la indagación del conocimiento es el poner el andamiaje de ideas para que el humano pueda proyectarse en el medio natural. Con esta proyección brota la felicidad. El conocimiento es ante todo un instrumento hecho de conceptos e ideas para investigar su propia naturaleza. Quizás por esa razón su obra se denomina con el epígrafe Etica, y no lo llame simplemente un tratado del mundo y del conocimiento como hacen otros racionalistas.

En su teoría del conocimiento nos propone los medios para distinguir entre las pasiones positivas y negativas, entre ideas verdaderas y falsas, mediante el uso razón como fundamento e *instrumento del conocimiento:* para discriminar el bien del mal, lo útil de lo inútil:

> *«Entiendo por bueno lo que sabemos con certeza que nos es útil» (ET IV, Def I)*
> *«Por malo, en cambio, entiendo lo que sabemos con certeza que impide que poseamos algún bien». (ET IV, Def II)*

En resumen, el bien supremo es el producto del conocimiento como tarea universal, por medio de la razón y del método axiomático. Spinoza mantiene creencias muy cercanas al sistema estoicista: los hombres deben trascender a su verdadero destino cuando contemplan del orden del todo, y se ven como un eslabón más en el cosmos. Estas doctrinas, nos conducen a un modelo de conocimiento verdadero.

La distinción entre los grados del conocimiento recuerdan a los criterios de conocimiento establecidos por Platón en el Fedón y el Teéteto. En el primer grado, *cogito primi generis,* se caracteriza por ser poco adecuado para una mente con pretensiones científicas aunque sean las ideas emanadas del conocimiento de Dios. En este primer grado, Spinoza hace una teorización sobre las percepciones simples o experiencia directa. La percepción de un cuerpo cualquiera produce sistemáticamente una modificación en mi cuerpo que es reflejada en una idea. Esta idea simple pasa a ser más tarde parte constitutiva de mi alma. La cosa representada por mí se llama «Ideatum» que es el objeto de mi representación, el referente extramental de mi idea simple.

En la «Etica» su autor nos advierte de la relación y el valor que existe ente las ideas y las cosas extensas: «*El orden y conexión de las ideas es el mismo que el orden y conexión de las cosas*» (ET II, Prop. VII). Esta afirmación no debe de interpretarse como si estableciésemos una correspondencia biunívoca entre las ideas por un lado, y el conjunto de las cosas del mundo por otro, de tal suerte que a toda idea le corresponde en el mismo orden un referente extramental. No nos habla de dos sistemas paralelos dispuestos en el mismo orden. Esta interpretación es simplista y equivocada. En primer lugar, el orden natural no es inferible en el acto mismo de ver cosas o tener ideas, sino que es una tarea reconstructiva (segundo y tercer grado de conocimiento). En la interpretación paralelista de la prop. VII nos dice que toda cosa material tiene una propiedad mental, y esto es absurdo pues nadie dice que su televisión tenga propiedades mentales, ¡aunque siempre hay individuos dispuestos a ello, e incluso a otras cosas peores!. Spinoza sólo habla de cosas pensantes en el caso del hombre: «*El hombre piensa*», no dice «las cosas piensan». El enunciado debe de interpretarse de la siguiente forma: dada una mente pensante, un ser dotado de entendimiento (el humano), éste puede mostrar las causas de cómo el orden de sus cogitaciones (ideas) coincide con objetos extensos. Pero esa relación no es directa e inmediata, al contrario, es el fin último del sabio. Spinoza, en la demostración, interpreta esta proposición apelando a que «*la potencia de pensar de Dios es igual a su potencia actual de obrar*», (Corolario, Prop VII). Spinoza no niega realidad objetiva al mundo físico, pero reconstruir esa realidad objetiva supone la interposición continua de las operaciones del alma humana, que no es entendimiento infinito.

No se consideran verdaderas las ideas sensibles. El centro de la argumentación es que las ideas de sensación no siguen ninguna pauta lógica, necesaria e interna, y por tanto, no conducen al conocimiento por sí solas. Spinoza llama a estas ideas «generales»: son juicios de percepción que no son falsas de por sí, sino por la acción de asociación imaginativa. Reflejan tener un bajo componente causal porque en su influencia no permiten captar la esencia de los sucesos y entes como modos de la substancia. La conexión entre estos juicios se hace de forma inconexa y asistemática por lo que la reglas de la memoria o hábitos son las causas. A estos procesos fundamentales se les llama imaginación, y no representan el verdadero orden de las cosas. Aquí Spinoza se adelanta a Hume, llegando incluso a defender la tarea de buscar el componente fisiológico que determina una creencia primera. Sabe perfectamente que las creencias no son verdaderas por sí mismas; la formación de estas ideas generales no son esenciales o tienen un margen de auténtica certeza. La verdad sólo se establece a través del conocimiento de la causa, que es el fundamento de la certeza que posea una idea. El conocer es dar con las causas. Las ideas generales son incompletas lógicamente. El conocimiento verdadero implica de forma holista la totalidad del sistema, no una proposición empírica aislada.

Spinoza defiende en el «*Tratado para la Reforma del Entendimiento*» y en la «*Etica*» una teoría de la verdad como coherencia holista: la verdad parte del sistema de relaciones que el sistema mantiene en su conjunto [26]: los axiomas y las definiciones iniciales deben entenderse valorando en general todas las proposiciones que se deriven de ellas, y al contrario, las proposiciones dependen para su verdad de las definiciones y axiomas anteriores. Hay que interpretar las verdad de los sistemas apelando a la lógica interna en su conjunto, apelando al sistema completo de aserciones al que pertenece una proposición aislada. Las «ideas adecuadas», noción clave del Tratado, son verdades *conectadas necesariamente* con el resto del sistema de ideas, de las cuales se deriva o deduce por la sintaxis interna. En una carta a su amigo Olderburg, sostenía que «cada parte de la naturaleza concuerda con el conjunto».

En el orden explicativo, es necesario también no reducir la explicación al conjunto de las partes, sino a la naturaleza explicada en su conjunto, de forma holista [27]. La geometría es el modo de argumentación, no tanto por ser autoevidente y autoreferencial, sino por mostrar al descubierto la propensión a la totalidad.

El *conocimiento de segundo grado* se ensambla con el anterior, aunque las nociones generales sean falsas por su lógica interna, como hemos visto. Puede ser que el entendimiento capte algunas ideas adecuadas que reflejen el conocimiento de las causas de las modificaciones entre los cuerpos. En este caso decimos captar como detectar en mi interior una idea con un rasgo de autenticidad y veracidad mayor que las que se captan en el mundo exterior. La ideas aprehendidas o intuidas expresan un carácter universal, representan ciertas propiedades finitas y accidentales de la extensión. Estas nuevas ideas de segundo orden Spinoza las llamas *«nociones comunes»* y se fundamentan en las matemáticas. La facultad que las produce es la razón que articula las ideas universalmente a partir de una simple noción común.

Las leyes de asociación entre ideas no son las de la imaginación, son aquellas reglas de formación verdaderas en sí mismas. Ellas hacen posible el conocimiento

26. La verdad holista se opone a la verdad atomista: cada proposición debe de justificarse independientemente del resto. El holismo parte de que una teoría se contrasta de forma global: si falla una sola de sus afirmaciones, las demás serán tarde o temprano abandonadas. El holismo de Spinoza es una de la ideas que más influencia tienen en la filosofía actual.

27. Si para Descartes la explicación científica es reduccionista (reducir a las partes y reconstruir infiriendo el orden) para Spinoza la reducción es en sí misma insuficiente. Si buscamos reducir un conjunto a la interacción mecánica de las partículas, señaladas la figura, tamaño y movimiento, es posible cuantificar la interacción. Para Spinoza lo importante no es la cuantificación, que no la niega. La tarea del científico es construir una ecuación general del fenómeno en su conjunto, no una exposición de las partes. *Una de las tesis que sostengo en esta ponencia es que la diferente naturaleza de la explicación científica de Descartes y Spinoza es fundamental para entender la noción de mente. El mecanicismo limitado de Descartes, es terreno abonado para excluir un análisis científico de la mente.* El mecanicismo holista de Spinoza es, al contrario, optimista.

verdadero del mundo. La verdad se postula de ellas de forma necesaria, pues son en sí mismas axiomas autoevidentes: «*La verdad es patrón de sí misma*» (EtII, prop XLIII, escolio). Los conceptos comunes tienen una característica especial que desarrolla en el «*Tratado de la Reforma del Entendimiento*»:

> «*Cuando la mente se aplica a una cosa ficticia o falsa por su naturaleza, a fin de examinarla y comprenderla y deducir correctamente de ella lo que se debe deducir, descubrirá fácilmente su falsedad. Y si la cosa fingida es, por su naturaleza, verdadera, cuando la mente examina para comprenderla y comienza a deducir correctamente de ella todas las cosas que se derivan, proseguirá felizmente sin interrupción alguna; del mismo modo que el entendimiento ha sido capaz de descubrir en la falsa ficción, que acabamos de citar, su contradicción interna y otras cosas que de ella se derivan*». *(T.R.E. Pg. 100)*

Esta propiedad es la deducibilidad libre de contradicción. Una idea supuestamente verdadera, ficción, es verdadera si aplicándose una cadena de deducciones no concurre error semántico y sintáctico en la deducción. De una proposición verdadera se derivan, por deducción directa, otras ideas simples y verdaderas. La verdad no es sólo intuible «*Quién tiene una idea verdadera, sabe al mismo tiempo que tiene una idea verdadera, y no puede dudar de eso que conoce*» (ET II, Prop XLII) [28]. Es deducible y derivable.

Aclara su posición con respecto a la teoría de la verdad: elimina la relación extensional como fuente de verdad. Entre el ideatum y la idea no hay relación que exprese la verdad de ella, porque no hay vínculo causal inmediato y externo entre las ideas y el mundo. El grado de verdad, de una hipótesis o idea, se compromete con la coherencia del sistema lógico en su totalidad, como hemos visto. Cualquier noción común es un patrón de verdad indudable y a partir de ella puede obtenerse otras nociones comunes siguiendo su conexión lógica con el resto.

La verdad es una *adecuación deductiva*. El hombre racional debe de aprender a distinguir entre proposiciones imaginativas y las comunes, capaces de conducir a un estado comprometido con la libertad, con ausencia de servidumbre y presencia de necesidad potenciadora del ser. Todo hombre racional puede y debe ejercer el segundo nivel de conocimiento que demuestre «*cómo hay que construir una aristocracia y monarquía que no degeneren en tiranía, y para que la paz y la libertad de los súbditos permanezcan intactas*». (Inicio de Tratado Político). Los conceptos comunes son universales e innatos como veremos en el apartado dedicado a la concepción

28. En el escolio a esta proposición nos dice «*Ciertamente, la verdad es norma de si misma, y de lo falso, al modo como la luz se revela a sí misma, y revela las tinieblas*».

de alma de Spinoza. Es un conocimiento, el del segundo nivel, el que permite la capacidad de la reflexibilidad porque se manifiesta como capaz para deducir nociones comunes unas a partir de otras.

El humano tiene una tendencia interna a conocer las cosas naturales, una especie de reflejo de estudio del medio natural, bajo la forma de nociones comunes.

El *tercer grado de conocimiento* posibilita que todo el sistema de la naturaleza sea captado en «acto de omniglobante visión». Es una consecuencia directa del segundo nivel ya que se encuentra incapacitado para representarse todas las esencias que se pueden deducir de los cuerpos. Su facultad constitutiva es la intuición por la cuál el entendimiento generaliza todas los conocimientos sobre los acontecimientos y sucesos para concebirlos en una *unidad sintética* de causas y efectos que coinciden con Dios (substancia natural). La contemplación del universo desde esta perspectiva abstracta produce un estado en el individuo que llama felicidad. Vemos el mundo bajo una especie de eternidad.

El conocimiento es una herramienta para situarnos en la zona de causas y efectos del mundo en donde se viva más acorde con las posibilidades que tenemos. *Sin conocimiento ingresamos en las áreas en las que seremos controlados por eventos que disminuyen nuestras posibilidades.* La filosofía del pensador holandés, es ante todo un pensamiento práctico y útil, y éste es el sentido de la expresión ética: poseer una inclinación hacia aquél conocimiento con el que actuar eficazmente.

La discusión en el siglo XVII sobre las emociones y la razón recibirá el nombre de Razón/Pasión. Ninguna de las dos es por sí misma adecuada porque el hombre es realmente un ser racional que se dirige voluntariamente a aquellas pasiones que lo potencian; la razón no es contraria a las pasiones. Este será el tema de la ética.

El individuo ético

Los contenidos de la metafísica y de la gnoseología prefiguran una ética especial. Por ética no debemos entender un conjunto de proposiciones justificativas sobre la conducta moral. No es un discurso justificativo de normas de acción. La Etica es ante todo *un programa de investigación científica de la naturaleza humana*, en cuanto que este programa será más útil que cualquier otro tipo de conocimiento. Su concepción de la ética se desarrolla casi exclusivamente en la parte tercera y cuarta de la Etica. Veamos que dice en el prefacio a la parte tercera:

> *«La mayor parte de los que han escrito acerca de los afectos y la conducta, parecen tratar no de cosas naturales que siguen las leyes ordinarias de la naturaleza, sino de cosas que están fuera de ésta. Más aún, parecen que conciben al hombre, dentro de la naturaleza, como un imperio dentro de otro. Pues creen*

que el hombre perturba, más bien que sigue, el orden de la naturaleza que tiene una absoluta potencia sobre sus acciones y que sólo es determinado por sí mismo. ... pero que yo sepa, ha determinado la naturaleza y la fuerza de los afectos, ni lo que puede el alma. .... Pero mis razones para proceder así son éstas: nada ocurre en la naturaleza que pueda atribuirse a vicio de ella, la naturaleza es siempre la misma y será siempre la misma, en todos partes, su eficacia y potencia de obrar; es decir son siempre las mismas, en todas partes las leyes y las reglas naturales según las cuales ocurren las cosas y pasan de unas formas a otras; por tanto uno y el mismo debe ser también el camino para entender la naturaleza de las cosas, cualesquiera que sean, a saber; por medio de las leyes y reglas universales de la naturaleza. .... Así pues, trataré de la naturaleza y fuerza de los afectos, y de la potencia de alma sobre ellos, con el mismo método con que en las partes anteriores he tratado a Dios y el alma, y consideraré los actos y apetitos humanos como si fuese cuestión de líneas, superficies y cuerpos».

En el anterior fragmento podemos extraer las principales rasgos del enfoque ético: primero, *el humano es una entidad natural;* segundo, como ser natural *está determinado por su esencia necesaria,* por tanto no posee ningún «factor mágico» como la libertad [29]; tercero, si la naturaleza es uniforme ha de estudiarse al humano con el *mismo método que los demás objetos naturales,* hasta determinar las leyes naturales que lo controlan; y cuarto, el humano es un ser racional cuyos comportamientos caen *bajo el control de las pasiones,* los afectos y emociones, y toda investigación racional debe de partir de este principio.

La tradición ética, excepto la filosofía del noble Epicuro, ha creído que el humano es una contraposición de tendencias: una racional y otra pasional, y han descrito esa tendencia como una lucha donde la capacidad racional debe de tener una supremacía absoluta. Con Spinoza la contraposición afecto/razón se elimina en favor de la segunda: *toda obra humana es una manifestación de algún afecto, de alguna inclinación pasional,* (¡hasta los tratados de álgebra!). La razón debe de evaluar las inclinaciones y situar, no elegir [30] al humano, en las condiciones para que operen

29. Si el lector está interesado el conocer de primera mano la actitud spinoziana frente al problema de la libertad lea la epístola n.º 58: *«Y ésta es la libertad humana que todos se jactan de tener, y que tan sólo consiste en que los hombres son concientes de sus apetitos e ignorantes de las causas por las que son determinados».* El resto de la carta es impresionante.

30. Para Spinoza no hay deliberación ni elección por parte del sujeto a la hora de actuar. Técnicamente lo que hace el humano es situarse en aquellas condiciones favorables para que las leyes naturales lo arrastren por «el mejor de los caminos». Con este planteamiento determinista se rompe con la máxima que Aristóteles había expuesto en la «Etica a Nicómaco» por la cual la acción humana era resultado de una deliberación libre. La ética no requiere libertad al igual que los objetos físicos tampoco la poseen.

en sí mismo cualesquiera pasiones positivas. Tenemos una estructura de afectos que está implicada en cada acción puntual. Un afecto es:

> *«Las afecciones del cuerpo por las cuales aumenta o disminuye, es favorecida o perjudicada, la potencia de obrar de ese mismo cuerpo, y entiendo al mismo tiempo las ideas de esas afecciones* [31]*» (ET III, Def III).*

Los seres naturales humanos, cuerpo y mente, sufren afecciones y la tarea de la ética no puede ser otra que procurar que aumenten las posibilidades de obrar. Es importante recalcar la posición de Spinoza ante el dilema afecto - razón, en el cuál el afecto determina la dirección y la intensidad del pensamiento racional.

En su vertiente individual se corrobora la tesis inicial de que el hombre es parte de la naturaleza, es un cuerpo cuyas manifestaciones pertenecen a un conjunto limitado de las atribuciones modales de la substancia infinita. Por tanto, las acciones libres han de entenderse como retrotraídas en una cadena de causas y efectos, de agentes externos e internos. Es Spinoza el primero en correlacionar la cualidad de la acción y la cualidad de la información que la determina:

> *«Nuestra alma obra ciertas cosas, pero padece ciertas otras; a saber: en cuanto que tiene ideas adecuadas, entonces obra necesariamente ciertas cosas, y en cuando que tiene ideas inadecuadas padece necesariamente ciertas otras». (ET IV, Prop. I)*
>
> *«... de aquí se sigue que el alma está sujeta a tantas más pasiones cuantas más ideas inadecuadas tiene, y por contra, obra más cosas cuantas más ideas adecuadas tiene» (corolario a la prop I)*

Si una acción es motivada por una idea adecuada (*«cuyo efecto puede ser percibido clara y distintamente en virtud de ella misma* [32]) las consecuencias de la acción serán preferibles a una acción sin conocimiento de las causas o con mal conocimiento de ellas. Realmente los humanos somos «Informávoros [33]», nos realimentamos de información que es la materia con la que nos representamos el medio. Una *acción es un comportamiento inspirado en el conocimiento* de la causa y una pasión en un comportamiento guiado por ideas inadecuadas [34]. Conocer es poder de obrar, e ignorar es mermar las posibilidades de acción.

31. Al final de la sección tercera define los afectos como «pasión de ánimo, es una idea confusa, en cuya virtud el alma afirma de su cuerpo o de alguna de sus partes una fuerza de existir mayor o menor que antes, y en cuya virtud el alma es determinada a pensar tal cosa más bien que tal otra» (Fin de la Tercera parte de la Etica).

32. Et IV, Def I.

33. Según la ya extendida definición de Miller, G. (1984).

34. Ver prop. III, Et III.

La ética spinoziana es naturalista porque parte de un único sistema posible, la naturaleza, a cuyos límites nada puede escapar. Tanto la servidumbre como la libertad y la responsabilidad moral, no atañen a la fórmula de la capacidad volitiva sino más bien a la comprensión de la naturaleza humana. Si queremos obrar bien [35] tenemos que estar adecuadamente informados. Spinoza advierte que el lenguaje ordinario es un reflejo del mal sistema de razonamientos que adopta el hombre, pues involucra la imaginación, que es fuente de contradicciones. En este sentido, su ética es de inspiración científica, no se conforma con los juicios morales, sino que pretende desentrañar la naturaleza última de esos juicios. Si el humano es un ser natural el único método para estudiarlo es el de las ciencias físico-matemáticas, y no con un método especial, o, como en el caso de Renato Descartes, directamente negar la posibilidad de estudio del humano.

Spinoza es ante todo un optimista metodológico en el estudio del humano al situarlo en el mismo nivel ontológico que los demás seres. Hemos afirmado que el ejercicio moral necesita del conocimiento de las causas de las pasiones, esto es, de las causas que desencadenan las imperfecciones del humano en el mundo, que como hemos dicho son las causas de la infelicidad. El fin de la moral es *la sabiduría práctica* que permite conocer la posición del hombre en la naturaleza, entendida ésta como sistema de sistemas con el propósito de comprometerse con sus posibilidades.

Unos de los principios de la metafísica que más determina su ética es el supuesto de que la actividad mental no puede desbordar la actividad natural misma. La creencia en la libertad es una manifestación de la ignorancia que el humano tiene de las causas: el ser humano no posee libre albedrío porque sus posibilidades de acción no pueden exceder las de su propia esencia, que es el límite de posibilidades que necesariamente se despliegan sobre los seres naturales. La actividad mental humana no posee la misma potencia creadora que la divinidad. Por otro lado, no se puede afirmar que sea una actividad mental creadora, por la que «el orden de las ideas coincida con el orden de las cosas», y por tanto nada puede crearse que no haya sido creado por Dios. En definitiva, cualquier acto mental o psicológico es ontológicamente igual a un acontecimiento extenso. Continuaremos exponiendo ideas sobre la libertad en otro apartado.

La T^a de la moral está supeditada a las doctrinas del verdadero conocimiento y sugiere la liberación de las pasiones como medio para conducir al hombre a la felicidad. El humano, como cualquier modo finito, persevera en su ser; la actividad de persistir la llama Spinoza conatus:

35. Para Spinoza el bien es la cantidad de utilidad contenida en una acción. La utilidad refuerza el éxito de la acción y por tanto aumenta las posibilidades de la misma.

«Cada cosa se esfuerza, cuando está a su alcance, por perseverar su ser» (ET III, Prop. IV)
«El esfuerzo con que cada cosa intenta perseverar en su ser no es nada distinto de la esencia actual de la cosa misma» (ET III, Prop V)
«El esfuerzo con que cada cosa intenta perseverar en su ser no implica tiempo alguno finito, sino indefinido» (ET III, Prop VI)

El conatus no es otra cosa que mantener la peculiar distribución de las partículas primarias que constituyen su esencia. La identidad así definida depende de la capacidad para conservar su potencia o conatus como si de una cantidad de energía constante se tratase. Este principio dinámico y movilizador de la capacidad humana en su conjunto recuerda las nociones de autoconservación freudiana y lucha por la supervivencia de Darwin. Es un «mecanismo» individual, un supuesto inverificable, que es jerarquía del humano el componente común a todo proceso, estado y acontecimiento que ocurra.

Se da una simetría entre la cantidad de conocimiento de la causa externa, y la actividad del conatus, cuya actividad o despliegue es impulsado por un medio idóneo de conocimiento. La estabilidad interna capacita al individuo a obtener ideas comunes (de segundo grado) con las cuales puede inferir programas de acción que redunden en el conatus. Y esto es la libertad, garantizarse por un camino corto y sencillo una existencia acorde con una naturaleza propia en expansión.

Al conatus aplicado al hombre se le denomina Apetitus. Si el apetito es conciente se le llama deseo o cupíditas. Puede cumplirse la condición de que el deseo refuerce el conatus, es decir afiance la tendencia de autoconservación, en tal caso lo conocemos como alegría. Ahora bien, si no mantiene el nivel de energía el deseo conduce a una disminución y debilitamiento del conatus, entonces se trata de dolor o tristeza. El humano es hedonista en la percepción de sus pasiones, todo ser persigue su propio bienestar y perfección. Este grado de perfección se establece por el nivel de activación de la pasiones: si el humano actúa conociendo la causa de sus pasiones tenderá a la perfección en mayor grado que si las desconoce.

Las pasiones no son sólo tres (alegría, tristeza y deseo): a partir de las elementales pueden deducirse las demás por un juego combinatorio de las pasiones con los objetos externos. A estas pasiones resultantes las llama secundarias; son el amor, (placer más una idea de causa externa), odio, compasión (la idea de otro sujeto afectado por las pasiones), etc. La lógica combinatoria de las ideas y de las pasiones dependen más de las leyes de la imaginación que del cálculo racional, lo cuál conduce irreversiblemente a las pasiones pasivas y tristes que no fomenta el conatus pero que en su naturaleza alienante movilizan la actividad del apetito:

pasiones primarias: *deseo, alegría, tristeza.*
pasiones secundarias: *asombro, desprecio, amor, odio, inclinación repulsión, devoción, irrisión, esperanza, miedo, seguridad, desesperación, satisfacción, insatisfacción, conmiseración, aprobación. indignación, sobreestimación, menosprecio, envidia, misericordia, contento de sí mismo, humildad, arrepentimiento, soberbia, abyección, gloria, vergüenza, frustración, emulación, gratitud, benevolencia, ira, venganza, crueldad, temor, audacia, pusilanimidad, consternación, modestia, ambición, gula, embriaguez, avaricia y la libídine (deseo de la íntima unión de los cuerpos).*

Las pasiones son importantes no sólo porque al permanecer en el plano de la inconciencia, de forma inadvertida, dominan la conducta, sin que el sujeto perciba su dependencia e impidan que cada idea posea la actividad por su fundamento lógico. Spinoza propone que las ideas adecuadas para ser tales tienen que ser recobradas por la conciencia, pero para las pasiones opta por explicar su impacto en el hombre a través de la inconciencia [36]. Como he explicado cuando comentamos la naturaleza del alma, las ideas [37] se diferencian de los afectos no exclusivamente en función de su valor cognoscitivo, sino de la función conciente que desempeñan. La conciencia dota a los afectos de una situación cercana a las pasiones alegres. En este caso, la actividad moral consiste en la encontrar el conocimiento de las causas de las acciones para neutralizarlas y favorecer un estado de equilibrio donde se desarrolle el conatus:

> *«Por tanto la libertad es virtud o perfección, en consecuencia todo aquello que en el hombre es índice de debilidad no se puede atribuir a su libertad... Se diría por el contrario, que el hombre es libre en cuanto tiene poder para existir y para ejercer una acción de acuerdo con las leyes de la naturaleza humana» (Tratado político, cap. II, prop.VII).*

La actividad moral garantiza que el hombre se desarrolle conforme a las leyes de su naturaleza. Si el sujeto se ve polarizado hacia las pasiones tristes debe procurar cambiar la tendencia y buscar nuevos programas de acción que amplifiquen el apetito humano y su alegría.

36. A Spinoza no le pasa inadvertida la extraordinaria importancia que los mecanismos inconcientes tienen en la conducta. Por ejemplo sobre el sueño dice: *«Soñamos, en fin, que por decisión del alma hacemos ciertas cosas que, despiertos nunca osamos a hacer»*. Este énfasis en los procesos no concientes, es otra de las diferencias entre el funcionamiento de la mente en Spinoza, del mismo concepto de Descartes.

37. E incluso la propia alma.

Las pasiones son el objeto de los juicios morales. Para Spinoza el hombre normal que vive al margen del conocimiento de la naturaleza parece que está sometido a un estado de esclavitud por la falta de competencia para desentrañar la fuente de sus pasiones. La servidumbre nos conduce a preferir pasiones pasivas a activas sólo por la ignorancia de que estamos siendo conducidos por algo inconciente. El ideal ético es la concepción del hombre sabio que vive en un estado de virtud como fuerza productiva del ser. Las pasiones dejan de serlo cuando el entendimiento capta una idea clara y evidente de su causa, transformando el dolor en placer o deseo activo.

El hombre está determinado por su posición en el esquema del sistema de causas y efectos. No necesita del concepto de responsabilidad moral para explicar la actitud ética más que en la medida en que hace referencia al trabajo intelectual de liberación y expansión. El amor intelectual que funcionalmente salvaguarda al humano de la enajenación y que le ayuda a concebir con felicidad la naturaleza (un sistema eterno) es la clave de toda actividad moral. Pero el hedonismo estoicista de Spinoza no conduce al individualismo, ni siquiera el individualismo social como en Hobbes. El uso de la razón como instrumento liberador puede permitir un estado solidario:

> *«El hombre que se guía por la razón es más libre en el estado donde vive según las leyes que obligan a todos, que en la soledad, donde sólo se obedece a sí mismo» (Et III, prop. LXXIII).*

Quiero decir que el humano actúa y se compromete socialmente, no sólo como individuo. La razón es universal y uniforme, y además en Spinoza, solidaria, donde los humanos comparten y se benefician de la actividad del otro. Como evaluación final de la ética es importante destacar la adecuación entre una doctrina del conocimiento y el determinismo más acérrimo. Destaca el optimismo por el que el humano al poseer ideas adecuadas puede ser causa interna de la conducta:

> *«El que comprende clara y distintamente su ser y sus pasiones ama a Dios tanto más cuanto mejor comprende su ser y sus pasiones» (Et. V, prop. XV).*

Aunque el objetivo de esta ponencia no es la exposición de la Tª política de Spinoza me gustaría por último hacer un comentario rápido sobre ésta. El tratamiento de los fenómenos políticos se opone a las versiones teológicas tradicionales al exponer un enfoque naturalista fundamentado en la investigación del factor humano, y no en la teología. Este proyecto puede ser calificado como científico y está inspirado en Hobbes. Es una teoría de la acción social marcadamente humanista, más que una ontología social. Su punto de partida es el de cómo construir una sociedad libre y justa pero no desde la utopía del pensamiento sino desde el campo de una racionalidad práctica. Solo con un método de investigación científica pueden desvelarse los problemas clásicos de la filosofía política. Este método debe de culminar con el diseño de una concepción original del Estado y del gobierno.

La razón no se agota en cuanto que razón epistemológica ya que se desarrolla como racionalidad práctica en el campo de lo social. Hobbes y Spinoza coinciden en este tratamiento de la razón. Para ellos las sociedades encuentran justificación sólo si éstas se mantienen por el interés racional de la colectividad. En ambos, la noción central es la de derecho natural de donde emanan las leyes que rigen las sociedades.

Si en el individuo, la naturaleza de sus pasiones constreñía los comportamientos en lo social, el derecho natural que tiene casi naturaleza de cuerpo va a determinar la interacción entre los sujetos. Este modelo es una representación del hombre mercantilista que acrecienta su poder y posesión durante el siglo XVII. La noción de poder como desarrollo libre en Hobbes y como potencialidad en Spinoza es el criterio máximo de análisis en las sociedades. Ambos critican la superchería y las falsas ideologías.

> *«La superstición, por el contrario, parece admitir que es bueno lo que reporta tristeza y malo lo que proporciona alegría... Pero quien, por contra, es guiado por el miedo, y hace el bien para evitar el mal, no es conducido por la razón» (Et, IV, Prop. XXXI)*

Para Spinoza sin embargo, la razón humana no es una pura máquina de cálculo, para satisfacer necesidades pasionales, como lo es para Hobbes. La razón no es esclava de los deseos sino que es el marco ideal para desarrollar el organismo óptimamente. La constitución humana vista desde el punto de vista del grupo es ahora el derecho natural y es la fuente de legitimación legal. Una ley en el mundo natural humano es un precepto natural para la sociedad. La razón los descubre y aplica en las legislaciones. Se llega a la ley por la razón, máxima universalizable.

> *«El primer punto a considerar es que el hombre más poderoso y el más libre del estado de naturaleza, es aquél que se deja guiar por la razón. Así la república más poderosa y más libre será aquella que tome la razón por fundamento y por regla de acción. Pues el derecho de la República está determinado por el poder de la multitud que se traduce como si fuese una» (Tratado Político, cap III, prop VII).*

En este texto, Spinoza hace una consideración al estado potenciado por la razón que surge del poder de la multitud aliada. Por derecho, debemos entender algo positivo en términos de poder y potencialidad. Si la noción de estado se construye sobre la noción de derecho natural, y éste responde al concepto dinámico de la substancia entonces el estado nada tiene que ver con una concepción pasiva o accidental que necesite de un pacto original. El dinamismo social, como una actividad política organizada no surge del miedo; más bien nace de la necesidad de colaboración en cuanto potencia de la multitud:

> *«El derecho así definido por el poder de la multitud se denomina generalmente, autoridad política. Lo tiene por modo absoluto, aquella persona que ha sido designada por el consentimiento general para guiar la cosa pública... . Cuando esta persona en una asamblea que reúne a la multitud en su totalidad, el régimen se llama democracia, cuando se reduce a un grupo de hombres elegidos, el régimen se llama aristocracia. Por último, cuando el ciudadano de la cosa pública, y por consiguiente, la autoridad política corresponde a uno sólo, el régimen se llama monarquía» (Tratado Político, cap II, Prop 17)*

El estado en cualquier caso, adquiere su fuerza de un pacto de multitud, entre iguales, y aquí reside la fuerza de la organización estatal. Puede ser que el pacto lo lleve uno entre todos, un rey por ejemplo, pero la forma de administración no debe de substraer el más mínimo derecho a los ciudadanos que constituyen el estado. Es estado es una construcción emergente de la sociedad activa y dinámica: *«Donde los hombres que viven bajo una legislación general y constituye un sola personalidad espiritual»*. (T.P. Cap V). Para Spinoza el pacto social no es la causa de lo social, sino el efecto. La verdadera causa hay que encontrarla en el carácter emergente de la substancia: el estado es un ser natural más emanado de la substancia infinita, al mismo tiempo que la potencialidad de los humanos se manifiesta más fuerte en colectividad.

En sociedad toda apelación a una de las partes aisladas es un error. El estado ha de velar por los intereses colectivos siguiendo unas condiciones que el estado debe de cumplir para ser justo: a) respeto por la razón, b) búsqueda de la felicidad de sus súbditos, c) fomento de la libertad y la libre opinión. Un humano es ciudadano del estado si «se está determinado por el poder no ya de cada hombre, sino de la multitud que se conduce como si fuese una en espíritu». En la concepción política de Hobbes, el pacto transfería todos los derechos naturales al gran Leviatán; en Spinoza el derecho natural es intransferible. La justicia y el derecho se subordinan, como noción intrínseca e inmanente, a la naturaleza humana. Una sociedad sancionada por la naturaleza».

El gobierno es una norma técnica para ampliar los imperativos del derecho natural, y Spinoza advierte que no se debe supeditar la libertad de los súbditos por el interés del propio estado. La democracia, forma deseable de organización estatal, debe de tener un predominio en la vida racional, mitigadas las pasiones. Sobre esta actitud preferencial de la razón, Spinoza entiende que por sí sola la razón lleva pareja la tolerancia política y religiosa. El humano «racional» no sigue una ideología por hábito, sino que debe de ser guiado por una racionalidad científica: comprende que debe existir una variedad de representaciones políticas, pero si son racionales han de ser complementarias. En la política racional no hay adversarios porque no hay pasiones, hay discursos racionales.

Los humanos no pueden ser obligados a hablar en exclusiva de los acuerdos del estado:

> *«Si, pues, nadie puede ceder su libertad de juzgar y de pensar lo que quiera y cada uno con arreglo al derecho supremo de la naturaleza es dueño de su pensamiento, nunca puede intentarse tal cosa por el estado sino con recelo de un desgraciado éxito» (T.T.P. Cap. 20)*

Tolerancia y libertad son las características del estado ideal para Spinoza, el estado que creyó ver en la república asamblearia de su Holanda bajo la familia de Witt.

La concepción de la mente en Descartes

> «Más todavía no conozco con claridad lo que soy estando seguro de que existo... (Descartes, 1640/1988, p. 53 [Meditación segunda]).
>
> «With knowledge man may judge himself» Anónimo siglo XIX; aparece como lema bajo una lámina anatómica del cerebro, posiblemente de Gall.

En el siglo XVII se abandona el programa aristotélico de buscar esencias (formas) de los objetos para centrarse en el estudio del cambio como resultante de los movimientos de la materia. La primera consecuencia de este cambio de estructura comprensiva es la imposición de la mecánica como modelo explicativo de la naturaleza, pero un mecanicismo sometido y pautado por su expresión matemática. La razón matemática es desveladora de los mecanismos que están en el nuevo mundo dinámico. La naturaleza es principalmente una manifestación o diseño de una inteligencia lógica, de tal forma que la geometría de la idea es isomórfica con la geometría de los mecanismos del mundo. Desde este punto de vista la matemática es el fundamento de la nueva física. Para los racionalistas la matemática, como he indicado en el apartado uno, la actitud científica descansa sobre los argumentos deductivos; la verdad surge de sentencias autoevidentes que proporcionan certeza cognitiva.

En el mundo material todo se compone de finos corpúsculos cuyas propiedades determinan las propiedades generales de los cuerpos agregados. Todo espacio está lleno de estos elementos constituyentes y la alternativa científica no puede ser otra que reducir los fenómenos a los elementos más simples y constituyentes, pues es posible la reducción de propiedades de los cuerpos a las propiedades de sus elementales.

Ahora bien, Descartes en la «*Meditaciones*» introduce una notable excepción: la mente humana, que es definida como substancia finita pensante, no está compuesta de seres finitos extensos. La mente es por definición inextensa e irreductible a sus elementales. De esta forma *Descartes excluye a la mente de su programa de investigación científico.* Siendo el humano el resultante de dos substancias, dos clases de seres, independientes sólo es posible estudiar experimentalmente al humano en sus componentes corpóreos, y quizás la manera en que el alma se comunica con el cuerpo es a través de los «espíritus animales». Esta posición del problema mente/cuerpo lo calificamos en la actualidad como Dualismo Substancial [38] y Dualismo de propiedades que explicaré en el siguiente apartado. En esencia, Descartes argumenta, desvela por la claridad y distinción de su razón, que la mente es una entidad no material, «*enteramente distinta del cuerpo*» o «*... no necesita de lugar alguno ni depende de ninguna cosa material*» (Descartes 1637/1988), por tanto ajena al agregado extenso. La mente tiene propiedades que tampoco son materiales e impide la reducción de las funciones mentales a estados cerebrales. Por el contrario, el cuerpo humano sí podría explicarse reductivamente como una máquina movida por reflejos (para el autor de Las Reglas, un reflejo es una actividad nerviosa causada por el disparo de fluídos, analogía con los descubrimientos de la circulación de Harvey).

Excepto Platón y Agustín de Hipona, ningún otro filósofo ha llegado tan lejos en la separación tan radical de la cualidad pensante y el cuerpo. Aristóteles en «De anima» estableció claramente tres tipos de alma según su «ergon» sin que sean virtualmente distintas del cuerpo animal. Con la caída en los siglos anteriores de la Tª de la forma y la materia, Descartes se ve obligado a reinterpretar la actividad del alma en una nueva estructura de conceptos por la cuál los seres naturales, lo material, es inerte y pasivo, sometido a fuerzas exteriores descritos en la física. El alma no puede ser material pues es activa y viva; en sí misma debe existir una clase de fuerza diferente a las que actúan en el mundo material.

Es el alma la que nos distingue del reino animal, con lo que se mantiene un fuerte discontinuismo con las demás especies. Por ejemplo, en torno a la naturaleza del lenguaje, Descartes nos dice en el «*Discurso del Método*» (Quinta Parte) que:

> «... *El primero de ellos es que nunca podrían usar palabras ni otros signos componiéndolos como los hacemos nosotros para declarar nuestros pensamientos a los demás, pues sé que se puede concebir bien que una máquina está hecha*

38. Puede leerse la formulación del dualismo substancial en la primera línea del «*Tratado de Hombre*» (1633) pero no publicada hasta después de la muerte del Descartes.

de tal manera que profiera palabras...; pero no es posible que se arregle de distintos modos para responder al sentido de todo que sé cuanto se diga en su presencia como pueden hacerlo los humanos más torpes. Y segundo es que, aunque hicieran distintas cosas tan bien, o quizás mejor que ninguno de nosotros, se equivocarían infaliblemente en algunas otras, por las que se descubriría que no obraban por conocimiento, sino tan sólo por la disposición de sus órganos [39]*; pues la razón es un instrumento universal que puede servir en toda clase de circunstancias, esos órganos tienen alguna disposición especial para cada acción particular; de donde se sigue que es moralmente* [40] *imposible que haya en una máquina tal cantidad de diversidad que la permita obrar en todas las ocasiones de la vida de la misma manera que nos permite obrar nuestra razón».*

(Descartes, 1637/1980)

En este brillante fragmento, el autor destaca dos características del alma: es la responsable de los rasgos gramaticales del lenguaje y del sentido ante una interpelación comunicativa, y que la manera en que los realiza satisface cualquier contexto posible de aplicación [diversidad] según la intencionalidad del hablante. Esta caracterización no metafísica de alma como una substancia pensante, que no es «una mera disposición de los órganos» encargada de servir de sustento a las operaciones racionales, es hoy en día fácilmente falsable [41].

El dualismo cartesiano concibe al humano como un mecanismo divisible («*como se ve un reloj que sólo se ve compuesto por ruedas y resortes...*»), y la mente, tal que «..., *conocí por todo esto que yo era una substancia cuya esencia o naturaleza es pensar y que para ser no necesita de lugar alguno ni depende de cosa material alguna*». (Descartes 1637/1988), que es indivisible [42]. La no ocupación del espacio y la actividad racional de pensar [43], son los dos atributos de la substancias pensante. El alma humana tiene la propiedad de ser libre, dado que puede someterse

39. Un mecanismo es justo aquello que actúa por la «disposición de sus órganos». El mecanismo no es más que un agregado de elementos debidamente ensamblados sin propiedades colectivas o emergentes.

40. La obligatoriedad moral no es un recurso que niegue la posibilidad de que las máquinas realicen funciones lingüísticas plenas de semántica, como mucho se apela en este fragmento a una sensibilidad negativa del lector al imaginar una máquina pensante.

41. En la actualidad podemos describir los mecanismos cerebrales encargados de las funciones lingüísticas. Monográfico de Investigación y Ciencia de noviembre del 1992.

42. La definición del alma como indivisible está desarrollada en las «Meditaciones Metafísicas» (Descartes, 1640/1987, pág. 37 y ss).

43. Descartes interpretó el pensamiento en términos genéricos: como lo común en toda operación mental del tipo creer, intuir, simplificar, etc. Esta definición del pensamiento es ambigua al no indicar las características lógicas que las distingan de otras operaciones internas. Podemos suponer desde nuestro tiempo, que mantenía que un acto racional es ante todo una actitud proposicional del tipo intencional.

sin condicionamiento ni determinantes a actuar según su exclusiva voluntad (por ejemplo en su moral provisional). Sin embargo, ni el «*Discurso de Método*» ni en el «*Tratado del Hombre*» desarrolla de forma argumentada la idea de libertad porque de postularse íntegramente en el humano no podría entenderse la «infinita libertad de Dios».

Otro rasgo destacable de la hipotética alma que Descartes postula en el humano es la conciencia. Spinoza en los «*Principios de la Filosofía de Descartes*» (que es una de la más aptas aproximaciones y sistematización de la Obra de Descartes) nos dice en la Definición primera que «*bajo el término pensamiento incluyó todo aquello que está en nosotros y de lo cual somos inmediatamente concientes*» [Spinoza 1663/1988, pág. 145]. Este acercamiento introspectivo a la naturaleza del alma, junto con la investigación experimental de los diversos tipos de conciencias es uno de los temas substanciales en las dos ultimas décadas de nuestro siglo.

Ambos componentes del humano (la máquina corporal y el alma) interactúan en un área del cerebro llamada «glándula pineal [44]», por medio de los humores animales. Realmente la posición de la interacción del alma y el cerebro ha suscitado multitud de interrogantes. El mismo Gassendi [45] planteó que:

> «*Aún queda por explicar cómo esa unión aparentemente entremezclada... puede encontrarse en tí, si eres* [46] *incorpóreo, inextenso e invisible... ¿Cómo, al menos, puedes unirte con el cerebro, o con alguna parte de él que tiene que tener con alguna magnitud o extensión, por pequeña que sea? Si tú careces completamente de partes, ¿cómo puedes mezclarte o parecer mezclarte con sus diminutas subdivisiones? Pues no hay mezcla alguna a menos que cada una de las cosas que han de mezclarse tenga partes que puedan mezclarse entre sí*». (Gassendi, 1641/1970, pág. 201) [47].

44. La descripción del modo de operar del alma a través de unas finas membranas cerebrales que conectan con los nervios y fluidos puede verse detalladamente expuesta en el «*Tratado del Hombre*» quinta parte.

45. El mismo argumento podemos hallarlo en Hume «¿existe acaso en toda la naturaleza algún principio más misterioso que la unión entre alma y cuerpo, por la que una supuesta substancia espiritual adquiere tanto influjo sobre una substancia material... Si tuviésemos el poder, mediante un deseo secreto, de mover montañas o de controlar las órbita de los planetas, esta considerable autoridad no sería algo más extraordinario, ni escaparía más de nuestra comprensión? Hume (1748)» «Investigaciones sobre el entendimiento humano», Sección VII.

46. Con uso continuado de la igualdad [Descartes es alma] haciendo referencia a Descartes como ser inmaterial, implica varias cuestiones: a) que si es un ser inmaterial ha de saber necesariamente cómo se relaciona con las diminutas partes de la cavidad cerebral, pues es el la cosa intencional; b) que como es obvio, un ser inmaterial no tiene partes materiales y por tanto no puede realizarse la interacción, «mezcla», aunque sepa cómo, y c) que debe ser solamente Descartes el único ser inmaterial tal que si no soluciona las objeciones primera y segunda será un alma muy limitada en su ser. En suma, un argumento contundente.

47. La referencia está extraída del texto de D. Clarke: 1982, «*La filosofía de la ciencia de Descartes*», Madrid, Al. Editorial, (1986).

Descartes no resolvió nunca las objeciones a la interacción del alma con el cerebro. Una solución a esta cuestión no llegará hasta los años setenta de nuestro siglo con las obras de Ecclers y Popper «*El yo y su cerebro*» (1977), y Ecclers «*La mente humana*» (1988) y «*La evolución del cerebro: «la creación de la conciencia»*. (1992/1992) en las cuales se sostiene equivocadamente pero con el conocimiento neurocientífico del momento, que las propiedades mentales son irreductibles y perfectamente distinguibles de las cerebrales. (posición conocida por epifenomenalismo). En esta ponencia no expondré una posible crítica al neocartesianismo de estos autores [48].

La Teoría del alma en Spinoza

El hombre es un ser natural finito, un elemento particular más del reino natural. A este objeto particular podemos entenderlo como cuerpo y como pensamiento, un ser natural con atributos distintos y complementarios. Podemos emitir juicios de él con un vocabulario fisicalista para los fenómenos naturales físicos, y con un vocabulario mentalista para los fenónemos naturales de tipo mental sin que esta dualidad de atributos implique dos entidades distintas ya que es sólo una. La mente es el conjunto de acontecimientos describibles con el segundo tipo de vocabularios.

En cuanto los fenómenos físicos no ofrece ningún problema en su caracterización: son seres finitos que o se mueven variando su velocidad o bien permanecen en reposo. Son siempre seres compuestos por otros cuerpos más pequeños. Siguen una dinámica explicable según las colisiones a las que somete.

Los objetos físicos o extensos están determinados por las leyes naturales. Nada hay en el mundo natural, Dios, que pueda escapar a la estructura de necesidades «*en la naturaleza no hay nada contingente, sino que, en virtud de la necesidad de la naturaleza divina, todo está determinado a existir y obrar de cierta manera*» (ET I°, Prop. XXIX). Esto es una hipótesis determinista de los seres naturales.

El humano conoce las cosas extensas porque deja una huella en el sujeto, es decir produce una afección en el alma [49]. Construimos modelos del mundo según el

48. Los lectores interesados en hallar una crítica de primera mano y además contundente pueden leer de Churchland, P.S. (1986) «NeuroPhilosiphy» MIT Pres. Bradford Books. Cambridge. Lamentablemente sin traducción al castellano en el día de hoy.

49. Esta proposición ya mencionada antes implica un empirismo moderado. En efecto, el conocimiento del mundo externo se produce por manifestaciones de los cuerpos que lo forman que pueden ser percibidos por el alma. El lector ha de tener en cuenta que Spinoza no afirma ni niega la verdad de esas impresiones. Para determinar su valor de verdad es necesario acudir a otra clase de actos mentales que son las ideas adecuadas y que son innatas. En la prop XXVI dice «El alma humana no percibe ningún cuerpo exterior como existente en acto sino por obra de las ideas de las afecciones de su propio cuerpo». *Estamos condenados a representarnos el mundo físico a través de la sensibilidad del alma.*

umbral de sensibilidad de nuestra mente. Se trata de una afirmación clave para entender que existen categorías «a priori» (anteriores a la propia experiencia) que prefiguran los contenidos y los juicios que hacemos en el mundo. La estructura del acto de conocimiento no es impedir estar directamente en el mundo y aprehender lo que son realmente las cosas por la vía sensible. Pese a esta limitación no se niega el mundo externo y se le considera como relevante e informativo.

Para Spinoza el humano no es una substancia: *«A la esencia del hombre no pertenece el ser de la substancia, o sea, no es una substancia lo que constituye la forma del hombre»*. (ETica II, Prop. X) Debemos entenderlo como un caso concreto [50] de la naturaleza, no como una naturaleza aparte. Si en Descartes el alma es una entidad substancial distinta al cuerpo (extensión humana), en Spinoza alma y cuerpo son manifestaciones puntuales (modos) de la substancia infinita (Dios o naturaleza). Como nos dice el mismo Spinoza en el Corolario II a la prop. XIV 1ª p. *«Se sigue que la cosa extensa y la cosa pensante, o bien son atributos de Dios, o bien afecciones de los atributos de Dios»*. Spinoza deja bien claro, en el escolio, que el humano no es un compuesto de cuerpo y alma y que no es un error pensar a Dios como algo corpóreo, además de pensante: *«No sé por qué la materia sería indigna de la naturaleza divina»*. En realidad nuestro filósofo se aproxima al alma por ser uno de los atributos, el pensante, pero también por no ser cuerpo (Etica II, DEF I), además de caracterizarla por tener ideas (conceptos del alma) que son el material mismo del pensamiento.

Es importante que el lector se de cuenta que en la Etica no se define [51] (no es una definición) el Alma sino que se entrevé en el axioma II, ETII: *«El hombre piensa»*. No puede pasar desapercibido que esta jerarquía en el sistema expositivo de su metafísica no quiera dar a entender sino que: no puede haber cualidad pensante sin soporte corpóreo, aunque bien es cierto que pensar es un atributo distinto del ser físico. Toda actividad del alma, operación mental para nosotros, es un «modo de pensamiento», de tal forma que una idea es equivalente a tener un modo de pensamiento. Todas las ideas y/o afecciones dependen por entero de la maquinaria de los modos del pensar.

50. «... que la esencia del hombre no está constituída por ciertas modificaciones de los atributos de Dios» (Cor. prop X, Et II).

51. En el sistema deductivo spinoziano las definiciones son anteriores a cualquier axioma y a las proposiciones. La aproximación al cuerpo es una definición muy precisa, sin embargo, la aproximación a la mente es solamente un axioma con varias proposiciones. Esto da una idea de que para él podría ser claro y evidente afirmar la existencia de seres finitos extensos como pensantes.

Descartes no expone de forma explícita y nominal el papel de la conciencia en la actividad mental (en ningún texto leído por mí [52]). En Spinoza, por el contrario la conciencia aparece en los axiomas IV y V de la 2ª parte. Decimos que un humano tiene alma si es conciente de que opera con ideas en un momento dado. Si por el contrario no trabajamos con ideas, o no somos concientes de este hecho no podríamos afirmar con propiedad que tenemos alma. De hecho alma es definida en acto [53]. El alma es inseparable de la actividad pensante presente en un humano, más que por sus posibilidades futuras. Además de conciente, el alma es autoconciente, es decir, puede concebirse a sí misma como «un cuerpo» y autopercibirse. (Prop. XII y XII) [54]. Por estas razones podemos decir que sólo el humano tiene alma.

Spinoza no duda de la existencia del cuerpo propio: si el alma lo percibe *«es que existe tal y como lo sentimos»*, aunque propone una importante limitación *«El alma humana no implica el conocimiento adecuado de las partes que componen el cuerpo humano»* (EtII, Prop. XXIV), lo que quiere decir que desconocemos cuál es la naturaleza material exacta del cuerpo. Para Spinoza esta ignorancia debe ser corregida por un programa de investigación científico del propio cuerpo. De esta forma tan elegante Spinoza evita el problema del confinamiento de la mente, o solipsismo.

La eminencia de las facultades racionales sobre las pasiones inhibitorias del ser no lleva pareja la libertad de decisión y acción. El autor de la Etica es el pensador más claro y determinante de la hª de la ideas de Occidente al negar la libertad de cualquier elemento natural, y muy especialmente de la mente humana. Recuerde que para Descartes el rol implícito jugado por la conciencia y la autenticidad con la que se autopercibía eran motivos suficientes para deducir la independencia del alma con respecto a la materia, y de ahí el autor del Discurso de Método realizaba una inferencia implícita e indemostrada sobre la libertad humana. Prueba de ello es que no

52. El hecho de no haber podido acceder a las correspondencias no me permite afirmar que se pronunciara expresamente sobre el matiz conciente y autoconciente del alma. Lo que es cierto, es que Descartes usa este rasgo en todos sus razonamientos, sin llegar a teorizarlo.

53. «Lo primero que constituye el ser actual del alma humana no es más que la idea de una cosa singular existente en acto» (EtII, Prop. XI).

54. «Todo cuanto acaece en el objeto de la idea que constituye el alma humana debe ser percibido por el alma humana o, lo que es lo mismo, habrá necesariamente una idea de ello en el alma. Es decir: si el objeto de la idea que constituye el alma humana es un cuerpo, nada podrá aparecer en ese cuerpo que no sea percibido en ese cuerpo» (EtII, Prop. XII) y «El objeto de la idea que constituye el alma humana es un cuerpo, o sea, cierto modo de la extensión existente en acto, y no otra cosa» (ETII, Prop. XIII) Estas dos proposiciones tienen una doble lectura y son de muy difícil interpretación. Por un lado se nos dice que el hombre a través de las modos extensos, paro también que el alma puede representarse a mí misma como un cuerpo y autopercibir en nuevas ideas sus propias modificaciones, esta capacidad para reflexibilidad fundamentaría un tipo de abstracción. Véase la prop XXII y sus demostraciones.

limita la acción conciente humana a ningún factor y que atribuye al alma infinita potencialidad en la construcción de oraciones del lenguaje. Por el contrario, Spinoza niega la libertad en términos positivos:

> «Se llama libre a aquella cosa que existe en virtud de la sola necesidad de su naturaleza y está determinada por sí sola a obrar; y determinada, o mejor compelida, a lo que es determinada por otra cosa a existir y operar, de cierta y determinada manera» (ET Iª, Def VII)

Por tanto la libertad es reconocimiento de la necesidad de un sistema: la necesidad a actuar por causa propia (Dios) y por causa no suya (seres naturales finitos). Todas las cosas naturales están determinadas a obrar no por «causa sui». La libertad es la autoconciencia de las causas bajo las que la conducta está siendo controlada. Es una función cognoscitiva neutra, que no altera el vínculo causal [55]. En términos más prácticos, consiste en la capacidad para establecer planes de conductas que renueven y amplíen el «conatus» humano lejos de la servidumbre de las pasiones tristes y conforme a las leyes naturales. Es consecuencia directa de la cantidad de conocimiento científico que poseo y pongo en disposición. Quién actúe con utilidad y eficacia es libre porque cumple mejor los mandamientos de su naturaleza. Por ejemplo: su un afectado de gripe no conoce la causa de sus síntomas no será libre, pero si las conoce y actúa en consecuencia será libre porque aumenta las posibilidades de existir.

Las relaciones entre el alma y el cuerpo son complejas:

> *«Ni el cuerpo puede determinar al alma a pensar, ni el alma puede determinar al cuerpo al movimiento ni al reposo, ni a otra cosa alguna». (Et III, Prop II).*
>
> *«Todo ello muestra claramente que tanto la decisión como el apetito del alma y la determinación del cuerpo son cosas simultáneas por naturaleza, o mejor dicho, son una sola y misma cosa, a la que llamamos —decisión— cuando la consideramos bajo el atributo del pensamiento, y —determinación— cuando la consideramos bajo el atributo de la extensión, y la deducimos de las leyes del movimiento y el reposo...» (Escolio a la proposición anterior)* [56].

55. En la demostración de la prop LXVII (Et III) nos dice sobre la libertad: «*Un hombre libre, es decir un hombre que vive sólo según el dictamen de su razón no se deja llevar por el miedo a la muerte...*». La asociación conocimiento / libertad es evidente en toda la obra, siendo la piedra de toque de toda su ética.

56. El lector interesado en indagar la concepción monista del alma debe de leer de forma includible el enorme e impresionante escolio a la prop II de la parte tercera. En él se expone la posición materialista de la mente.

Spinoza en un monista que pone en el mismo nivel los atributos extensos y los mentales. De hecho son la misma cosa, una cosa material. Considera que el cuerpo «la fábrica del cuerpo humano» pudiera ser responsable de fenómenos mentales. Continuemos comentando el mismo escolio:

> «*...están persuadidos firmemente de que el cuerpo se mueve o reposa al más mínimo mandato del alma, y de que el cuerpo obra muchas cosas que dependen exclusivamente de la capacidad del alma y su capacidad de pensamiento. Y el hecho es que nadie ha enseñando la experiencia, hasta ahora, qué es lo que puede hacer en virtud de las solas leyes de su naturaleza, considerada como puramente corpórea, y qué es lo que no puede hacer salvo que el alma lo determine. (...) De donde se sigue que cuando los hombres dicen que tal o cual acción del cuerpo proviene del alma, por tener ésta imperio sobre el cuerpo, no saben lo que dicen, y no saben sino confesar, con palabras espaciosas, su ignorancia*».

En este impresionante fragmento observamos cómo el autor de la «Etica» se deslinda de los que piensan en la mente y el cuerpo como «una nave y su piloto». El cuerpo tiene funciones de todo tipo, incluso es posible que sean mentales (proposición que Spinoza no niega en ningún texto de su obra entera), aunque es prematuro decir cuáles son esas funciones que dependen de la disposición de sus órganos. Quien coloca al cuerpo (cerebro) fuera de la causas de las conductas intelectuales, como por ejemplo el lenguaje, lo hace por ignorancia del papel que opera el propio cerebro. Los críticos de Spinoza, casi sin excepción, afirman que la posición de éste en el problema de determinar qué es la mente pertenece a la solución llamada paralelismo psicofísico. En mi modesta opinión, es una clasificación inadecuada y equívoca. No hay que confundir la existencia de dos niveles del lenguaje (los atributos son en última instancia tipos de predicados) con la existencia de dos órdenes de realidades. Spinoza no puede mantener otra posición, a la luz de su obra, que la conocida como monismo psicofísico, en una vertiente muy cercana al funcionalismo.

Por último, considero básico hacer una referencia breve al innatismo de ideas (hoy conocido como innatismo comprensivo). En general, tanto Descartes como Spinoza estiman que el origen de las ideas, al menos de las ideas comunes (verdaderas en sí mismas), no puede inferirse de la experiencia sensible; en concreto, su procedencia es innata, no aprendida. La razón humana, posee una estructura profunda independiente de la experiencia sensible que en sí misma contiene un dispositivo completo y simple de ideas básicas con las que el alma concibe el mundo. En Spinoza esta concepción del pensamiento racional como innato es defendido en «El tratado de la reforma del entendimiento»:

> «*...Por el contrario, así los hombres usando al comienzo instrumentos innatos, consiguieron fabricar, aunque con gran esfuerzo y escaso éxito, algunos objetos*

sumamente fáciles...; así también el entendimiento, con su fuerza natural nativa se forja instrumentos intelectuales, con los que adquiere nuevas fuerzas para realizar otras obras intelectuales y con éstas consigue nuevos instrumentos, es decir, el poder de llevar más lejos la investigación, y sigue así progresivamente, hasta conseguir la cumbre de la sabiduría. ...Ya que como se puede colegir de lo anterior, es indispensable, ante todo, que exista en nosotros una idea verdadera a modo de instrumento innato, para que una vez entendida ella, se entienda a la vez la diferencia que existe entre esa percepción y todas las demás» (Tratado para la Reforma del Entendimiento, pág. 86/87 y 90)

En este texto extraemos dos ideas: primera, que la razón humana tiene una «estructura profunda», innata, generadora de nuevas ideas por diferencia con ellas, y segunda, que las ideas básicas son «instrumentos innatos». Ser percibido como claro y distinto significa ser una idea innata. El innatismo nunca ha sido una «hipótesis bien vista» en el campo de la psicología y filosofía de la mente: ¿Cómo puede un humano estar provisto de conceptos y estructuras innatos sobre las cuales se edifica el resto de la actividad psíquica? En las dos últimas décadas del presente siglo, se ha abandonado casi por completo la pretensión empirista del tipo «el humano es un papel en blanco», acercándonos más al innatismo racionalista [57]. Con la ciencia psicológica de nuestro momento es posible mantener una concepción innatista moderada en el estudio de las capacidades mentales cognitivas siempre y cuando se reconozca el carácter formativo e interactivo el medio ambiente sobre estas capacidades innatas, aunque no es recomendable mantener un innatismo total.

Pienso que queda muy claro cuál es el tratamiento del problema de la mente en Spinoza: por un lado se edifica una concepción monista, muy cercana a la posición funcionalista: los fenómenos mentales son propiedades materiales descritas según sus reacciones causales con otros términos mentales y con la conducta. El especialista en la mente debe de utilizar un vocabulario mental porque permite captar las leyes que actúan en la actividad psicológica de los individuos, leyes que no se captan ni reducen a un vocabulario fisicalista. Por otro lado, hemos observado cómo Spinoza postula la característica de la conciencia sin que por ello caiga en la falacia cartesiana de postular un nivel ontológico para los eventos mentales. La conciencia puede ser un nivel de análisis privilegiado, pero no por ello nos sitúa en «otro mundo». Por último, se destaca el papel de la razón humana como esquema de pensamiento innato, como el conjunto de las reglas innatas y categorías naturales del procesamiento de información.

57. Si el lector está interesado en la polémica entre el ambientalismo empirista y el innatismo puede leer el reciente libro «Nacer sabiendo» (1990) de Mehler, J. y Dupounx, E., Alianza Editorial, Madrid, 1993.

La actitud spinoziana de la mente es tolerante con la investigación científica, al contrario que la Tª cartesiana. Ciertamente Descartes eliminó todo enfoque racional (reducir a leyes naturales) de los fenómenos mentales porque el mecanicismo de su época no podía aspirar a reducir los fenómenos. La posición de Spinoza es mucho mas flexible: postula que no se ha realizado aún un intento serio de buscar los principios materiales del pensamiento, buscar la naturaleza material de la mente, y que por ello no se pueda concluir que la mente no es un objeto de estudio científico. El pensador holandés no caracteriza la «materia mental» mediante definiciones explícitas a mecanismos y dispositivos cerebrales (en la actualidad estamos aún en un estadio inicial cuantitativo de la mente), sino que define la mente desde una perspectiva metafísica y epistémica materialista.

El lector podrá preguntarme por qué insisto en el hecho de que esta perspectiva sea más fecunda para la ciencia que la dualista de propiedades por ejemplo, o por qué explicita aún más los argumentos concluyentes que mantengo. Tendré que reconocerle que no disponemos de ningún argumento completo y decisivo al 100% contra la posición dualista (pero sí al 90%), y que me inclino en última instancia a defender el acercamiento monista porque es optimista en lo epistémico y en lo metodológico: puede realizarse así una aproximación científica de la mente, y nuestra calidad de vida corresponderse con los incrementos de este conocimiento. En definitiva, estoy atrapado por la interpretación material de un viejo y universal themata.

BIBLIOGRAFÍA

BUNGE, M. *«El problema mente-cerebro»*, Tecnos.

COTTINGHAM, J. *«El racionalismo»*, Ariel.

DELEUZE, G. *«Spinoza y el problema de la expresión»*, Munchnik Editores.

DESCARTES, R, *«Discurso del Método»*, Alhambra.

DESCARTES, R. *«Meditaciones metafísicas»*, Alfaguara.

DESCARTES, R. *«Tratado del hombre»*, Editora Nacional.

HAMPSHIRE, S. *«Spinoza»*, Alianza Universidad.

SPINOZA, B. *«Correspondencia»*, Alianza Editorial.

SPINOZA, B. *«La Etica demostrada según el orden geométrico»*, Editora Nacional.

SPINOZA, B. *«Tratado para la Reforma del Entendimiento»*, Alianza Editorial.

SPINOZA, B, *«Tratado Teológico Científico»*, Tecnos.

SPINOZA, B, *«Tratado Político»*. Tecnos.

DESCARTES: EL ÁLGEBRA Y LA GEOMETRÍA

José Montesinos Sirera
Profesor de Matemáticas
I.B. Villalba Hervás

«La mente humana tiene algo de divino y en ella están sembradas las semillas del conocimiento»

René Descartes

Los modernos historiadores de las matemáticas: Boyer, Kline, etc., coinciden en señalar que René Descartes (1596-1650) fue técnicamente un matemático «menor», y ello no por falta de genio y capacidad para el estudio de aquéllas, sino por una decisión voluntariamente tomada por el propio Descartes de empeñar sus energías fundamentalmente en el estudio de la Filosofía y de la Física.

«He decidido abandonar la geometría abstracta, es decir, la consideración de cuestiones que sólo sirven para ejercitar la mente, para estudiar otro tipo de geometría que tiene por objeto la explicación de los fenómenos de la naturaleza».

Y sin embargo, muchos años antes de tomar esta decisión, ha sido la matemática abstracta, la geometría de los antiguos, la que le ha llenado de admiración y le ha hecho concebir su Método.

El método cartesiano y las matemáticas

En su autobiográfico «Discurso del Método», («Discours de la méthode por bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences»), Descartes nos cuenta la insatisfacción que sentía al terminar sus estudios en el colegio de jesuitas de La Flèche.

«...Desde la niñez fui habituado en el estudio de las letras y tenía un apasionado deseo de conocerlas, pues me persuadían de que mediante tales estudios se podía adquirir un conocimiento claro y al abrigo de dudas *sobre todo lo que es útil para la vida.* Pero modifiqué por completo mi opinión tan pronto como hube concluido mis estudios, momento en el que existe la costumbre de ser recibido en el rango de los doctos. Tantas dudas y errores me embargaban que, habiendo intentado instruirme, me parecía no haber alcanzado resultado alguno si exceptuamos el progresivo descubrimiento de mi ignorancia...»

A continuación, pasa revista a todas las materias que le han enseñado, concluyendo que de ellas únicamente las matemáticas le producían un especial deleite dada la certeza y evidencia de sus razonamientos, aunque sin percatarse de su verdadera función y utilidad.

Al inicio del capítulo segundo, Descartes nos cuenta el famoso episodio de «la poêle», de ciertas resonancias místicas.

«Me encontraba entonces en Alemania, país al que había sido atraído por el deseo de conocer unas guerras que aún no han finalizado. Cuando retornaba hacia la armada después de haber presenciado la coronación del Emperador, el inicio del invierno me obligó a detenerme en un cuartel en el que, no encontrando conversación alguna que distrajera mi atención y, por otra parte, no teniendo afortunadamente preocupaciones que me inquietasen, permanecía durante todo el día en una cálida habitación donde disfrutaba analizando mis reflexiones...»

En la noche del 10 de noviembre de 1619, Descartes tiene tres sueños en los que se le revela el proyecto de una «CIENCIA ADMIRABLE». Pero sigamos su relato,

«...Había estudiado, siendo más joven, entre las partes de la filosofía, la lógica y entre la de las matemáticas el análisis de los geómetras y el álgebra...»

Pero al examinarlas advertí que con respecto a la lógica, sus silogismos y la mayor parte de las demás instrucciones sirven mas bien para explicar a otros las cosas que ya se saben... Luego, en relación con el análisis de los antiguos (la geometría) y el álgebra de los modernos, aparte de no extenderse sino a materias muy abstractas y que parecen carecer de todo uso, el primero está siempre tan constreñido a la consideración de las figuras, que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar en mucho la imaginación; y en la última, de tal modo se está sometido a ciertas reglas y a ciertas cifras que ha llegado a ser un arte confuso y oscuro, que confunde al espíritu en lugar de ser una ciencia que lo cultive. Esto fue la causa de que pensara que era preciso buscar algún otro *método* que, reuniendo las ventajas de estos tres, excluyera sus defectos...»

Son bien conocidas las reglas de ese «método» maravilloso.

La primera consiste en no admitir cosa alguna como verdadera si no se la había conocido evidentemente como tal. Es decir, con todo cuidado debía evitar la precipitación y la prevención, admitiendo exclusivamente en mis juicios aquello que se presentara tan clara y distintamente a mi espíritu que no tuviera motivo alguno para ponerlo en duda.

La segunda exigía que dividiese cada una de las dificultades a examinar en tantas parcelas como fuera posible y necesario para resolverlas más fácilmente.

La tercera requería conducir por orden mis reflexiones comenzando por los objetos más simples y más fácilmente cognoscibles, para ascender poco a poco, gradualmente, hasta el conocimiento de los más complejos.

Según el *cuarto* y último de estos preceptos debería realizar recuentos tan completos y revisiones tan amplias que pudiese estar seguro de no omitir nada».

Y así, el correcto uso de estas reglas conducirían a que

«...Las largas cadenas de razones simples y fáciles, por medio de las cuales generalmente los geómetras llegan a alcanzar las demostraciones más difíciles, me habían proporcionado la ocasión de imaginar que todas las cosas que pueden ser objeto del conocimiento de los hombres se entrelazan de igual forma y que, absteniéndome de admitir como verdadera alguna que no lo sea y guardando siempre el orden necesario para deducir unas de otras, *no puede haber algunas tan alejadas de nuestro conocimiento que no podamos finalmente conocer, ni tan ocultas que no podamos llegar a descubrir...*».

Impresiona la audacia del joven Descartes.

Por el momento viaja por toda Europa y se hace un consumado espadachín; reside dos años en Italia y hacia 1626 se instala en París donde se relaciona con los espíritus más cultivados de la época. Entra de nuevo en contacto con su compañero de colegio *Marin Mersenne*, que ha tomado los hábitos religiosos y que será una especie de «correo» de las personalidades científicas y filosóficas más importantes del período.

Por esta época escribe «Las reglas para la dirección del espíritu», publicada póstumamente en 1701 y que constituye lo que será el primer diseño de la filosofía cartesiana. Especialmente interesante es la REGLA IV: «El Método es necesario para la investigación de la verdad».

Aquí Descartes proclama la unidad de las ciencias y decreta que no hay otra forma de avanzar en ellas que la de su método:

«Mejor que buscar la verdad sin método es no pensar nunca en ella, porque los estudios desordenados y las meditaciones obscuras turban las luces naturales de la razón y ciegan la inteligencia».

Aunque consiente en no ser el primero en haber llegado a él:

«...Me inclino a creer que, hace mucho tiempo, los espíritus superiores lo entrevieron sin otra guía que las luces naturales de la razón».

Era el método que los antiguos aplicaron a las ciencias más fáciles, la aritmética y la geometría.

Continúa Descartes diciendo:

«...Y nosotros ¿no nos servimos de una especie de aritmética, denominada álgebra, que consiste en operar sobre un número lo que los antiguos operaban sobre figuras?»

«...Aunque en este tratado hable con frecuencia de figuras y números, el que siga con atención mi pensamiento observará fácilmente que no es mi objetivo hablar de las matemáticas ordinarias, sino exponer otra ciencia de la que aquéllas son la envoltura mas bien que las partes»

«...Si he hablado de envoltura no es que yo quiera encerrar en ella y sellar esta ciencia para apartarla de las miradas del vulgo; al contrario, quiero vestirla y adornarla de tal suerte que esté al alcance de todos»

«...La denominación de esta ciencia no consiste en un nombre extranjero (se refiere al extraño nombre de álgebra), sino en el antiguo y usual de MATEMÁTICAS UNIVERSALES».

En 1629 se instala en Holanda donde residirá salvo breves interrupciones hasta 1649, llevando una vida solitaria y retirada, consagrada totalmente a la construcción de su sistema filosófico.

Es en 1637, cuando publica en Leyden su «Discurso del Método», seguido de los tres apéndices «La Dioptrique», «Les Meteores» y «La Geometrie», como prueba y confirmación de lo satisfactorio de su método.

Pero antes de ocuparnos con detenimiento de «La Geometrie», veamos qué lecturas e influencias matemáticas tuvo o pudo tener:

En cuanto a la Geometría, Descartes conocía bien, sin duda, las obras de Euclides, Apolonio, Arquímedes y Pappus. Admiraba el rigor de la geometría griega, pero repetidas veces se queja de su «aristocratismo», de la ausencia de método. Cada problema requiere una idea feliz y esto es muy fatigoso y nunca se tiene la seguridad de resolverlo. Detesta también (al contrario de Fermat) su esteticismo y la falta de motivación práctica. Llega a pensar que los «antiguos» escondían a propósito su método (el análisis) para presentarnos los productos en forma sintética. Esta es una opinión muy extendida en la época. Vieta, Wallis, Barrow y otros matemáticos la comparten. Descartes, en su Regla IV (Reglas para la dirección del espíritu), dice: «Así como muchos artesanos ocultan el secreto de sus inventos, Pappus y Diofanto, temiendo tal vez que la facilidad y la sencillez de su método le hicieran perder su valor, prefirieron, para excitar la admiración de todos, presentarnos como productos de su ingenio algunas verdades estériles muy sutilmente deducidas, en lugar de mostrar el método de que se servían». (Ver *González Urbaneja* [1992]).

Pero es en el Álgebra, donde Descartes ve agudamente el futuro del desarrollo matemático. Conoce los libros de Diofanto y los resultados de los algebristas italianos Tartaglia, Cardano y Ferrari.

Nosotros pensamos que conocía también la obra algebraica de su compatriota François Viète (1540-1603). (Descartes negará que conociera la obra de Viète antes de la creación de su método).

Viète es el primer matemático que usa letras como coeficientes en las ecuaciones. En su obra *In artem analyticem isagoge* (Tours, 1591) desarrolla y distingue la «logistica speciosa» de la «logistica numerosa». Estudia en los griegos, los métodos del análisis y de la síntesis y expresa timidamente la posibilidad de construir unas *Mathematicas Universalis* en la que *Quod est, nullum non problema solvere*: «No hay problema que no pueda ser resuelto».

Pero es René Descartes quien carga de poder esta idea, dándose cuenta de la superioridad de los métodos algebraicos, de la generalidad de éstos y de su valor en la mecanización del proceso de razonamiento y en la reducción del trabajo en la resolución de problemas.

La geometría

Publicada como apéndice del «Discurso del Método», consta de tres libros de muy difícil lectura, como el propio Descartes advierte:

«Hasta aquí he intentado que cualquier persona pudiera entender mis escritos; sin embargo, temo que este tratado no podrá ser leído sino por aquellos que ya tienen conocimiento de lo que se expone en los estudios de Geometría, pues, considerando que incluyen verdades muy correctamente demostradas que me han sido de gran utilidad, he considerado superfluo repetirlas».

Descartes no es el único matemático de la época que omite las demostraciones de sus resultados y el recelo que sienten a la hora de comunicar las técnicas con las que resuelven los problemas será la causa de múltiples controversias sobre la autoría de los teoremas.

En 1649, *Van Schooten* publica una edición en Latín comentada y explicada. Esta es la edición que leerá Newton, quien confiesa tenerla que leer muchas veces para comprenderla.

En el LIBRO PRIMERO: «Sobre los problemas que pueden construirse empleando solamente círculos y líneas rectas», comienza diciendo Descartes que todos los problemas de la Geometría pueden ser reducidos fácilmente a términos tales que no sea necesario posteriormente para construirlos, sino conocer la longitud de algunas líneas.

A continuación, «aritmetiza» las operaciones geométricas que usaban los geómetras griegos.

«Así como la Aritmética se basa en cuatro o cinco operaciones, a saber, la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces (que puede ser considerada como una especie de división), de igual forma no es necesario en Geometría para llegar a conocer las líneas que se buscan y para disponerlas a ser conocidas, sino añadir o sustraer otras, o bien tomando una línea que consideraré como la unidad, para relacionarla tanto más fácilmente con los números (pudiendo ser tomada generalmente a discreción), y teniendo otras dos líneas, encontrar una cuarta línea que sea a cada una de las líneas dadas como la otra es a la unidad (lo cual es lo mismo que la multiplicación); o, en segundo lugar, encontrar una cuarta línea que es a una de estas dos como la unidad es a la otra (lo que equivale a la división); o finalmente, hallar una, dos o varias medias proporcionales entre la unidad y alguna otra línea (lo cual es equivalente a la obtención de la raíz cuadrada, cúbica, etc...).

No temeré introducir estos términos en la Geometría con el fin de hacerme más inteligible».

¿Por qué tendría que temer Descartes este intento de aritmetizar la Geometría?. No olvidemos que en esta época había serias resistencias, por parte de muchos matemáticos y no matemáticos (como Hobbes), a que la bella, elegante y *rigurosa* Geometría de los griegos quedara contaminada por la prosaica, pragmática y *no rigurosa* Aritmética. El filósofo Thomas Hobbes, aunque sólo fue una figura menor en matemáticas, hablaba sin embargo en nombre de muchos matemáticos cuando se oponía a «todos los que aplican su álgebra a la geometría». Hobbes decía que esos algebristas confundían los símbolos con la geometría y describía la obra de John Wallis sobre el tratamiento algebraico de las cónicas como un libro canallesco y como un «amasijo de símbolos».

Muchos matemáticos, incluidos Blaise Pascal e Isaac Barrow hicieron objeciones al uso del álgebra porque no tenía una fundamentación lógica e insistieron en los métodos y demostraciones geométricas.

A continuación, Descartes da el fundamental paso al Algebra, al uso de letras que permitirán, al dotar de una notación ágil a la Geometría, salir de la parálisis en la que se encontraba.

Como dice Boyer, este libro es el primer texto matemático que un estudiante actual de álgebra puede estudiar sin encontrarse con dificultades de notación:

— Usa las primeras letras del alfabeto para los parámetros constantes.

— Las últimas letras para designar las incógnitas.

— Los símbolos germánicos + y - para la adición y sustracción.

— Interpreta a^2 y a^3, no como un área y un volumen respectivamente sino también como segmentos.

— Abandona el principio de homogeneidad y así, Descartes puede concebir la expresión $a^2.b^2$-b de la siguiente manera:

«Uno debe considerar la cantidad $a^2.b^2$ dividida una vez por la unidad (es decir, el segmento de longitud unidad), y la cantidad b multiplicada dos veces por la unidad».

Seguidamente nos da su método para acceder a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas:

«Sí, pues, deseamos resolver un problema, inicialmente debe suponerse efectuada la resolución, dando nombre a todas las líneas que se estimen necesarias para su construcción, tanto a las que son desconocidas como a las que son conocidas. A continuación, sin establecer distinción entre las líneas conocidas y las desconocidas, debemos descifrar el problema siguiendo el orden que muestre de modo más natural las relaciones entre estas líneas, hasta que se identifique un medio de expresar una misma cantidad de dos formas: esto es lo que se entiende por una ecuación, pues los términos de una de estas expresiones son iguales a los de la otra. Deben hallarse tantas ecuaciones como líneas desconocidas se han supuesto. Pero si no se logra ésto y, no obstante, no se ha omitido consideración alguna de lo especificado en el problema, esto testimonia que el problema no está completamente determinado...

...De esta manera pueden reducirse todas las cantidades desconocidas a una sola, siempre que el problema pueda ser construido mediante círculos y líneas rectas o por medio de secciones cónicas, o también por medio de cualquier otra línea curva de grado no superior al tercero o cuarto. Pero no me detengo en la explicación detallada de esto, pues os privaría del placer de aprender por vosotros mismos y de la utilidad de cultivar vuestro espíritu al ejercitarse en estas cuestiones, que es, según mi opinión, el principal resultado que se puede obtener de esta ciencia. *Pues no creo que exista entre estas cuestiones alguna tan difícil que no puedan solucionar aquellos que sean un poco más versados en Geometría común y en el Algebra si prestan atención a cuanto se diga en este tratado*».

Ovservemos que en este último párrafo Descartes nos confía la manera de resolver cualquier problema de Geometría y sin necesidad de «la idea feliz».

Descartes «democratiza» la Geometría, al pasar del mundo de las formas al de los números. Esto supone una mecanización de los procesos mentales a seguir para la resolución de un problema.

Es comprensible el entusiasmo de Descartes que le hace extrapolar a otras áreas del saber los resultados que sí alcanza en la Geometría y que le hace sufrir el espejismo que producen las matemáticas en ciertas naturalezas ardientes que ansían la totalidad: Ramón Llull, Leibniz. (A mediados de nuestro siglo XX, el colectivo de matemáticos franceses BOURBAKI padece la misma alucinación y hace de la lógica y de las estructuras algebraicas la nueva panacea universal. Cuando Dieudonné, miembro fundador de Bourbaki, al grito de «A bas Euclides» hizo desaparecer la geometría clásica de la enseñanza elemental, seguramente trataba de imitar a su ilustre compatriota René Descartes, aunque, pensamos, con bastante menor fortuna).

Continuando con el texto del Libro Primero, Descartes nos hace ver cómo tendremos que hacer cuando el problema sea «plano».

«Si el problema puede ser solucionado mediante la Geometría ordinaria, esto es, mediante el uso exclusivo de líneas rectas y círculos trazados sobre una superficie plana, cuando la última ecuación haya sido resuelta no nos encontraremos sino un cuadrado desconocido igual al resultado de multiplicar su raíz por alguna cantidad conocida y sumar o restar alguna otra cantidad conocida».

Esto es, una ecuación de segundo grado. Ahora bastará saber cómo se resuelve geométricamente una tal ecuación.

En el Libro II de los «Elementos» de Euclides, y en las proposiciones 5 y 6 se resuelven geométricamente unos problemas equivalentes a casos particulares de una ecuación de segundo grado. Euclides va a necesitar del Libro V, una vez justificada rigurosamente la razón entre magnitudes inconmensurables, para resolver en toda su generalidad la ecuación de segundo grado en el Libro VI, y siempre de forma geométrica.

Descartes resuelve también este problema, ayudándose de la conocida fórmula algebraica de resolución de una ecuación de segundo grado, simplificando grandemente la obra de Euclides, pero *a costa de aceptar intuitivamente el concepto de número irracional*.

Finalmente, Descartes pone «a prueba» su método al enfrentarse y resolver uno de los problemas más difíciles, no completamente resuelto, que los griegos habían legado: EL PROBLEMA DE PAPPUS. (Ver Descartes [1986]).

En el LIBRO SEGUNDO, Descartes se pregunta «Sobre la naturaleza de las líneas curvas» y «Sobre las líneas curvas que pueden admitirse en Geometría»:

«Los antiguos distinguieron con toda perfección la existencia de tres clases de problemas en Geometría: *planos, sólidos* y *lineales*; es decir, unos pueden ser construidos con sólo trazar líneas rectas y círculos; los segundos, por el contrario, no pueden serlo sin realizar la introducción de alguna sección cónica; finalmente, los terceros requieren el empleo de una línea más compleja. Pero no logro evitar la extrañeza que me produce el que, además de esto, no llegasen a distinguir diversos grados entre estas líneas más complejas, al igual que no logro comprender por qué las han denominado Mecánicas y no Geométricas. Pues si pensamos que las han denominado de tal modo porque es necesario utilizar algún instrumento para trazarlas, entonces deberíamos rechazar por la misma razón los círculos y las líneas rectas, puesto que no se trazan sobre el papel, sino utilizando la regla y el compás que también pueden ser considerados como máquinas. Tampoco puede explicarse por qué los instrumentos utilizados para trazarlas, siendo más complejos que la regla y el compás, no pueden llegar a alcanzar la misma precisión; en tal caso, deberían considerarse fuera de la Mecánica, pues la precisión de las obras realizadas por la mano es aún más buscada en ella que en la Geometría, donde exclusivamente se desea lograr precisión en el razonamiento, pudiendo obtenerse tanta perfección en relación con estas líneas como con las que son más simples...».

Descartes se está refiriendo aquí a la conocida clasificación de problemas hecha por Pappus. La extrañeza de Descartes es la misma que siente al advertir la decidida intención no utilitaria de la geometría griega. La visión cristiana y utilitarista de Descartes le impide contemplar la cuestión con perspectiva histórica. Algún autor de hoy día, como *Richard W. Knorr* («The ancient tradition on geometric problems»), para no sentir tal extrañeza y también, pensamos, con falta de perspectiva histórica, simplemente niegan que existiesen leyes de prioridad sobre los métodos de resolución de los problemas geométricos en la Grecia Antigua.

Sigue diciendo Descartes:

«Pero me parece totalmente claro que si entendemos, como generalmente se hace, por *geométrico* lo que es preciso y exacto y, en segundo lugar, por *mecánico* lo que no lo es; y, asimismo, si consideramos la Geometría como una ciencia que enseña en general a conocer las medidas de todos los cuerpos, no existe razón alguna para excluir de la misma el estudio de las líneas más complejas y no el de las más simples, *con tal de que puedan imaginarse descritas por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos y en el que los últimos vienen determinados por los anteriores.*

Descartes llega por fin, a su importante clasificación de las curvas:

«...Podría exponer en este lugar otros medios para trazar y concebir líneas curvas que fuesen cada vez más complejas hasta el infinito. Pero, para comprender a la vez todas aquellas que se dan en la naturaleza y para clasificarlas por orden según ciertos tipos, no conozco nada más apropiado que afirmar que todos los puntos de las que pueden llamarse geométricas, es decir, de aquellas que caen bajo alguna medida precisa y exacta, *tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea recta y esta relación puede ser expresada por alguna ecuación válida para todos los puntos*».

Así pues, las curvas geométricas o «aceptables» son aquellas que pueden expresarse mediante una única ecuación algebraica (de grado finito) en x y en y. Hecho de fundamental importancia que requiere algunas consideraciones.

1ª) Que las curvas aceptables sean las que admitan una ecuación algebraica, es el comienzo *de la eliminación del requisito de constructibilidad como criterio de existencia.*

Poco tiempo más tarde, Leibniz amplía el criterio de aceptabilidad y emplea las palabras *Algebraica* y *Trascendente* en vez de los términos Geométrica y Mecánica. De hecho Descartes y sus contemporáneos trabajaron con curvas no algebraicas y entre ellas, la importante, desde el punto de vista histórico, *Cicloide* y su asociada, la *Sinusoide.*

2ª) Al ampliar el concepto de curva admisible, Descartes dio un paso fundamental. No sólo admitía curvas anteriormente rechazadas sino que dada cualquier ecuación algebraica en x e y podía obtener nuevas curvas.

3ª) La clasificación cartesiana por parejas de grados seguidos parecía venir confirmada por consideraciones de tipo algebraico. Se sabía que la resolución de la cuártica podía reducirse a la de su correspondiente cúbica resolvente. Descartes extrapoló este resultado, lo cual es falso. (Ver *Boyer*: (1987) pág. 431).

4ª) Newton en su *Arithmetica Universalis* (1707), después de aceptar con gozo el que «los modernos geómetras, avanzando todavía mucho más allá (de las curvas planas, sólidas y lineales de los griegos) han recibido en la Geometría todas las líneas que pueden expresarse con ecuaciones», manifiesta sus discrepancias con la clasificación de las curvas por medio del grado de su ecuación. Considera que es, lo que él llama, la «Descripción» de una curva y no su ecuación la que le confiere su grado de sencillez geométrica. No es la simplicidad de una ecuación sino la simplicidad de su descripción lo que determina nuestra elección de ciertas curvas para la Construcción de Problemas. Así por ejemplo la ecuación de una parábola es más sencilla que la de un círculo, y sin embargo, el círculo por razón de su más sencilla construcción, es preferible a aquella.

Descartes y la geometría analítica

En nuestros libros de texto, la geometría analítica se relaciona inmediatamente con el nombre de Descartes. Sorprende, por tanto, descubrir en una lectura de su «Geometría», que en cualquier caso, la geometría analítica tal y como la conocemos hoy difiere en mucho de la que allí encontramos.

En la «Geometría» no hay nada sistemático acerca del uso de las coordenadas rectangulares (¡las coordenadas cartesianas!) y lo que se usa es un sistema de coordenadas oblicuas, especial para cada problema.

Dice Morris Kline: «El acento que la posteridad ha puesto sobre *La Geometrie* no es el que interesaba a Descartes. Aunque la idea sobresaliente para el futuro de las matemáticas era la de asociar ecuación y curva, para Descartes esto no era mas que un medio para un fin, a saber, la resolución de problemas de construcciones geométricas. El énfasis de Fermat en las ecuaciones de lugares geométricos es, desde el punto de vista moderno, más oportuno». Y sin embargo, sigue diciendo Kline: «El verdadero descubrimiento, la potencia de los métodos algebraicos, corresponde a Descartes, que sabía que su método estaba suplantando a los antiguos. Aunque la idea de asociar ecuaciones a las curvas es más clara en Fermat que en Descartes, el trabajo de aquél es fundamentalmente un logro técnico que completa la obra de Apolonio y explota la idea de Vieta de la representación lineal. El método de Descartes es de aplicación universal y potencialmente aplicable también a las curvas trascendentes».

Es en la Teoría de Funciones donde el potente método cartesiano combinado con el cálculo infinitesimal, dará como fruto el extraordinario desarrollo de las matemáticas y de la física que se avecina. Isaac Newton, gran artífice de este desarrollo, podrá permitirse el lujo de no trabajar los «Elementos» de Euclides. Leerá directamente «La Geometrie» de Descartes y compartirá con éste el entusiasmo para-religioso en la creencia de poder resolver cuanto problema físico-matemático se le presentara.

Descartes y la geometría griega

Empezamos este escrito, aceptando el calificativo de «menor» para juzgar las habilidades técnicas de Descartes como matemático. Parecería pues contradictorio afirmar que su influencia sobre los matemáticos posteriores fue inmensa, y que con él empieza una nueva matemática, la matemática de la revolución científica y de la era moderna. Oswald Spengler, matemático de profesión y autor de «La decadencia de Occidente», «best seller» de los años veinte en Europa, en el capítulo primero titulado «Sobre los números», afirma: «...No hay una Matemática; hay muchas Matemáticas. Lo que llamamos Historia de la Matemática, supuesta realización progresiva de un ideal único e inmutable, es en realidad, si damos de lado a la engañosa historia superficial, una pluralidad de procesos cerrados en sí, independientes, un nacimiento repetido de distintos y nuevos mundos de la forma, que son incorporados, luego transfigurados y, por último, analizados hasta sus elementos finales; un brote puramente orgánico, de duración fija, una fluorescencia, una madurez, una decadencia, una muerte. No nos engañemos, el *espíritu antiguo* creó su matemática casi de la nada. El *espíritu occidental*, histórico, había aprendido la matemática antigua, y la poseía —aunque sólo exteriormente y sin incorporarla a su intimidad—; hubo, pues, de crear la suya modificando y mejorando, al parecer, pero en realidad aniquilando la matemática euclidiana, que no le era adecuada.

Pitágoras llevó a cabo lo primero; *Descartes* lo segundo».

Descartes rompe con los modos y los preceptos de la matemática de los griegos y especialmente rompe con el veto aristotélico a lo infinito.

Ciertamente, Descartes vive en una época convulsa en donde de un *mundo cerrado* se ha pasado a un *universo infinito*, en la que han desaparecido las certezas y en la que el escepticismo y la duda son la norma.

En una especie de huída hacia adelante, Descartes va a dudar de todo, excepto de las matemáticas y de Dios; ese Dios cristiano, dotado positivamente de los atributos de la infinitud, que le va a *garantizar*, los razonamientos claros y distintos que va a alcanzar con su Método, concebido a partir de las matemáticas, de las matemáticas de los griegos.

En la mentalidad griega no cabía la idea de infinito como perfección. Aristóteles niega rotundamente que la infinitud signifique perfección. Prefiere afirmar que Dios es inextenso y dejar la infinitud para la imperfección de la materia, en la que no se da nunca en *acto*, sino sólo en *potencia*.

Es *S. Agustín* (354-430 d.c.) quien primero se rebela contra el precepto aristotélico: «Todo número está caracterizado por su propiedad, así que dos cualesquiera son distintos. Por tanto los números son distintos, y tomados singularmente son finitos, y tomados todos juntos son infinitos. Dios, entonces, a causa de su infinitud los conoce todos. ¿Cómo sería posible que la ciencia de Dios conociese unos números e ignorase otros? ¿El que sostuviese ésto no sería un demente?» (*De Civitate Dei*).

Es previsiblemente por influencia agustiniana que Galileo en su «Diálogo sobre los máximos sistemas del mundo» (1632) escribe lo siguiente: «Al conocimiento se puede acceder de dos maneras: *intensiva* y *extensiva*. Extensiva, esto es en cuanto a la multitud de los inteligibles, que son infinitos, el conocimiento humano es como nulo; porque aún cuando comprendiese mil proposiciones, con respecto a la infinidad es como un cero ...Y tales son las ciencias matemáticas, la geometría y la aritmética, de las cuales el intelecto Divino sabe infinitas proposiciones, *porque las sabe todas*, pero de aquellas pocas comprendidas por el intelecto humano, creo que su entendimiento iguale a la divina en la certeza objetiva».

La vuelta a San Agustín es una característica de la época. Ante lo desastroso de la alianza con Aristóteles, se fragua un gran movimiento agustiniano católico. El *Oratorio* del Cardenal Berulle y el *jansenismo* de Port-Royal (Pascal, Arnauld) son una muestra de ello. Con ambas corrientes tuvo Descartes estrecha relación y son notorias las influencias agustinianas que tuvo en la concepción de su Método, que pretende comprender y resolver TODAS cuantas proposiciones se le presenten a su intelecto. Esto es lo que se le revela en aquella noche del 10 de noviembre de 1619, en un febril duerme-vela junto a una estufa de una pensión alemana. Empleará toda su vida en desarrollar esta idea.

Insistimos pues, en que el concepto que marca las diferencias entre la geometría griega y la geometría cartesiana es el de infinito.

Dice Koyré en sus «Entretiens sur Descartes»: «A la antigua lógica deductiva de Aristóteles, lógica de la clasificación y del concepto, lógica de lo finito, Descartes con sus *Reglas para la dirección del espíritu* le opone una lógica nueva, intuitiva, lógica de la relación y del juicio, basada en la primacía intelectual del infinito».

Finalmente, pensamos que otra fundamental diferencia en la concepción y finalidad de las dos geometrías, es su *utilidad*.

Descartes no acepta que el principal motivo de esa construcción mental que es la geometría, sea el del placer estético. Descartes exige un uso práctico de la misma. Hay numerosas referencias en su obra, que permiten hablar de esta exigencia que le impone a las matemáticas: *Servir al bien común*. Por una parte, es la osamenta de un *Método* con el que se conseguirá «bien conduire sa raison» en cualquier situación de la vida que se le presente al hombre. La vía «segura», el camino por el cual la mente humana pueda avanzar sin perderse en la selva sin límites de sus posibilidades. Por otra, es la herramienta indispensable para el logro del *progreso técnico*, que mejore las condiciones de vida de la humanidad.

Y todo ello para mayor gloria de Dios, garante de todo el proceso y pieza clave en todo el pensamiento cartesiano.

Terminaremos con una frase significativa al respecto extraída de su «Discurso del Método»:

«Es posible alcanzar un conocimiento que es muy útil en la vida y, en lugar de esa filosofía especulativa que se enseña en las escuelas, podemos encontrar una filosofía práctica mediante la cual, conociendo la fuerza y la acción del fuego, del agua, del aire, de las estrellas, de los cielos y de todos los demás cuerpos que nos rodean, tan nítidamente como conocemos el oficio de nuestros artesanos, podamos de la misma manera utilizarlos en todos aquellos usos para los que están adaptados y, por tanto, convertirnos en los dominadores y poseedores de la naturaleza».

BIBLIOGRAFÍA

ALQUIE, FERDINAND (1988): Descartes l'homme et l'oeuvre. Hatier.

BOYER, CARL (1987): Historia de la Matemática. Al. Universidad.

DESCARTES, RENE (1986): Discurso del Método, Dióptrica, Meteoros y Geometría. Traducción: Guillermo Quintás. Ediciones Alfaguara.

DESCARTES, RENE (1990): Reglas para la dirección del espíritu. Editorial Porrúa.

GARIN, EUGENIO (1989): Descartes. Editorial Crítica.

GONZÁLEZ URBANEJA, PEDRO (1992): Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Alianza Universidad.

KLINE, MORRIS (1992): El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días. Tomo I. Alianza Universidad.

KOYRE, A. (1989): Del mundo cerrado al universo infinito. Ed. Siglo XXI.

KOYRE, A. (1944): Entretiens sur Descartes. Brentano's.

LIATKER, Y. (1990): Descartes. Editorial Progreso.

LAS TÉCNICAS DEL CÁLCULO: FERMAT, WALLIS Y ROBERVAL

Pedro Miguel González Urbaneja
Profesor de Matemáticas
I.B. San José de Calasanz.
Barcelona

Fermat es uno de los más grandes genios que haya ilustrado Francia

Cauchy, 1839.

1. Introducción

1.1. Naturaleza del cálculo del siglo XVII.

La Matemática del siglo XVII presenta una inflexión radical respecto a la Matemática clásica griega. El paradigma estilístico y demostrativo que impuso la filosofía platónica, cuyo exponente más representativo es la enciclópedica obra de Euclides «Los Elementos» es violado por el principio de que lo que importa es la consecución de nuevos resultados, aunque sea sin expresión rigurosa. Se impone el lema «primero inventar, después demostrar». Bajo el nuevo enfoque se trata de crear, descubrir, no de expresar demostrativamente, axiomáticamente.

La Matemática griega es ponderada por su alto grado de rigor y es la fuente de formación y de inspiración de los matemáticos, pero se abandonan y critican sus métodos porque no son heurísticos. En efecto, el camuflaje permanente del infinito convierte a casi toda la Matemática griega en Geometría y el tratamiento absolutamente riguroso de los problemas infinitesimales requiere un subterfugio: el método de exhaución de Eudoxo, que obliga a tratar cada problema de forma particular, dependiendo de su estructura geométrica concreta, además de precisar un método complementario para prever los resultados. Por eso en el siglo XVII, tras la recuperación, reconstrucción y asimilación del legado clásico, se impuso un nuevo clima psicológico y una nueva actitud hacia los problemas matemáticos, que permitió el desarrollo de multitud de nuevas técnicas infinitesimales, ya que era general el deseo de encontrar nuevos métodos para resolver rápidamente los problemas que las nuevas condiciones sociales planteaban, métodos que permitieran obtener de forma directa los resultados, aunque hubiera que echar por la borda el rigor.

Las especulaciones de la Escolástica medieval sobre el infinito y el continuo propiciaron que los matemáticos posteriores no fueran refractarios a la utilización de las técnicas infinitesimales. El Álgebra simbólica de Vieta y Descartes aplicado al material del Análisis geométrico recuperado de los antiguos, facilitó el desarrollo de técnicas formales que permitieron métodos de rápido descubrimiento más que demostraciones rigurosas. Finalmente la representación algebraica de curvas, vía la Geometría Analítica de Fermat y Descartes, propició la rápida y sencilla formulación para la investigación de multitud de problemas de áreas, volúmenes, rectificación, centros de gravedad, tangentes, máximos y mínimos, etc.

Con esta rica miscelánea de ingredientes matemáticos (problemas arquimedianos, técnicas algebraicas de Cálculo, Geometría Analítica y sobre todo el libre uso del concepto intuitivo de infinito), el siglo XVII produjo una impresionante profusión de nuevos resultados, a base de nuevas técnicas y métodos infinitesimales, que provocaron una progresiva aritmetización de problemas que en la antigüedad habían tenido un enfoque estrictamente geométrico.

En particular, respecto del Cálculo Infinitesimal, se abre al comienzo del siglo XVII una etapa empírica, que cubre los dos primeros tercios de este siglo, en los que manejando unos elementos con un estatuto ontológico no muy bien definido («indivisibles», «infinitamente pequeños», «incrementos evanescentes», «cantidades despreciables», etc.), se desarrollan multitud de técnicas y métodos infinitesimales, que contribuyen a resolver de forma sorprendente antiguos y nuevos problemas, bajo la acción de profundas intuiciones, que supliendo la falta de rigor, evitan las contradicciones y el absurdo donde podía haber llevado tanto desenfreno conceptual, y que conducen, bajo una visión de generalización y unificación, a la destilación de un algoritmo universal, al descubrimiento simultáneo del Cálculo Infinitesimal por parte de Newton y Leibniz.

Bajo esta perpectiva, resulta que los matemáticos que desarrollaron el germen del Cálculo Integral, habiendo bebido en las fuentes de los grandes tratados conocidos de Arquímedes, (que ahora tenían a su disposición), donde el método de exhaución presidía todo el desarrollo con un implacable rigor, al intentar soslayar la rigidez de la exhaución mediante artificios geométricos que les condujeran a procedimientos heurísticos de rápido descubrimiento, se aproximan de forma sorprendente a la técnica del método mecánico del «Método» de Arquímedes. Esto es particularmente cierto en el caso de B.Pascal (que aplica ingeniosamente su «método de la balanza», llamada «balanza de Arquímedes» en los famosos problemas sobre la cicloide), y sobre todo, en el caso de Cavalieri, con sus indivisibles.

Aunque el siglo XVII no dispuso del «Método» de Arquímedes, el cúmulo de analogías es evidente, lo que hace comprensible el que muchos matemáticos de esta época estuvieran convencidos, de que Arquímedes disponía de un método especial de descubrimiento.

A comienzos del siglo XVII aparecen métodos infinitesimales que modifican y simplifican los métodos de Arquímedes, intentando obviar la necesidad de la doble reducción al absurdo de la exhaución. Con el uso de los *indivisibles* y los *infinitamente pequeños* se resiente el rigor en las demostraciónes y van desarrollándose consideraciones sobre límites basadas en la incipiente Teoría de Números.

Para Cavalieri un área estaba formada por un número infinito de líneas paralelas o *indivisibles*, que al compararlos con los recursos algebraicos de que disponía, podía, por una parte, ratificar los resultados clásicos (lo que daría seguridad a su método), y por otra, obtener cuadraturas y cubaturas no conocidas por los antiguos. Sorprende la estrecha analogía entre el «Método de los indivisibles» y el «Método mecánico» de Arquímedes. Pero Arquímedes tenía muy claro y así lo manifiesta en el preámbulo del «Método» que «la investigación obtenida por este método no implica verdadera demostración», por eso ha de confirmar rigurosamente lo que descubre mediante el método de exhaución. La analogía está en la primera etapa de la creación, pues desde luego Cavalieri ya no necesita recurrir al recurso de la palanca para sumar sus indivisibles, el Álgebra le facilita esta operación y proporciona unas posibilidades de generalización imposibles de lograr con la Geometría griega.

El excesivo abuso de la intuición inmediata de las magnitudes geométricas y la violación del principio de homogeneidad espacial dimensional con los indivisibles, provocaba que no hubiera en el ambiente matemático un consenso acerca del valor demostrativo de los métodos utilizados. Algunos concebían el método de los indivisibles como simplemente heurístico y creían necesaria una demostración por exhaución (punto de vista arquimediano). En general se consideraba que los resultados obtenidos mediante indivisibles podían justificarse fácilmente con la exhaución, pero no era necesario porque concebían el nuevo método inventivo no más que como un lenguaje diferente, un estilo distinto de expresar unos mismos conceptos. Saben que los resultados son correctos porque saben y pueden probarlos rigurosamente mediante los métodos de Arquímedes. Vamos a reproducir algunas frases representativas de lo que se acaba de exponer:

J. KEPLER («Nova stereometria doliorum vinariorum» de 1615):

[...]. *Podríamos obtener demostraciones perfectas de los libros de Arquímedes, a nosotros no nos repele la espinosa lectura de ellos.*

P. FERMAT (De aequationum localium .... in quadrandis infinitis parabolis et hiperbolis [Tratado sobre cuadratura] de 1658):

[...]. *Basta hacer esta observación* [sobre las condiciones para poder aplicar el método de Arquímedes] *una vez, para no obligarse a recordar y a insistir constantemente sobre un artificio bien conocido de todos los geómetras..., Así alcanzamos la conclusión,* [véase sección 2.7.1] *que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes.* [...].

B. CAVALIERI (Geometría Indivisibilibus continuorum...) de 1635:

[...]. *Se podría demostrar todo ésto utilizando las técnicas arquimedianas, pero supondría un gran esfuerzo.*

B. PASCAL (Lettre à Carcavi,):

[...]. *He querido hacer esta advertencia para mostrar que todo lo que está demostrado por las verdaderas reglas de los indivisibles, se demostrará también con el rigor y a la manera de los antiguos* [como Arquímedes]*: y que así ambos métodos no difieren más que en la manera de hablar.*

I. BARROW (Lectiones Geometricae de 1670):

[...]. *Se podría alargar mediante un discurso apagógico* [mediante la doble reducción al absurdo del método de exhaución], *pero ¿para qué?*

J. WALLIS (Arithmetica infinitorum de 1656):

[...]. *Este procedimiento es altamente heterodoxo, pero puede verificarse mediante el bien conocido método apagógico de figuras inscritas y circunscritas, lo que es superfluo, porque la frecuente iteración produce náusea en el lector. Cualquiera ducho en Matemáticas puede realizar tal prueba.*

C. HUYGENS (Horologium oscillatorium de 1673):

[...]. *No es de gran interés el que demos una demostración absoluta, después de haber visto que una perfecta demostración puede ser dada. Concedo que debería aparecer en una forma clara, ingeniosa y elegante, como en todos los trabajos de Arquímedes. Pero lo primero y más importante es el método de descubrimiento mismo.*

Las frases transcritas son muy significativas para comprender la enorme influencia de Arquímedes sobre los matemáticos del siglo XVII, pero sirven sobre todo para mostrar la primacía de la argumentación heurística sobre la apodíctica, de la ponderación del método de descubrimiento por encima de la expresión rigurosa.

El método de lo indivisibles recibió acerbas críticas dirigidas contra su propia naturaleza, debido al problema que plantean sobre la estructura del continuo, toda vez que contradecían la doctrina aristotélica del continuo, como divisible en partes del mismo tipo que la magnitud original, divisibles de nuevo indefinidamente. Por eso Fermat, Roberval, Wallis y otros, recogen estas críticas e intentan modificar los procedimientos de Cavalieri, para evitar los errores de dimensionalidad, manifestando que no se toman segmentos para la suma de todas las ordenadas, sino rectángulos de anchura infinitesimal, «infinitesimales», lo que desde el punto de vista del rigor no representa un gran progreso, pero salva, mejor que peor, la homogeneidad. Con ello se abre la segunda etapa del Cálculo Infinitesimal, sustituyendo los indivisibles por los «infinitamente pequeños» de igual dimensión geométrica espacial que la figura a la que pertenecen. Como no se sabe muy bien lo que es una magnitud infinitesimal ni lo que debe entenderse por una suma de infinitos sumandos, el rigor brilla por su ausencia, pero como contrapartida la fecundidad de los nuevos métodos fue asombrosa.

1.2. Análisis temático del cálculo del siglo XVII.

El Cálculo del siglo XVII estuvo esencialmente vinculado a la investigación sobre curvas. Se insistió inicialmente en las curvas conocidas por los griegos («las cónicas de Menecmo y Apolonio», «la cuadratriz de Dinostrato», «la concoide de Nicomedes», «la cisoide de Diocles», «la hipopede de Eudoxo», «la espiral de Arquímedes», etc), pero en seguida esta colección se vio complementada por multitud de nuevas curvas, entre las que sobresalen «las parábolas, hipérbolas y espirales generalizadas o de orden superior» (llamadas de Fermat), «el caracol de Pascal», «el folium de Descartes o galande de Barrow», «la curva de Lamé», «la espiral logarítmica», «la kappa-curva», «la curva tangentoidal», y ante todo la reina de todas las curvas: «la cicloide».

Contrariamente al punto de vista estático que fue casi exclusivo (salvo quizá en el estudio de la espiral de Arquímedes) en el tratamiento de las curvas en Grecia, en el siglo XVII se abre paso en seguida el punto de vista cinemático, de manera que desde el principio los problemas de diferenciación se presentan no sólo a propósito de tangentes sino también de velocidades. Particularmente el estudio de la espiral logarítmica y de la cicloide contribuye a la simbiosis de los métodos geométricos con los cinemáticos. En efecto, una curva se puede considerar como «la trayectoria de un punto en movimiento» y la tangente como la recta que «pasa por dos posiciones consecutivas». El principio de la composición de movimientos y más precisamente de la composición de velocidades permite a Torricelli, Roberval y otros, disponer de un método general de obtención de tangentes, para curvas que se pueden definir cinemáticamente.

Y todo ello a pesar de Descartes que trataba desdeñosamente de «mecánicas» a las curvas no algebraicas, y pretendía su exclusión de la Geometría. Para curvas algebraicas, Descartes da un método de obtención de tangentes, basado en consideraciones sobre raíces dobles, bajo un punto de vista en absoluto diferencial, independiente del concepto de límite y que es el de la Geometría Algebraica. Algoritmos formales pseudo-diferenciales fueron desarrollados para facilitar la obtención de las raíces dobles del método de Descartes con la regla de Hudde y adelantando la derivación implícita de funciones algebraicas con la regla de Sluse.

Pero no es ésta la forma imperante de pensar y hacer. En efecto, los métodos algebraicos sufrirán un cierto eclipse, absorbidos de forma provisional por los métodos cinemático-diferenciales de Roberval, Fermat y Barrow. Se defiende que las curvas definidas cinemáticamente son como las demás, no hay por qué hacer distinción, todas pueden estudiarse por los mismos métodos. La variable «tiempo» en los trabajos de Barrow se convierte en una variable independiente universal de la que dependerá la variación simultánea de varias magnitudes, como base de un Cálculo Infinitesimal de tendencia geométrica, ideas que son el punto de partida de Newton, para quien sus «fluyentes» son las distintas magnitudes funciones de un tiempo, que es un parámetro universal, mientras sus «fluxiones» son las «derivadas» respecto al tiempo, lo que supone la culminación de los métodos cinemáticos.

Otro aspecto decisivo del Cálculo del siglo XVII es que se empieza a intentar una clasificación de los problemas. Los problemas de diferenciación aparecen bajo tres aspectos: velocidades, tangentes y máximos y mínimos. Fermat unifica los tres aspectos e inicia el argumento diferencial de «incrementar la variable independiente» y valorando el correspondiente incremento de la función considerar por primera vez (aunque manteniéndose en el terreno de lo operativo y algebraico) el cociente incremental que definirá la primera derivada. Por ello Laplace y la mayor parte de los matemáticos franceses consideran a Fermat como el verdadero descubridor del Cálculo Diferencial. Coordinados los aspectos vinculados a la *primera derivada*, hay que decir que los relativos a la *segunda derivada* tardarán bastante más en unificarse, lo que llevará a cabo Huygens a propósito de las evolutas y del radio de curvatura de una curva.

Respecto al Cálculo Integral se estudiaban desde la época clásica griega, los problemas de cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad. El siglo XVII ampliará considerablemente el número de cuadraturas y cubaturas en relación con la ingente cantidad de nuevas curvas que se definen, añade la rectificación de curvas y el cálculo de superficies de revolución (en la antigüedad sólo Arquímedes había tratado los casos particulares de la rectificación de la circunferencia en «Sobre la medida del círculo» y la superficie de la esfera en «Sobre la esfera y el cilindro»). Se emprendería una clasificación de los problemas según la naturaleza de la «integral subyacente». Para áreas y volúmenes el paso fundamental lo da Cavalieri con sus indivisibles, donde reconoce que muchos de los problemas resueltos por Arquímedes se reducen a la cuadratura $\int x^n dx$ (área limitada por la curva $y=x^n$ y ciertas ordenadas), para $n=1,2,3$. Sigue inmediatamente el intento de generalizar la cuadratura de Cavalieri para n racional distinto de -1 (para $n=-1$, la llamada cuadratura de la *hipérbola de Apolonio* se tardaría bastante más tiempo en resolver), con una profusión de magníficos resultados sobre cuadraturas de hipérbolas y parábolas generalizadas, algunas obtenidas por indivisibles o infinitesimales, (Roberval, Pascal,...), otras mediante cuadraturas aritméticas (que se basarían en el modelo de la cuadratura de la espiral por Arquímedes) por medio de diversas fórmulas para la suma de las potencias de los primeros enteros obtenidas por consideraciones sobre números poligonales (Fermat) o sobre el triángulo aritmético (Pascal); otras obtenidas empíricamente a base de una buena dosis de inducción incompleta y otras por originales métodos como el de la progresión geométrica de Fermat.

De esta forma todos los problemas sobre áreas y volúmenes pudieron reducirse a cuadraturas. Dos problemas se consideraban equivalentes cuando dependían de la misma cuadratura (por ejemplo Cavalieri demostrará que el problema del volumen de la pirámide y el de la cuadratura de la parábola son equivalentes porque ambos dependen de la cuadratura $\int x^2 dx$). Se disponía por tanto de una forma de clasificar los problemas según el grado de la dificultad de la cuadratura a que daban lugar.

Si a ésto le añadimos que tanto Pascal como Barrow, obtienen mediante consideraciones geométricas resultados asimilables a los métodos de «integración por partes» e «integración por cambios de variable», resulta que los matemáticos del momento pueden resolver ya infinidad de problemas que se reducen a cuadraturas elementales. Todo ello al inmenso precio de dar la espalda al pasado y aceptar el buscar la justificación de los métodos nuevos en la fecundidad de los resultados y no en el argumento riguroso.

Pero todavía quedaban por resolver los arduos problemas de la cuadratura del círculo y de la hipérbola de Apolonio, a lo que se enfocan cieros trabajos de Saint-Vincent, Mercator, Wallis, Gregory y Newton, mediante procedimientos de interpolación indefinida de funciones circulares y logarítmicas, que pronto darán lugar con Newton y Leibniz a los métodos generales de desarrollo en serie. Entre los algoritmos infinitos obtenidos sobresalen los sensacionales descubrimientos de la serie de Mercator para el logaritmo en relación con la cuadratura de la hipérbola:

$$\log(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \ldots,$$

así como el desarrollo de Wallis de 1/2 en producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \ldots$$

y el desarrollo de la serie binomial de Newton:

$$(1-X^2)^{1/2} = 1 - (1/2)X^2 - (1/8)X^4 - (1/16)X^6 - (5/128)X^8 - \ldots$$

ambos en relación con la cuadratura del círculo.

Los problemas de la rectificación de curvas se resolvieron más tardíamente. Históricamente la primera curva rectificada después del círculo fue la espiral logarítmica (llamada por Torricelli «espiral geométrica» para distinguirla de la espiral de Arquímedes, que sería la «espiral aritmética»). El problema fue resuelto por medios cinemáticos hacia 1640 por Roberval y Torricelli. Neil resuelve hacia 1658 la rectificación de la parábola semi-cúbica $kX^2=Y^3$, llamada «parábola de Neil», mientras Roberval y Wren consiguen rectificar la cicloide hacia 1659 o antes. Por las mismas fechas Pascal obtiene la igualdad de la longitud de la espiral de Arquímedes con la de una parábola («Egalité des lignes spirale et parabolique» de «Les Lettres de A. de Dettonville»). Respondiendo a estos éxitos de Wren y Pascal, Fermat escribe hacia 1659 un tratado general sobre rectificación («De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica») en el que aplicando el material desarrollado en sus cuadraturas y con base en la parábola de Neil obtiene la rectificación de una familia infinita de curvas. Varios matemáticos reducen la rectificación de la parábola a la cuadratura de la hipérbola, ejemplo importante porque aparece como caso particular según el cual la rectificación de la curva $y=f(x)$ se corresponde con la cuadratura de la curva $y=[1+f'(x)^{1/2}$, de manera que el problema de la rectificación forma una transición geométrica natural entre la diferenciación que presupone y la integración a la que se reduce, contribuyendo a vincular así los dos tipos fundamentales de problemas del Cálculo: las tangentes y las cuadraturas.

Precisamente el descubrimiento de que tales problemas, las cuadraturas y las tangentes, son en cierto modo inversos uno del otro, cuestión vislumbrada por Barrow (aunque oscurecida un tanto por el abstruso lenguaje geométrico-sintético que utiliza), en la mente de Newton y Leibniz fraguó de tal forma, que constituyó un componente esencial en la sistematización del Cálculo por ambos, destilando de la rica miscelánea de técnicas infinitesimales anteriores un poderoso algoritmo instrumental para el cálculo sistemático de áreas y tangentes.

3. *La cuadratura básica:* $\int_o^a X^k\,dx$.

Puede decirse que las técnicas para las cuadraturas del siglo XVII están enfocadas esencialmente al establecimiento de la cuadratura básica $\int x^k dx$, mediante artificios aritmético-infinitesimales y en particular indivisibles, motivados por los intentos de atemperar la pesadez del rigor de los clásicos métodos de exhaución.

Sabemos que Arquímedes, en la cuadratura de la espiral (proposición XXIV del Libro «Sobre las espirales» utiliza resultados equivalentes a nuestras fórmulas para la suma de enteros y sus cuadrados (Proposición X de «Sobre las espirales):

$$1+2+\cdots+n=\frac{n}{2}\,(n+1)\ , \qquad 1^2+2^2+\cdots n^2=\frac{n}{6}\,(n+1)\,(2n+1)\ ,$$

Mediante estas fórmulas, Arquímedes obtiene resultados equivalentes a nuestras integrales:

$$\int_o^a x\,dx\ =\ a^2/2 \qquad \int_o^a x^2 dx\ =\ a^3/3$$

las cuales hoy establecemos mediante los límites:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}$$

Lo que no sabemos es si Arquímedes era consciente de los lazos de parentesco existentes entre los diversos problemas que resuelve, relaciones que nosotros expresaríamos diciendo que la misma integral aparece en muchos lugares bajo aspectos geométricos diferentes.

Asimismo, Cavalieri con su original método de los indivisibles («Omneslineae») consiguirá realizar la famosa cuadratura para los enteros k=1,2,3,4,5,6 y 9.

Después de 1635 (fecha de la publicación de la obra de Cavalieri), los matemáticos se afanan en generalizar el resultado y Fermat, Roberval, Wallis y otros, dan pruebas más o menos rigurosas, para el cálculo del área bajo la parábola generalizada $y=x^k$ (k entero positivo). Algunas de las pruebas se basan en fórmulas para la suma de las primeras potencias de enteros (que sustituirán al argumento intuitivo de los indivisibles) y que conducen a las desigualdades:

$$1^k+\cdots+(n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k+\cdots+n^k \qquad (1)$$

generalización del mismo resultado de Arquímedes (corolario de la Proposición X de «Sobre las Espirales») para k=2,de las que nosotros precisamente deducimos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{K+1} \qquad (2)$$

el cual es utilizado implícitamente, disfrazado como siempre a través de la doble reducción al absurdo, que todos saben que es lo único que puede concluir con rigor el argumento, pero ninguno sigue fielmente todos los pasos que en rigor hay que dar, como hacía Arquímedes, sino que se quedan en el umbral de la exhaución, comentando que es de dominio público el camino a seguir.

Así para obtener la cuadratura

$$\int_o^a x^k dx = \frac{a^k}{k+1} ,$$

dividen el intervalo [o,a] en n subintervalos de longitud a/n (Fig. 1), construyendo a continuación los habituales rectángulos inscritos P_n y circunscritos Q_n, teniendo todos por base a/n y altura la determinada por la correspondiente ordenada, de manera que se obtiene para la suma de las áreas:

$$a(P_n)= \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} [1^2+2^2+\cdots(n-1)^k]$$

$$a(Q_n)= \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} [1^2+2^2+\cdots n^k]$$

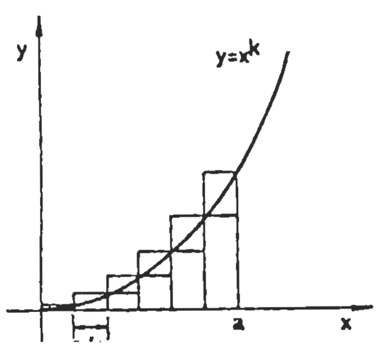


Fig. 1

Sea S el área limitada por la curva $y=x^k$ en el segmento [o,a], fácilmente se observa que se verifica:

$$a^{k+1}\ \frac{1^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} - \frac{a^{k+1}}{n} < a(S) < a^{k+1}\ \frac{1^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

que son las desigualdades básicas para iniciar la doble reducción al absurdo que les conduzca al resultado conjeturado: el área limitada por la parábola en el segmento [o,a] es $a^{k+1}/(k+1)$.

4. Fermat, Wallis y Roberval.

Hay una tendencia aritmetizadora común en las técnicas de Cálculo Integral desarrolladas por Fermat, Wallis y Roberval, que supone una cierta ruptura conceptual y metodológica, ya no sólo con respecto a los clásicos griegos, sino también con respecto a los inmediatos anteriores trabajos de Cavalieri y Torricelli. Se conserva el fuerte interés por la Geometría de Arquímedes, pero el enfoque estrictamente geométrico de los indivisibles de Cavalieri y Torricelli es reemplazado, gracias a la incipiente Teoría de Números, por una progresiva aritmetización, que conducía al uso implícito de los límites, favorecido también por la sustitución del *indivisible* fijo y estático por el *infinitamente pequeño* de la subdivisión continua aproximándose con sus integraciones aritméticas a nuestra integral definida.

Es quizá en el caso de Roberval donde más diáfanamente se advierte esta transición, hasta el punto de que realmente utiliza infinitamente pequeños homogéneos, pero da la impresión de que lo que maneja son indivisibles heterogéneos, al obtener los resultados mediante razones de figuras que compara, lo cual introduce una cierta confusión. Por otra parte Roberval amplía el elenco de elementos infinitesimales utilizando no solo rectángulos o paralalepípedos, sino también triángulos y tubos cilíndricos infinitesimales. Roberval regresa a la concepción pitagórica de la composición aritmética de los elementos geométricos, para permitirse, por ejemplo, despreciar un cuadrado frente a un cubo, lo que desde un punto de vista aritmético supondría una intuición de límites así como una anticipación de la evanescencia de los infinitesimales de orden superior en el Cálculo Diferencial de Leibniz. Roberval resuelve la cuadratura básica $\int x^n dx$ y se acerca a nuestro Cálculo Integral con sus numerosos resultados equivalentes a integrales definidas de funciones algebraicas y trigonométricas, en especial con el estudio exhaustivo que hizo de cuadraturas y cubaturas a propósito de la cicloide.

Fermat poseía una prodigiosa erudición matemática obtenida mediante un meticuloso estudio de las obras de Diofanto, Apolonio, Arquímedes y Pappus. De Diofanto nace su ingente contribución al nacimiento y desarrollo de la Teoría de Números, de Apolonio y Pappus junto con Vieta su creación de una Geometría Analítica y de ambas al conectar con los trabajos de Arquímedes resultaría el alumbramiento de los numerosos métodos y artificios infinitesimales que hacen de Fermat el matemático que más contribuyó sin duda alguna al nacimiento del nuevo Cálculo que desarrollarían Newton y Leibniz.

Fermat trasciende el infinitesimal geométrico e instaura lo infinitesimal en el terreno de lo numérico, y ello a pesar de Aristóteles (Física,III.7) que había desterrado lo infinitamente pequeño de la Aritmética. La legitimidad de lo infinitesimal en la Aritmética queda asegurada por la consistencia de la Geometría Analítica. En efecto, el puente de doble sentido que ésta establecía entre Geometría y Algebra, permitía hacer corresponder infinitesimales numéricos a los ya clásicos infinitesimales geométricos, que hasta el momento tan útiles habían sido. Además, la asociación a una curva de una ecuación que Fermat con gran acierto denomina «propiedad específica de la curva», porque describe sus propiedades básicas, le facilita el tratamiento aritmético y algebraico de problemas que Cavalieri y Torricelli atacaron solo con Geometría sintética.

El siglo XVII fue una época capital para el desarrollo de la Matemática. En él aparecieron disciplinas matemáticas con sello propio, el Cálculo Infinitesimal, la Geometría Analítica, El Cálculo de Probabilidades, la Teoría de Números, La Geometría Proyectiva, etc. Pues bien puede decirse con certeza que la figura matemática de Fermat está en el origen de casi todos los descubrimientos matemáticos del siglo XVII.
Toda persona de cultura media ha estudiado que Newton y Leibniz inventaron el Cálculo Infinitesimal, Descartes la Geometría Analítica y Pascal el Cálculo de Probabilidades. Fermat es el ascendiente directo de todos estos descubrimientos. ¿A qué se debe entonces que Fermat no ocupe en la historia de estas disciplinas científicas el lugar que le corresponde?

La respuesta a esta pregunta es múltiple y puede ir desde el más serio rigor hasta la ironía. Fermat ha precedido en la raíz a Descartes, Leibniz, Newton, Pascal, etc, pero éstos han llegado más lejos que él. Fermat ha dado el golpe inicial que es indispensable para que toda teoría se empiece a desarrollar, pero no ha constituido ninguna teoría en un cuerpo de doctrina coherente y acabado, plasmado en una obra cerrada y definitiva como por ejemplo hizo Descartes en su «Geometría».

Roger Paintandre, Profesor de Matemáticas del *Licée «Pierre Fermat»* de Toulouse ironiza (en un discurso pronunciado el 22 de junio de 1975 con motivo de la inauguración de una exposición sobre Fermat), acerca del olvido en que ha caído la figura de Fermat:

> «[...] Él [Fermat] no ha conocido por parte del gran público el renombre de un Pascal, un Galileo o un Newton.[...]. Claro está que él no tuvo la precocidad de redescubrir a Euclides a los quince años, [...]. No tuvo la fortuna de ser perseguido por la Inquisición, apenas participó en la Fronda ni comulgó en exceso con el jansenismo. Y nunca soñó con recibir una manzana sobre la cabeza mientras contemplaba la luna. ¡Falta imperdonable!. Pero más allá de estas anécdotas más o menos vanas, Fermat fue uno de los grandes genios de Francia y uno de los matemáticos más extraordinarios de todos los tiempos.»

Ironías aparte, hay otras razones para comprender la oscuridad en la que cayó la figura de Fermat. Tras la lectura de los trabajos de Fermat (en particular su correspondencia), uno se siente tentado a afirmar que Fermat hacía Matemáticas, más que por el avance de la ciencia, para saciar una irrefrenable afición y para satisfacer a sus amigos, por eso Fermat no redactó prácticamente nada de sus descubrimientos y publicó todavía menos, rehusando con energía todo ofrecimiento en este sentido, de modo que lo esencial de su obra fue desarrollada en su asidua correspondencia con los científicos coetáneos y en los márgenes de sus libros. Es en sus cartas, dando muestra de una inteligencia poderosamente sintética, donde inventa, explica, demuestra y se bate con una contundencia argumental impecable en la defensa de sus ideas. Aquí reside el poderoso atractivo que tiene la figura de Fermat para el estudioso del siglo XVII.

Wallis fue muy fecundo en creación pero parco en rigor. No abundan en su obra las demostraciones rigurosas, porque teniendo una confianza ilimitada en su intuición, aventura resultados ciertos mediante su autodenominado método de *modus inductionis*, llamado más tarde conclusión por analogía o inducción incompleta.

Los métodos algebraicos introducidos en la Geometría por Vieta, Fermat y Descartes, así como los intrumentos de computación numérica fundamentados en los logaritmos de Napier y Briggs, permiten a Wallis despegarse de los métodos geométricos de los antiguos, a los que estuvo todavía vinculado Cavalieri, para al igual que había aritmetizado «Las Cónicas» de Apolonio, aritmetizar los indivisibles de aquel, sustituyendo los infinitos indivisibles geométricos de una figura que se quiere cuadrar por indivisibles aritméticos (de ahí el nombre de su obra principal) con una longitud determinada cada uno, de manera que utilizando fórmulas sobre series de números, obtiene las cuadraturas al tomar n «muy grande» (paso al límite encubierto), es decir n tendiendo a infinito. Es precisamente en este contexto donde Wallis introduce para la posteridad el símbolo ∞ del infinito.

Veremos como Wallis desarrolla una audaz capacidad aritmetizadora. Al corriente del álgebra literal de Vieta, de los métodos analíticos de Descartes y Fermat y de las tendencias hacia los límites de los matemáticos de los Paises Bajos (Stevin, Saint-Vincent,...) y franceses (Roberval, Fermat,...), Wallis se propone rescatar e independizar a la Aritmética de la representación geométrica, rompiendo con el Álgebra Geométrica de los antiguos, llegando incluso a presentar aritméticamente lo que para los griegos era la intocable teoría general de las proporciones de Eudoxo, que aparecía en el libro V de «Los Elementos» de Euclides. Con ello Wallis es, entre los predecesores del Cálculo, quien más próximo está a la idea de límite y quien con mayor soltura la utiliza, por lo menos a nivel intuitivo. La fuente de inspiracion del trabajo de Wallis es el método de los indivisibles de Cavalieri. Es precisamente de la aritmetización de los indivisibles de donde destila la concepción intuitiva de límite que aplica. Wallis va más lejos que ningún otro matemático en la exploración y utilización del infinito. Con gran osadía representa lo infinitamente pequeño por $1/\infty$, manifestando que cada subdivisión con tal anchura indistintamente se puede interpretar como una línea o como un paralelogramo infinitesimal. Esto induce a la confusión de las dos concepciones de lo infinitesimal, líneas y rectángulos infinitamente pequeños, más aún cuando dice que un tal ente se le puede considerar como una pequeña anchura de modo que por una multiplicación infinita resultará una anchura dada, es decir $(a/\infty)x\infty=a$. Así lo hace en «De sectionibus Conicis» para hallar el área del triángulo, con lo cual vemos con que gran frivolidad extrapola las propiedades de lo finito a lo infinito, haciendo gala de una absoluta relajación en el rigor.

Más cuidadoso en la manipulacion del infinito fue en su «Arithmetica Infinitorum», donde Wallis se acerca al estilo aritmético de Roberval y Fermat, para obtener, como se verá, la cuadratura básica de Cavalieri. Tanto este trabajo como el desarrollo de $\pi/2$ en producto infinito son un verdadero dechado de procedimientos heurísticos, donde la intuición, la inducción y la interpolación le guían magistralmente hacia los resultados. Comparando indivisibles aritméticos, aplicando inducción incompleta y aproximando, alcanza el resultado utilizando patentemente la idea de límite, con una precisión (por lo menos a nivel intuitivo, aunque por supuesto no riguroso) que hasta entonces no se había alcanzado. Con una audacia inefable generaliza la cuadratura para exponentes racionales mediante una interpolación y no se detiene aquí, sino que extiende la validez de la cuadratura a exponentes irracionales. Así Wallis contribuye a dar carta de naturaleza aritmética a lo irracional, superando el imperativo pitagórico de considerar lo irracional sólo en el campo de la Geometría, removiendo una de los obstáculos que impedía la formulación del concepto de límite y, por tanto, la elaboración rigurosa del nuevo Cálculo. Así que paradójicamente la ausencia de rigor de Wallis contribuiría al alumbramiento en su día de las ideas necesarias para establecer el Análisis Infinitesimal con rigor.

5. Las cuadraturas de Fermat.

5.1. Las cuadraturas ariméticas de Fermat.

El modelo arquimediano de la cuadratura de la espiral le sirve a Fermat, para realizar sus cuadraturas aritméticas, obteniendo un resultado equivalente a la cuadratura básica de Cavalieri $\int x^n dx$, a base de extender las desigualdades que Arquímedes utilizó para su exhaución. La base para este trabajo son las fórmulas recurrentes para la suma de potencias de enteros, fundamentadas en las propiedades de los números poligonales, que Fermat obtiene inspirándose en el «Apéndice al libro de los números poligonales» que Bachet de Meziriac adjuntó a su edición de 1621 de «La Aritmética» de Diofanto.

Los métodos de cuadratura aritmética de Fermat están, pues, enfocados a buscar fórmulas para la suma de potencias de los primeros enteros, con la finalidad de justificar el límite (2) o las desigualdades (1) de la sección tercera. Para ello utilizan resultados de la incipiente teoría de números, con pruebas inductivas.

Fermat aplicando resultados sobre números poligonales establece en una carta que envía al Padre Mersenne en septiembre de 1636 (sin demostrarla explícitamente) la fórmula siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)+\cdots(i+k-1)}{k!} = \frac{n(n+1)\ (n+2)\cdots(n+k)}{(k+1)!} \quad (1)$$

De aquí al escribir

$$i(i+1)\ldots.(i+k-1) = i^k + a_1 i^{k-1} + \cdots + a_{k-1} i$$

siendo los coeficientes constantes que dependen de k, se obtiene:

$$\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{n} i^k + a_1 \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + \cdots + a_{k-1} \sum_{i=1}^{n} i\right] = \frac{n(n+1)\ldots.(n+k)}{(k+1)!} \quad (2)$$

de donde resulta la fórmula recurrente

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n(n+1)\ldots.(n+k)}{(k+1)!} - \left[a_1 \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + \cdots + a_{k-1} \sum_{i=1}^{n} i\right] \quad (3)$$

que permite hallar la suma de las k-ésimas potencias de los n primeros números enteros en función de potencias inferiores. Por ejemplo para k=2 (suma de cuadrados) se tiene aplicando lo anterior:

$$i(i+1) = i^2+1,\ a_1=1$$

$$\frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right] = \frac{n(n+1)\ (n+2)}{3!}$$

ahora teniendo presente la fórmula para la suma de los primeros *n* enteros:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

se obtiene finalmente para la suma de los n primeros cuadrados

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}$$

A partir de la fórmula (3) se deduce fácilmente de forma inductiva:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \text{potencias inferiores de n (4)}$$

de donde se puede establecer el límite de la cuadratura básica de la sección anterior:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \quad (5)$$

Fermat inicialmente utiliza las fórmulas para realizar la cuadratura de la familia infinita de espirales generalizadas $\sigma=a\Theta^n$, pero inmediatamente advierte que con una evidente transformación a una referencia rectangular puede realizar la cuadratura de otra familia infinita de curvas, las parábolas generalizadas $y=ax^n$. Lo mismo aplica a la cubatura de conoides engendrados por la rotación de parábolas, lo que le sirve para reconocer las limitaciones de su método. Fermat guiado entonces por la naturaleza de las dificultades encontradas ingenia, como se verá más adelante, un método directo de realizar la cuadratura de las parábolas generalizadas, que además tiene la virtualidad de poder aplicarse a las hipérbolas generalizadas, salvo la hipérbola de Apolonio.

5.2. El método infinitesimal de la progresión de Fermat.

En orden a generalizar el resultado de la cuadratura de Cavalieri para n entero negativo o fraccionario, Fermat atacó y resolvió el problema hacia 1640, investigando el área entre un arco de hipérbola generalizada $x^n y^m = k$ (m,n enteros positivos) una línea ordenada y una asíntota. Su enfoque fue puramente geométrico, y a diferencia de otros trabajos anteriores, en los que se utilizaba una subdivisión equidistante en los intervalos y se comparaba el área o volumen que se quería calcular con otro conocido, Fermat tenía un método que le permitía obtener el área en términos absolutos, utilizando rectángulos infinitesimales que estaban en progresión geométrica de razón menor que la unidad.

La idea feliz consiste en realizar la subdivisión del eje de la figura a cuadrar (ilimitada en el caso de hipérbolas) en intervalos, de forma que se satisfagan los requisitos del método arquimediano, es decir se debe poder inscribir y circunscribir toda el área mediante rectángulos construidos sobre los intervalos en que se ha subdividido el eje, y además, de tal forma, que la diferencia entre las áreas de las dos figuras escalonadas (y por tanto de cualquiera de ellas y el área hiperbólica) sea menor que la cantidad prefijada. El método logarítmico de la progresión geométrica combinado con la «adigualdad» resuelve brillantemente la cuestión.

Veamos un ejemplo ilustrativo tomado de su tratado sobre cuadraturas «De aequationum localium... in quadrandis infinitis parabolis et hiperbolis» de 1658.

Fermat comienza diciendo:

> [...] «Arquímedes sólo empleó progresiones geométricas para la cuadratura de la parábola; en sus otras comparaciones entre cantidades heterogéneas se restringió a progresiones aritméticas. ¿Sería así porque encontrara que la progresión geométrica sirviera menos a la cuadratura? ¿O quizá es que el artificio particular del que se sirvió para cuadrar con esta progresión la primera parábola puede difícilmente aplicarse a las otras? Cualquiera que sea la razón, yo he probado que la progresión geométrica es muy útil para las cuadraturas y deseo presentar a los geómetras actuales mi invención, que permite cuadrar por un método absolutamente similar, tanto parábolas como hipérbolas».

El método está basado en una propiedad de las progresiones geométricas de razón menor que la unidad, que Fermat enuncia así:

> «Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos es al más pequeño de ellos, como el mayor es a la suma de los términos restantes».

Es fácil comprobar que esta propiedad es equivalente a la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica indefinida y decreciente.

Fermat considera al principio, las hipérbolas $yx^n=k$ y manifiesta:

> «Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio, que es la primera, pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general».

Fermat efectúa la demostración para n=2. Con base en la Fig. 2, de la definición de la hipérbola, deduce:

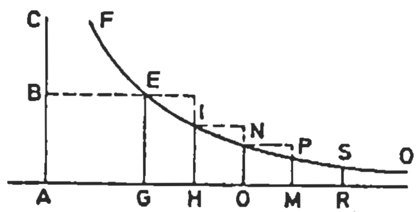


Fig. 2

$$\frac{AH^2}{AG^2} = \frac{EG^2}{IH} \quad (1) \qquad \frac{AO^2}{AH^2} = \frac{IH}{NO} \quad (2)$$

En concreto Fermat afirma:

> «El área indefinida que tiene por base EG y que está acotada de un lado por la curva ES y de otro por la asíntota infinita GOR, es igual a una cierta área rectilínea».

El área rectilínea a que alude Fermat es el rectángulo AGEB. Basándose en la figura anterior Fermat empieza a construir los elementos necesarios para cuadrar la hipérbola:

> «Consideremos los términos de una progresión geométrica indefinida y decreciente. Sean los primeros términos AG, AH, AO, etc. Supongamos que estos términos están lo bastante próximos para que de acuerdo con el método de Arquímedes podamos «adigualar», como dice Diofanto, o igualar por aproximación el paralelogramo rectilíneo GExGH y el cuadrilátero mixtilíneo GHIE. Además, supondremos que los primeros intervalos GH, HO, OM, etc, son suficientemente iguales para que podamos aplicar el método de reducción de Arquímedes, mediante polígonos inscritos y circunscritos. Basta hacer esta observación una vez para no obligarse a recordar y a insistir constantemente sobre un artificio bien conocido de todos los geómetras...»

Así pues Fermat divide el eje GOR a la derecha del punto G en intervalos GH, HO, OM, etc, de longitudes tales que se verifica:

$$\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AO} = \frac{AO}{AM} = \cdots \quad (3)$$

$$\frac{AG}{AH} = \frac{GH}{HO} = \frac{HO}{OM} = \cdots \quad (4)$$

Ahora considera los rectángulos circunscritos:

$$R_1 = EGxGH, \quad R_2 = IHxHO, \quad R_2 = NOxOM, \ldots$$

y comprueba que R1, R2, R3..., forman una progresión geométrica decreciente de razón AG/AH. En efecto aplicando (1), (2), (3) y (4) se obtiene:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{EGxGH}{IHxHO} = \frac{AH^2xGH}{AG^2xHO} = \frac{HO^2xGH}{GH^2xHO} = \frac{HO}{GH} = \frac{AH}{AG}$$

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{IHxHO}{NOxOM} = \frac{AO^2xHO}{AH^2xOM} = \frac{AH^2xHO}{AG^2xOM} = \frac{AH^2xAG}{AG^2xAH} = \frac{AH}{AG}$$

Comprobando sucesivamente se demuestra que R_1, R_2, R_3..., es una progresión geométrica decreciente a la que Fermat le aplica la propiedad equivalente a su sumación. Sea S su suma, se tiene:

$$\frac{R_1 - R_2}{R_2} = \frac{R_1}{S - R_1}$$ de donde se deduce:

$$\frac{AH - AG}{AG} = \frac{EGxGH}{S - EGxGH}$$ de aquí se obtiene:

$$\frac{GH}{AG} = \frac{EGxGH}{S - EGxGH}$$ y finalmente

$$S - EGxGH = EGxAG \quad (5)$$

Ahora bien, como Fermat ha supuesto que unos intervalos «estaban lo bastante próximos» para que otros «fueran suficientemente iguales» deduce que el área definida por la hipérbola y las líneas GH, GE es, debido a (5) y a las infinitas subdivisiones, igual al área del rectángulo AGxGE, y lo hace con estas significativas palabras:

> «... Si ahora añadimos [a ambos miembros de (5)] el paralelogramo EGxGH que a causa de las infinitas subdivisiones, se desvanece y queda reducido a nada, alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes... No es difícil extender esta idea a todas las hipérbolas definidas anteriormente excepto la que ha sido indicada [la hipérbola de Apolonio]».

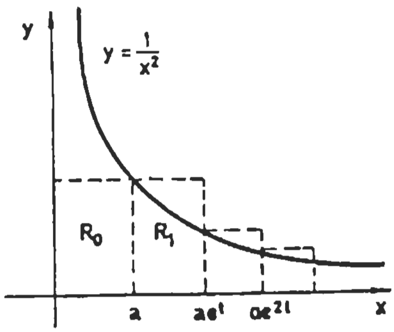


Fig. 3

El método de Fermat se ha denominado «logarítmico». En su época esta palabra todavía aludía a una cierta relación entre una progresión geométrica y una aritmética. Hoy nosotros a su método le llamaríamos «exponencial» y lo desarrollaríamos así (Fig. 3):

A partir de la abcisa x=a, efectuamos una subdivisión $x_1=ae^t$, $x_2=ae^{2t}$... en progresión geométrica de razón e^t. Calculemos las áreas de los rectángulos circunscritos:

$$R_1 = a\cdot(e^t-1)\cdot(1/a^2) = (e^t-1)/a$$

$$R_2 = a\cdot e^t\cdot(e^t-1)\cdot(1/a^2e^{2t}) = (e^t-1)/ae^t$$

es decir: $R1 = (e^t-1)/a$, $R2 = [(e^t-1)/a]\cdot e^{-t}$

Así pues, R_1, R_2, forman una progresión indefinida decreciente de razón e-t. Por tanto aplicando la fórmula de sumación, se tiene para la suma S(t), de los infinitos rectángulos R_1, R_2, ...,

$$S(t) = R_1/(1-e^{-t}) = [(e^t-1)/a]/(1-e^{-t}) = e^t/a =$$
$$(1/a) + (e^t-1)/a = R_0 + R_1$$

de donde resulta que el área limitada por la hipérbola, la ordenada x=a y la asíntota y=o, viene dada por:

$$S = \underset{t \to 0}{\text{Lím}}\ S(t) = (1/a) = R_0.$$

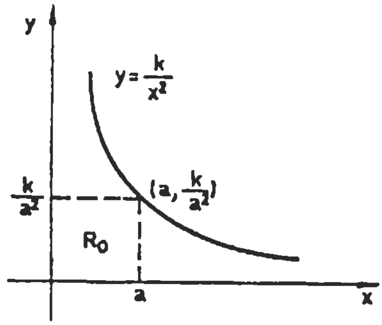


Fig. 4

El resultado es equivalente a la integral (Fig. 4)

$$\int_a^\infty (k/x^2)\ dx = k/a = a\cdot(k/a^2) = R_0.$$

Vemos cómo en las cuadraturas de Fermat de hipérbolas y parábolas generalizadas, subyacen los aspectos esenciales de la integral definida: a) la división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños, b) la aproximación a la determinación numérica de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva, y finalmente c) un intento de expresar el equivalente de lo que será el límite de esta suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños.

6. La integración aritmética de Wallis.

La cuadratura de las curvas $y=x^k$ con k no necesariamente entero positivo fue estudiada exhaustivamente por J. Wallis en su obra «Arithmetica Infinitorum» de 1655.

En la cuadatura $y=x^k$ Wallis precisa obtener el límite (1) de la sección 3, que ahora expresa en la forma:

$$\int_0^1 x^k\ dx = \underset{n \to \infty}{\text{Lím}} \left[\frac{o^k + 1^k + \cdots n^k}{n^k + n^k + \ldots n^k} \right] \quad (1)$$

Wallis obtiene este límite (de lo que él llama «serie de orden k») de forma empírica. En efecto para k=3 por ejemplo obtiene los cocientes de la tabla (2), que en realidad representan la comparación de los indivisibles aritméticos de la parábola cúbica $y=x^3$ con los del rectángulo circunscrito.

Ante la evidencia numérica del cuadro (2), Wallis concluye inductivamente que se verifica:

$$\frac{0^3+1^3+\cdots n^3}{n^3+n^3+\ldots n^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n} \qquad (3)$$

de manera que el límite cuando n tiende a ∞ es 1/4.

$$\begin{array}{l}
\dfrac{0^3+1^3}{1^3+1^3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} \\[2ex]
\dfrac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3} = \dfrac{9}{24} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} \\[2ex]
\dfrac{0^3+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3} = \dfrac{36}{108} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} \\[2ex]
\dfrac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3}{4^3+4^3+4^3+4^3+4^3} = \dfrac{100}{320} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} \\[2ex]
\dfrac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3}{5^3+5^3+5^3+5^3+5^3+5^3} = \dfrac{225}{750} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{20}
\end{array} \qquad (2)$$

Haciendo cálculos similares para diversos valores de k, Wallis obtiene:

$$\frac{\sum_{i=o}^{n} i}{(n+1)n} = \frac{1}{2} \;;\; \frac{\sum_{i=o}^{n} i^2}{(n+1)n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \;;\; \frac{\sum_{i=o}^{n} i^3}{(n+1)n^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n} \;;\cdots$$

$$\frac{\sum_{i=o}^{n} i^k}{(n+1)n^k} = \frac{1}{k+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}$$

de donde deduce que para un k entero positivo cualquiera se verifica:

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{o^k + 1^k + \cdots n^k}{n^k + n^k + \cdots n^k} \right] = \frac{1}{k+1} \qquad (4)$$

Ahora ya puede calcular la cuadratura comparando indivisibles (Fig. 5):

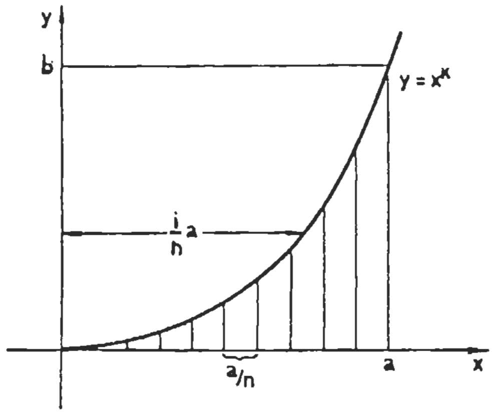


Fig. 5

$$\frac{\sum_{x=o}^{a} y}{\sum_{x=o}^{a} b} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{(a \cdot o/n)^k + (a \cdot 1/n)^k + \cdots + (a \cdot n/n)^k}{a^k + a^k + \cdots + a^k} \right] =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=o}^{n} i^k}{(n+1)n^k} = \frac{1}{k+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}$$

resultado equivalente a la fórmula de la cuadratura básica para el entero positivo k:

$$\frac{\int_o^a x^k dx}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

Para efectuar la extensión de la cuadratura desde k entero a k racional positivo, Wallis utiliza el siguiente artificio:

Se define el Índice de una función I(f) mediante la fórmula:

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{f(O) + f(1) + \cdots + f(n)}{f(n) + f(n) + \cdots + f(n)} \right] = \frac{1}{I(f) + 1} \qquad (5)$$

presuponiendo que tal límite existe. Por ejemplo, la fórmula (4) diría que el índice de $f(x)=x^k$ es $I(x^k)=k$.

Por otra parte Wallis observa que dada una progresión geométrica de potencias enteras positivas de x, por ejemplo 1, x^3, x^5, x^7..., la correspondientes sucesión de índices 0,3,5,7..., forman una progresión aritmética. Esto es una observación trivial, pero le permite dar un gran salto adelante, de manera que mediante una audaz extrapolación establece (sin demostración) que una conclusión análoga puede deducirse para la progresión geométrica:

$$1, \sqrt[q]{x}, (\sqrt[q]{x})^2, \ldots, (\sqrt[q]{x})^{q-1}, x$$

de manera que la sucesión de sus índices:

$$O=I\{1\}, \quad I\{\sqrt[q]{x}\}, \quad I\{(\sqrt[q]{x})^2\}, \ldots, \quad I\{\sqrt[q]{x})^{q-1}\}, \quad I\{x\}=1$$

debe formar una progresión aritmética, de donde deduce que se verifica necesariamente:

$$I\{\sqrt[q]{x})^{q-1}\} = p/q$$

entonces aplicando la definición (5), obtiene:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt[q]{o})^p + (\sqrt[q]{1})^p + \cdots + (\sqrt[q]{n})^p}{(\sqrt[q]{n})^p + (\sqrt[q]{n})^p + \cdots + (\sqrt[q]{n})^p} = \frac{1}{(p/q)+1} \qquad (6)$$

A partir de (6) razonando cómo en el caso de k entero, obtiene:

$$\int_o^a x^{p/q}\, dx = \frac{a^{(p/q)+1}}{p/q} \qquad (7)$$

que es el resultado de la cuadratura básica para $k=p/q$.

De esta forma Wallis era capaz de calcular las razones entre las áreas bajo las curvas $y=x^{p/q}$ y los rectángulos circunscritos, así como las razones entre los sólidos de revolución determinados por estas parábolas y sus cilindros circunscritos. A pesar de la heterodoxia de sus procedimientos, Wallis estaba convencido absolutamente de la validez de sus métodos.

Además, es en este contexto donde Wallis asocia la raíz $(\sqrt[p]{x})^q$ con el índice p/q. Será Newton, poco más tarde, quien siguiendo los pasos de Wallis, introducirá el uso de potencias fraccionarias y negativas.

7. *Los indivisibles e infinitesimales de Roberval*

Durante largos siglos los filósofos mantuvieron opiniones diversas sobre la constitución de la materia y la estructura del continuo. Unos sostenían que la materia era infinitamente divisible y que en cada división se conservaban las propiedades básicas de la materia inicial. Otros, por el contrario, mantenían que la descomposición de la materia era limitada, de forma que se llegaría a unas partículas indivisibles o átomos cuyas propiedades ya no serían idénticas a las de la materia primigenia. Estas concepciones tuvieron su repercusión en la Matemática, de modo que la primera estaría vinculada con los *infinitesimales* y la segunda con los *indivisibles* Los indivisibles de G.P. de Roberval suponen, en cierto modo, una concepción intermedia entre ambos entes matemáticos. En efecto, Roberval maneja «infinitamente pequeños» homogéneos, pero muchas veces lo hace como si fueran los heterogéneos indivisibles, por eso su obra puede considerarse como una transición de los indivisibles de Cavalieri a los infinitesimales de Fermat o de Newton y Leibniz. Empieza llamando a su método «método de los infinitos» pero por la influencia de Cavalieri adopta en seguida la palabra indivisible. Roberval afirma en su «Traité des Indivisibles»:

> «[...] El indivisible procede de una subdivisión continua de una superficie que se puede ir estrechando hasta el infinito en pequeñas superficies... Una superficie no está compuesta realmente de líneas, o un sólido compuesto de superficies, sino constituido de pequeñas piezas de superficies y sólidos respectivamente, pero esta infinitas cosas son consideradas como si fueran indivisibles... No se comparan heterogéneos sino que los infinitos o indivisibles se conciben así: una línea está compuesta de líneas pequeñas, infinitas en número, pero se hablará del «infinito número de puntos», de forma análoga a como el «infinito número de líneas de una superficie», representará el infinito número de pequeñas superficies que llenan la superficie entera. [...]».

Las diversas subdivisiones conducen a Roberval a cálculos aritméticos con series que utiliza, no para determinar directamente el valor de una superficie o volumen, sino para comparar con otra superficie o volumen muy simple, de modo que establece una proporción por medio de la cual un cuarto término desconocido se calcula mediante otros tres conocidos.

A pesar de no tener el mismo significado que en Cavalieri, el concepto de «todas las líneas» o indivisible aparece constantemente en las cuadraturas de Roberval.

Para ilustrar lo que se acaba de exponer, parafraseando su cuadratura de la parábola, sea ABC un segmento de una parábola cuyo vértice es A y cuyo eje es AB (Fig. 6). Roberval divide la tangente AD en «un número infinito» de partes iguales: AE, EF; traza las líneas EL, FM... paralelas a AB por los puntos de división E,F..., y establece:

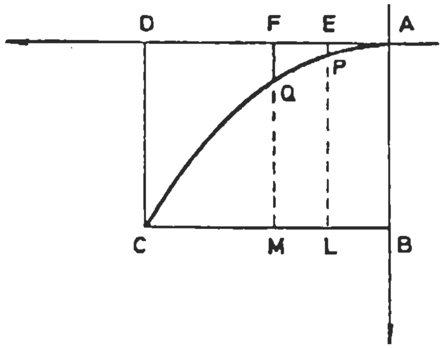


Fig. 6

$$\frac{\text{área ACD}}{\text{rectángulo ABCD}} = \frac{\text{todas las líneas de ACD}}{\text{todas las líneas de ABCD}} \qquad (1)$$

La relación (1) es similar a la relación fundamental que utiliza Cavalieri para su cuadratura de la parábola cónica, pero la justificación y el uso que de ella hace Roberval es bastante diferente, ya que éste primero considera que:

$$\frac{\text{área ACD}}{\text{rectángulo ABCD}} = \frac{\text{todas los rectángulos de ACD}}{\text{todas los rectángulos de ABCD}} \qquad (2)$$

donde los rectángulos infinitesimales son determinados por la división de AD. Como todos los rectángulos tienen la misma base AE, este segmento de línea puede ser cancelado en ambos miembros de (2) para obtener el segundo miembro de (1), donde «todas las líneas» significa la suma de las ordenadas. Este es el punto crucial que le permite seguir manteniendo en el discurso el término «todas las líneas».

En lenguaje actual lo que hace Roberval se explicaría así:

Sean F_1 y F_2 dos figuras planas con base rectilínea AD y limitadas por las gráficas de las funciones f_2 y f_2 y las líneas AB y DC (Fig. 7). Roberval determina la razón F_2:F_2, mediante la relación:

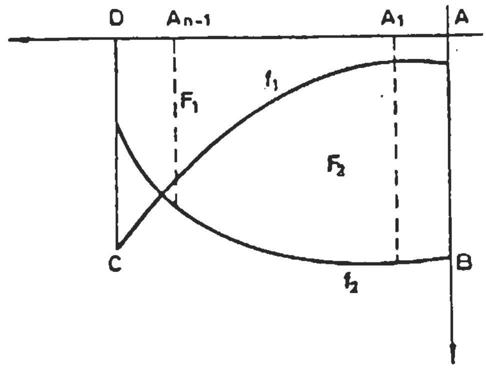


Fig. 7

$$F_1 : F_2 = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[f_1([i/n]AD) \right] \frac{AD}{n}}{\sum_{i=1}^{n} \left[f_2([i/n]AD) \right] \frac{AD}{n}}$$

En la cuadratura de la parábola F es un segmento de parábola y F2 es un rectángulo, de modo que se tiene:

$$f_1([i/n]AD) = (i^2/n^2)AD^2, \; f_2([i/n]AD) = AD^2,$$

por tanto Roberval conduce, implícitamente, la cuadratura de la parábola a la determinación del límite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}}{\sum_{i=1}^{n} 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{(1/3)n^3 + (1/2)n^2 + (1/6)\,n}{n^3}$$

asegurando que vale 1/3, porque para *n* suficientemente grande la cantidad

$$(1/2)n^2+(1/6)n$$

es despreciable frente a n^3, como se ilustrará más adelante.

Es decir Roberval devuelve al indivisible la dimensión geométrica que se le había sustraído, pero utiliza muchas veces el propio lenguaje de Cavalieri, haciendo en sus figuras, al menos en apariencia, abstracción de una dimensión. Es una extraña concepción, pero le resulta fecunda utilizándola en la comparación de figuras complicadas con figuras simples, como se ha visto en el ejemplo.

Es evidente que los métodos de cuadratura por indivisibles de Cavalieri y de Roberval son bastante diferentes. El enfoque de Cavalieri es estrictamente geométrico y atenta contra la homogeneidad del espacio; el de Roberval, con su carácter aritmético e infinitesimal, está más próximo a las integraciones aritméticas de Fermat y Pascal.

Roberval trajo de nuevo la asociación de números con magnitudes geométricas, en un sentido muy próximo a lo pitagórico, bajo el enfoque de Nicomaco de Gerasa (hacia el 100 d.J.C.). Un segmento de línea es tratado como compuesto de un número infinito de pequeñas líneas representadas por puntos a los que se les hace corresponder enteros positivos.

Consideremos sucesivamente triángulos rectángulos isósceles con catetos compuestos de 4, 5, 6... puntos (o indivisibles). Al igual que Fermat, Roberval utiliza resultados sobre números poligonales, calculando que el número total de puntos en los triángulos vendrá dado por (Fig. 8):

Para el triángulo de 4 es $10=(1/2)4^2+(1/2)4$
Para el triángulo de 5 es $15=(1/2)5^2+(1/2)5$
Para el triángulo de 6 es $21=(1/2)6^2+(1/2)6$
Para el triángulo de 7 es $28=(1/2)7^2+(1/2)7$

Como se ve se trata de números triangulares, cuya expresión es:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = (1/2)n^2 + (1/2)n$$

El segundo término de cada miembro de la derecha es la mitad del lado y representa el exceso del triángulo sobre la mitad del cuadrado. Este exceso disminuye indefinidamente en proporción al primer término, con el número de puntos del lado del triángulo. En concreto esta proporción va siendo 1/4, 1/5, 1/6.... Ya que el número de líneas en un triángulo geométrico o en un cuadrado es infinito, este exceso o «mitad de una línea» es despreciable y no debe entrar en consideración. Esto vendría a decirnos que el triángulo es la mitad del cuadrado, argumento fuertemente equivalente a la cuadratura

$$\int_o^a x^k dx = \frac{a^2}{2}$$

Fig. 8

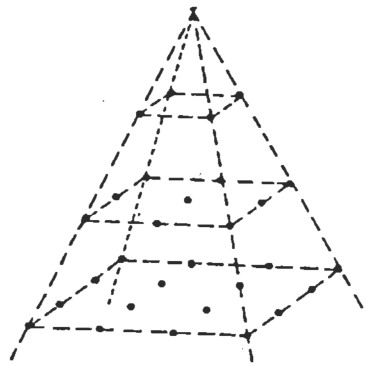


Fig. 9

Roberval continúa con este tipo de argumento y considera el caso de las líneas que siguen el orden de los cuadrados (Fig. 9). La suma de todas esas líneas (los puntos que a ellas representan) es a la última, tomada un número de veces igual al número de líneas que hay, como la pirámide es al prisma, es decir como 1 es 3. Si tenemos las pirámides de puntos con base cuadrada, con lados compuestos de 4,5,6,.... puntos o indivisibles, el número total de puntos en las pirámides viene dado por:

Para la pirámide de 4 es $30=(1/3)4^3+(1/2)4^2+(1/6)4$
Para la pirámide de 5 es $55=(1/3)5^3+(1/2)5^2+(1/6)5$
Para la pirámide de 6 es $30=(1/3)6^3+(1/2)6^2+(1/6)6$

En este caso se trata de números piramidales de base cuadrada que se expresan:

$$1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6} = (1/3)n^3 + (1/2)n^2 + (1/6)n$$

En todas estas expresiones el primer término de la derecha es un tercio del cubo del lado, el segundo es la mitad del cuadrado y el tercero es la sexta parte del número de puntos del lado de la base de la pirámide. A medida que aumenta el número de puntos en el lado de la pirámide la proporción del segundo término al primero va siendo (3/2)x(1/4), (3/2)x(1/5), (3/2)x(1/6)..., y la del tercer término al primero va siendo (1/2)x(1/4), (1/2)x(1/5), (1/2)x(1/6)... Como el número de cuadrados es infinito, los dos últimos términos son despreciables frente al primero, cuando *n* se hace suficientemente grande, con lo que la suma sería 1/3 del cubo, resultado equivalente a la cuadratura

$$\int_0^a x^2\, dx = \frac{a^3}{3}$$

De la misma manera la suma de los cubos es un cuarto de la cuarta potencia, la suma de las cuartas potencias es un quinto de la quinta potencia y así sucesivamente. De esta forma Roberval obtendría un resultado equivalente a la cuadratura básica para exponente entero positivo.

La operación de despreciar los términos posteriores al primero frente a éste, simula que ciertos «infinitésimos de orden superior» se desvanecen frente a los de primer orden. En este sentido Roberval es un predecesor de Leibniz.

Retomando el tema de la cuadratura de la parábola cónica que Roberval estudia exhaustivamente en una obra que ha permanecido inédita y que se llama precisamente «La cuadratura de la parábola», sean (Fig. 6) AE=1, AF=2..., de la expresión (2) anterior se obtiene:

$$\frac{\text{área ACD}}{\text{rectángulo ABCD}} = \frac{AE\cdot(EP+FQ+\cdots)}{AD\cdot DC} = \frac{AE\cdot(AE^2+AF^2+\cdots)}{AD\cdot AD^2} =$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots AD^2}{AD^3} = \frac{1}{3}$$

Al generalizar, Roberval obtiene la cuadratura de las parábolas de los diversos órdenes, comenzando por la línea recta a la que llama parábola de primer grado, y continuando con la parábola cónica, la parábola cúbica y así sucesivamente hasta la parábola de grado n (Fig. 10).

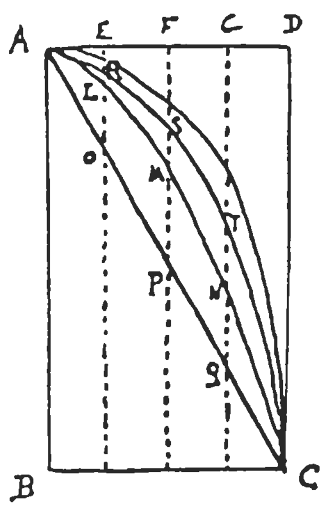


Fig. 10

Vemos como Roberval realiza una integración «cuasi-aritmética», estableciendo las sucesiones y series de numeros necesarias, pero a la hora de calcular el límite lo encubre recurriendo a la intuición geométrica. Pero con cierta generosidad diríamos que está muy cerca de la noción de «límite de la suma de un número infinito de cantidades infinitamente pequeñas», lo que le aproxima muchísimo a nuestra integral definida, en la que después de dividir una figura en pequeñas secciones, se rebajan éstas, haciéndolas decrecer continuamente en magnitud, conduciendo el problema, tras un cálculo aritmético, a sumar una serie. Realmente la única diferencia es que Roberval necesita hacer un salto lógico para calcular el límite (con una intuición infalible) y además no calcula directamente el resultado, sino a través de la comparación con una figura sencilla que suele ser un rectángulo o un cilindro.

7. Epílogo

Hemos descrito algunas técnicas representativas de la etapa empírica del Cálculo Infinitesimal. Se ha dilapidado en general el rigor impecable de la exhaución griega, pero se han ingeniado magníficos métodos heurísticos de rápido descubrimiento.

A partir de aquí se plantea históricamente la necesidad de dos hechos fundamentales: a) la generalización y unificación de los problemas y métodos infinitesimales, es decir la elaboración de un algoritmo aplicable a todos los problemas y b) la reformulación sobre bases rigurosas del nuevo Análisis Infinitesimal. La parte a) es lo que llamamos el descubrimiento final del Cálculo por Newton y Leibniz. La parte b) es la puesta en orden lógico del Cálculo, que realiza Cauchy y sus continuadores, la llamada «Aritmetización del Análisis».

Puede decirse que el Cálculo anterior a Newton y Leibniz es una ingente casuística de métodos heurísticos, aplicados a problemas geométricos específicos, que se resuelven mediante técnicas *ad hoc*, obteniéndose multitud de resultados particulares que, al traducirlos al lenguaje moderno, muestran los conceptos esenciales del Cálculo, que del alguna manera yacían en ellos, pero de forma tan fragmentaria que sólo se referían a problemas individuales y no a teorías generales. Pero la perspectiva de generalización estaba implícita en esos métodos. Si no se acertó a encontrar la técnica algorítmica general bastante tuvo que ver en ello el lenguaje matemático al uso, todavía primitivo, que se utilizaba. El gran acierto de Leibniz es precisamente la elaboración de una notación especialmente afortunada, tan identificada con los propios conceptos y tan significativamente definitiva, que, a veces, nos resulta inevitable utilizarla, anacrónicamente, para exponer los resultados infinitesimales de sus predecesores. Su virtuosismo en la creación del simbolismo le permitiría traducir en fórmulas los resultados y en algoritmos los métodos, tanto los de sus antecesores como los descubiertos por él mismo, lo que a su vez le facilitaría la utilización de los recursos algebraicos para independizar el discurso matemático de las figuras geométricas y con todo ello reconocer y aislar los conceptos fundamentales del Cálculo Infinitesimal, creando un cuerpo de doctrina dotado de algoritmos eficaces, es decir funcionando como un Cálculo operacional que resuelve todos los problemas planteados anteriormente, mediante procedimientos uniformes y con una proyección a nuevos y más complicados problemas, como un potente instrumento de investigación. En palabras del propio Leibniz, se trataba de hacer con las técnicas del Cálculo lo mismo que había hecho Vieta con la Teoría de Ecuaciones y Descartes con la Geometría.

No es fácil delimitar el nivel de contribución de cada matemático al nacimiento del Cálculo Infinitesimal. Mientras ciertas creaciones matemáticas de la época tienen un sello poderosamente individual como la Dinámica de Newton, la Geometría Proyectiva de Desargues, la Teoría de Números de Fermat, en lo que al Cálculo se refiere el descubrimiento se fue fraguando de una forma gradualmente atomizada en lentas transiciones casi imperceptibles mediante la inevitable y sucesiva aparición de nuevos conceptos, métodos y técnicas que un amplio y brillante elenco de matemáticos iban entrelazando entre sí de forma casi inextricable.

A lo largo del recorrido de la etapa empírica del desarrollo del Cálculo anterior a Newton y Leibniz, hemos visto como se iba abriendo paso lenta y subrepticiamente el concepto de límite. Aunque muchos matemáticos aplican intuitivamente nociones muy próximas a las nuestras, contextualizando sus resultados advertimos las dificultades inherentes al ejercicio del pensamiento aritmético en términos de límites, que tan imprescindible se fue manifestando durante dos siglos en la ardua tarea de reconstruir y sistematizar el Análisis, fundamentándolo en bases rigurosas.

Como conclusión, Newton y Leibniz, bajo concepciones y métodos infinitesimales diferentes, fueron capaces de separar la ganga geométrica de los resultados de sus antecesores, encontrando el principio general que les permitiría reducir las operaciones fundamentales del Cálculo Infinitesimal a un algoritmo universalmente válido, produciendo un cambio sustancial en el tratamiento y resolución de los problemas. Recogiendo todos los componentes de «lo heurístico» de la fase empírica anterior, Newton y Leibniz, sin añadir grandes cotas de rigor, desarrollan «lo algorítmico» con la fecundidad, coherencia y generalidad de sus diferentes sistemas infinitesimales, abriendo la puerta a «lo riguroso» del Análisis moderno. Gracias a la ilustre pléyade de matemáticos que les precedieron estos sabios bien pudieron haber manifestado la frase que se atribuye a diversos científicos:

> «Si he podido vislumbrar más allá, es porque me he apoyado en hombros de gigante».

BIBLIOGRAFÍA

I. Obras originales

FERMAT: Oeuvres de Fermat. Publiées par P.Tannery. París. 1891-1912. Gauthier-Villars.

D. J. STRUIK: A Source Book in Mathematics. 1200-1800. Harvard University Press, Massachusetts 1969

II. Obras sobre autores concretos

L. AUGER: Gilles Personne de Roberval, «Un savant méconnu». Librairie scientifique A. Blanchard, París, 1962.

M. S. MAHONEY: The Mathematical Career of Pierre Fermat. Princeton University Press, 1973.

J. F. SCOTT: The Mathematical work of Jhon Wallis. Chelsea Publishing Company, New York, 1981.

III. Artículos de revistas científicas

L. BRUSOTTI: I metodi di esaustione nella storia della matematica. Periodico di Matematiche, Serie IV, Vol. XXX, n.º 5, 1952.

U. CASSINA: Storia del concetto di limite. Periodico di Matematiche, Serie IV, Vol.XVI, 1-19, 82-103, 144-167, 1936.

W. COWAN RUSELL: Fermat's contribution to the development of the differential Calculus. Scripta Mathematica, 13, 127. 1947.

T. P. NUNN: The arithmetic of infinites. Mathematical Gazzette, Vol V, 345-356, 377-386, 1910-11.

A. ROSENTHAL: The History of Calculus. American Mathematical Montly, LVII, 75-86, 1951.

D. T. WHITESIDE: Patterns of mathematical thought in de later 17th century. Archiv of History of Exactes Sciences, 1, 1960-62, 179-388.

IV. Obras generales sobre historia del cálculo

M. E. BARON: The Origins of the Infinitesimal Calculus. London Pergamon, 1969.

C. B. BOYER: The History of the Calculus and its conceptual development. Dover, New York, 1949.

G. CASTELNUOVO: Le Origini del Calcolo Infinitesimale nell'èra moderna. N. Zanichell Editore, Bologna, 1938.

C. H. EDWARDS: The Historical Development of the Calculus. Springer-Verlag, New York, 1979.

P. M. GONZÁLEZ URBANEJA: Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII. Alianza Universidad, Madrid, 1992.

I. GRATTAN-GUINNESS Y OTROS AUTORES: Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos. Alianza Universidad, Madrid, 1984.

O. TOEPLITZ: The Calculus, a Genetic Approach. University of Chicago Press, Chicago, 1963.

V. Obras generales sobre historia de las matemáticas

E. T. BELL: Les grands mathématiciens. Payot, París, 1950.

C. B. BOYER: Historia de las Matemáticas. Alianza Universidad, Madrid, 1986.

J. P. COLLETTE: Historia de las Matemáticas. Siglo XXI, 2 Vol. Madrid ,1985.

P. DEDRON, J. ITARD. Mathématiques et Mathématiciens. Magnard. París 1959.

J. DE LORENZO: Introducción al estilo matemático. Tecnos, Madrid, 1971.

J. REY PASTOR Y J. BABINI: Historia de la Matemática. Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1951. Gedisa, Barcelona 1984.

D. E. SMITH: History of Mathematics, Dover, New York, 1958.

F. VERA: 20 matemáticos célebres. Mirasol. Buenos Aires, 1961.

ALQUIMIA Y ALQUIMISTAS: LA OBRA DE PARACELSO

Felipe Cid I Rafael
Facultad de Medicina
Universidad de Barcelona

En general, aunque sin entrar en mayores disquisiciones, la Alquimia está considerada como el antecedente de la Química moderna, que para entendernos nació junto a la obra de A. L. Lavoisier (1743-1794), cuando demostró que toda combustión del aire es el resultado de una combinación con el oxígeno del mismo. Es decir, justo el momento en que la teoría del *flogisto*, antaño absoluta, desapareció del mapa científico. Sin duda, éste es un evento experimental determinante, puesto que con anterioridad la Alquimia era o equivalía a la Química; particularmente, en la época medieval que tomaremos como punto de partida.

El alquimista medieval acaso constituya una de las figuras más representadas en las iconografías empleadas para ilustrar la Historia de la Química en general. Aquel mundo de retortas, fogones, diversos utensilios, siempre sumido en la atmósfera tenue de un antro oscuro en el que por una estrecha ventana entra un rayo de luz, ha constituido una imagen preferentemente escogida por artistas en función de ilustradores [1]. Raro es visitar un Museo de Historia de la Ciencia, que yo sepa, en el cual

1. La pintura al óleo de David Teniers II (1610-1694), por ejemplo, que se conserva en nuestro Museo del Prado.

no se exhiba a escala natural el taller de un alquimista. Ahora bien, centrándonos en los hechos históricos podemos ya avanzar que el alquimista medieval, alejado de los bienes del mundo, por encima de todo perseguía incansablemente uno de sus sueños: la piedra filosofal, la verdadera llave de la Gran Obra; veamos otros aspectos que más o menos completan este primer trazo o esbozo sobre la cuestión.

Sin un orden de prelación estricto, por otro lado muy difícil de establecer con certeza, sin duda, y sin devaneos poéticos, afirmaría que en la Edad Media la Alquimia fue un ejercicio esencialmente secreto. Por la sencilla y simple razón de que estaba considerada como una práctica diabólica. Los alquimistas podían ser juzgados. S. Alberto el Grande (1206 - 1280) [2], buscando una cita [3], advirtió que el alquimista debía guardar silencio, procurando no revelar nunca a nadie el resultado de sus ensayos o pesquisas. Naturalmente, no siempre sucedió de este modo. Massain [4], autor que ha estudiado brillantemente el tema, refiere casos espeluznantes: a finales del XVI el duque de Brunswick hizo quemar a una alquimista llamada M. Ziegler, un tal Bragadino acabó ahorcado en la corte de Munich, el médico inglés Price se envenenó antes de ser ejecutado, etc. Ahora bien, siendo mucho más dilatada la lista de quienes sobrevivieron, y siendo el propósito inicial conceptualizar unos hechos, más que puntualizarlos, pasemos al siguiente aspecto; en línea con los principios ideológicos que de la labor alquímica se derivaron.

Nos referimos al hermetismo. Porque, si la Alquimia en lo tocante al hombre debía ser secreta, de un modo implícito era hermética a causa de Dios. El Sumo Hacedor había depositado una parte de su verdad en los alquimistas, y, por consiguiente, aceptada dicha procedencia no podían divulgar los hallazgos. El alquimista pasaba a ser un depositario de verdades divinas. De ahí, pues, que el lenguaje alquímico fuese críptico, colmado de signos, símbolos, alegorías y enigmas de toda clase. Resultaría asaz prolijo entrar en este apartado. Basta repasar grabados del siglo XV, por supuesto referidos a la Alquimia, para darnos cuenta de que es una terea ímproba, y, en cierto modo, inútil. No obstante, a título ilustrativo, entre los símbolos y signos más comunes acaso están la imagen de Diana devorada por un tigre, que simboliza la plata, junto a un león o a un águila representando la acción de un ácido

2. No existe unanimidad sobre la fecha de su nacimiento. Algunos autores la sitúan en 1193 y otros en 1207. Nosotros, sin pretensiones eruditas, atendiendo la longevidad de la vida de santo y la fecha de sus publicaciones, que parecen interrumpirse al cumplir los setenta años de edad, finalmente hemos adoptado el año 1208.

3. Consúltese: Wilms: *Albert der Grosse*. Münschen, 1930. También la edición de Grabmann: *Summa de creaturis*. Leipzig, 1919.

4. Massain, R.: *Chimie et chimistes*. 5e. éd. París, 1966.

sobre el mentado metal precioso. Renuncio a hablar de los criptogramas, profundamente estudiados por Poisson [5] a fines del pasado siglo, por tratarse de auténticos galimatías. La palabra *seganissegue*, por ejemplo, según Poisson significa «genio de los sabios». Y en lo referente a las alegorías, sirva acotar que el gris era «hacer un viaje», el negro «encontrarse entre dos montañas», etc.: resueltamente, el hermetismo resulta la parte más oscura de los tratados alquímicos.

La Alquimia, acercando otro aspecto, en una cierta medida devino una verdadera iniciación moral. En contra de lo que ha divulgado, y opino que con demasía, el alquimista no siempre buscaba el provecho material. No. Inmerso en sus prácticas ocultas asimismo pugnaba por lograr riquezas espirituales. El alquimista meditaba sobre los bienes del alma, trataba de disociar lo que pertenecía a la inteligencia o al corazón, y, a la postre, deseaba hallar una interpretación moral. La piedra filosofal no aseguraba la fortuna de quien la poseía, sino que le ayudaba a ser un hombre de bien, dotado de todas las virtudes morales. Según Paracelso, avanzando un trazo sobre nuestro personaje, el trabajo alquímico proporcionaba la satisfacción metafísico religiosa de participar en la vida íntima de la creación. En este punto, no siempre corroborado, coincidimos plenamente con Delgado [6]. Es más, sospechamos que esta falta de visión moral del mundo alquímico, en el sentido estricto de la acepción, proviene, o se produce, al mezclar los poderes mágicos de la Alquimia con el comportamiento del oficiante frente a los efectos de la misma; aunque, esperamos esclarecerlo, ambas cosas son completamente distintas.

Es aceptado, aunque cabalmente no pueda apoyarlo con un repertorio bibliográfico extenso [7], que en todos los libros sobre magia la Alquimia ocupa un lugar preferente. Los espíritus rondan alrededor del laboratorio del alquimista. Porque, tenemos por caso, las mismas transmutaciones arrastraban un halo en el que lo sobrenatural, insólito por naturaleza, se sopreponía a los simples y a la sazón empíricos fenómenos químicos. Pero, examinado con largueza, pocas veces se ha pensado, quizá mejor previsto, que los alquimistas eran capaces de reproducir las operaciones. Es decir, ¿la magia estaba en los elementos que manejaban, en el mismo alquimista o en los pasos que debían realizarse para reproducir un experimento, demostrar un hallazgo u obtener una dádiva preciosa? Tan larga pregunta, o interrogante, es difícil de responder. Por lo menos de una forma taxativa. Sin embargo, estimamos que primordialmente las atribuciones mágicas en buena parte eran debidas al desconocimiento científico de los cuerpos o elementos que el alquimista empleaba. Ciertamente, igno-

5. Poisson, A.: *Théories et symboles des alchimistes*. París, 1891.

6. Delgado, H.: *Paracelso*, 3a. ed. Barcelona, 1967.

7. Magnus, O.: *Historia de Gentibus Septentrionalibus*. Romae, 1583.

rando la existencia del hidrógeno y la composición del aire difícilmente podía descubrir las causas que producían una explosión. O, viene a ser lo mismo, las impurezas que acompañaban las substancias tratadas, los insospechados resultados de múltiples combinaciones constituían un venero de reacciones imprevisibles. Y todo ello aún sin contar con la creencia de los espíritus metálicos, extraídos de las entrañas de la tierra, Magnus da buena cuenta de ello [8], que adoptaban formas de corceles con destellos capaces de matar a los pobres mineros. Recapitulando, puesto que las normas expositivas imponen su espacio, aventuraríamos que históricamente el gradiente mágico de la Alquimia provenía de su empirismo; la ignorancia, sin motivos o razones que la inciten a averiguar la existencia o exactitud de la realidad, invita a creer en lo extraordinario o admirable.

Es inevitable, pasando a un nuevo aspecto, comentar las relaciones entre la Alquimia y la Astrología. Mas, por razones obvias, debemos ser muy cautos. Puesto que la mezcla de dos materias especulativas, esta vez más a expensas de la segunda, la Astrología, es demasiado detonante para una comunicación incluida en un simposio sobre Historia de la Ciencia. Máxime si añadimos que en tal supuesto deberíamos remontarnos al período pretécnico de la cultura griega [9]. En efecto, en el pensamiento caldeo los astros materializaban unos espíritus de los que dependían el éxito de las operaciones alquímicas [10]. De ahí que la Alquimia se relacionase directamente con la Astrología. Aunque, a la larga, la relación entre planetas y metales no fuese absoluta ni inmutable. No obstante, atendiendo las doctrinas químicas del seiscientos, es incuestionable que respetaban unos principios astrales. De Rochas [11], en un precioso texto que pese a su antigüedad mantiene una rara vigencia, demuestra que las intervenciones astrales se interponían en la tarea del alquimista. Hasta el extremo de consultar al cielo antes de emprender una nueva experiencia, de suerte que en el caso de considerarlo desfavorable el alquimista debía aguardar un tiempo más propicio. En fin, dando paso a un nuevo apartado, la búsqueda de la piedra filosofal no podía emprenderse, con probabilidades de éxito, sin que el Sol se hallase bajo el signo de Aries, y, por su parte, la Luna bajo el de Tauro.

Escuetamente, en el pensamiento alquimista, la piedra filosofal permitía fabricar el oro a partir de los metales comunes. Ahí estaba la Gran Obra comentada hasta la saciedad durante la Alta Edad Media y el Renacimiento. De nuevo las explicaciones

8. Op. cit., p. 57.

9. Laniata, G.: *Medicina mágica e religione popolare in Grecia fino all'età di Ippocrate*. Roma, 1967.

10. Consúltese: Koecher, F.: *Die Babylonisch-Assyrische Medizin in Texten und Untersuchungen*, tomos I ss, Berlin, 1963 ss.; Rutien, M.: *La Sciencie des chaldéens*. París, 1960.

11. Rochas, A. de: *Les doctrines chimiques au XVIIe. siècle*. París, 1888.

al respecto conducirían hasta un sinnúmero de citas u opiniones. Sin ir demasiado lejos en el texto de Ostwald [12], rico sobre el particular, hasta incluso aparecen las opiniones, huelga decir críticas, que M. Berthellot (1827-1907), uno de los fundadores de la Termodinámica, vertió acerca de la cuestión. Fieles a nuestros principios, no en vano desde hace años centrados en los instrumentos y técnicas científicas, pues, será mejor reparar en el arte de conseguir la piedra filosofal. Arte, entiéndase, como un saber técnico (ars) fundado sobre los conocimientos alquímicos. En efecto, y con independencia de los resultados, la preparación de la piedra filosofal exigía un matraz propio [13] lleno de substancias convenientes, que era preceptivo calentar respetando ciertas reglas. Primordialmente, el fuego que actuaba sobre el matraz tenía que ser prolongado y regular. No son exactas las pinturas o dibujos, por tanto, que reproducen brasas de carbón vegetal. Para estos menesteres los alquimistas usaban una lámpara especial a base de una mecha de amianto alimentada con aceite, que aseguraba un fuego uniforme; aunque, bien es verdad, la mayoría de los alquimistas procuraron ocultar la técnica elegida.

Obviamente, la fabricación de la piedra filosofal acogió muchas propuestas. Massain [14], las recoge de una forma muy clara y sucinta. Resumiendo que una de las opciones estribaba en solidificar el mercurio con el magnesio, azufre, espuma de plata, etc. Ahora bien, allende de todas las técnicas propuestas, lo importante es remarcar que bien pronto quedó demostrada la imposibilidad de obtener una transmutación de los metales. Al igual que el elixir de la larga vida, el elixir filosófico, que según su propio nombre indica debía proporcionar una larga juventud, una no menos prolongada vida y una salud imperturbable; sólo interrumpida por una muerte que los alquimistas contemplaron como algo imprevisto, contra lo cual era imposible luchar.

En la historiografía química, en la parte perteneciente a la Alquimia como punto de partida no es oportuno olvidar, tal como comúnmente sucede, que pese a todo agrupaba los únicos conocimientos químicos del momento, Walder [15], en su enjundioso compendio sobre la Historia de la Química, superado el período islámico lo enmarca invocando una serie de hechos generales cuyas relaciones con el tema que nos ocupa son innegables. Ciertamente, un gran número de descubrimientos pertenecientes al siglo XII coincidieron con la explotación de nuevos minerales en Alemania: estaño en Erzgebirde, plata en Saxe (Freiberg), cobre y plomo en Harz (Mansfeld)

12. Ostwald, W.: *Devenir d'une science*, trad. franç. M. Dufour. París. 1909.

13. En términos alquímicos conocido como *huevo filosófico*.

14. Op. cit., p. 45-46.

15. Walder, P.: *Histoire de la Chimie*, trad. franç. E. Darmors. París, 1946.

y Silesia, etc. Ello coincide, repetimos el verbo, con la aplicación de los derivados de dichos minerales en los frescos mosaicos, pinturas sobre el vidrio, pintura al óleo, teñido de los tapices de colores, etc. Labarre [16], además recuerda que en el XIV apareció el papel obtenido con restos de madera y andrajos, suplantando la plaza del pergamino teñido con púrpura. En 1320, el Rhin reflejó los primeros molinos de papel, y, en 1455, con el descubrimiento de la imprenta a cargo Gutenberg comenzó la fabricación del papel. Tímidamente, en la batalla de Crecy, que tuvo lugar en 1346, aparecieron las primeras armas manuales de fuego, y, poco después, surgían unos esbozos de piezas de artillería ya dañinas [17]. Walder [18], subraya que en el siglo XI probablemente en el sur de Italia se obtuvo el alcohol (agua vitae) destilando el vino. También que durante el XIII en un texto latino bajo el pseudónimo de Geber [19] fue descrita la preparación de un agua disolutiva, o fuerte, que ni más ni menos era el ácido nítrico. En suma, en el mundo de la Alquimia, además de las primeras técnicas industriales, los tres descubrimientos enunciados merecen una atención preferente; por sus implicaciones, relación y sugerencias que acto seguido abordaremos.

El efecto de los disparos de pólvora con armas de fuego puso sobre la palestra el fenómeno de la inflamación brusca bajo el efecto de fuerzas mecánicas. Gracias al descubrimiento del alcohol y de los ácidos minerales, los métodos químicos, mejor aún alquímicos, se enriquecieron a partir de entonces. La destilación fraccionada permitió separar el alcohol más volátil del agua menos volátil, la destilación seca facilitó la separación de un aceite de un residuo sólido. Por su parte, la identificación de los ácidos y del alcohol introdujo nuevas concepciones. Al lado del agua ordinaria que disolvía la sal marina sin descomposición, apareció el alcohol que no disolvía la sal, y, en cambio, descomponía y disolvía la plata permitiendo la separación con el oro. Walder [20], profundizando en los hallazgos, afirma que ya no se trataba de un elemento filosófico aristoteliano, un agua abstracta, sino de tres aguas concretas o de tres líquidos que poseían tres propiedades químicas distintas. En consecuencia, ¿frente a estos hallazgos concretos, sin duda trascendentales, en qué lugar histórico queda la Alquimia? ¿Es correcto olvidar, omitir, borrar de las páginas de la historio-

16. Labarre, A.: *Histoire du Livre*. París, 1970. Asimismo pueden consultarse: Febvre, J.; Martín, H.J.: *L'apparition du livre*. París, 1958; Floccon, A.: *L'Univers du Livre*. París, 1961.

17. Montross, L.: *Historia de las guerras*, trad. cast. V. de Artadi. Barcelona, 1963.

18. OP. cit., p. 19.

19. Geber fue el alquimista árabe por excelencia. Probablemente, vivió entre los años 780 y 840. Es evidente, por tanto, que el nombre del traductor es difícil de identificar con certeza.

20. Op. Cit., p. 20.

grafía científica, los cinco mil textos alquímicos contados por los especialistas [21], pese a estar escritos con un lenguaje alegórico, parabólico, místico, y, por añadidura, repletos de fórmulas sobre elixires para el rejuvenecimiento del cuerpo y del espíritu? La pregunta tampoco es fácil de precisar; especialmente, si a mayor abundamiento, se establece una selección rigurosa y fundamentada.

Implícitamente, al reclamar una selección hacíase referencia a la costumbre de calificar como alquimistas a muchos personajes, cayendo en una especie de tic histórico, por el mero y simple hecho de que hasta el filo del seiscientos raro fue quien no trabase contacto con dicha práctica. Ahora bien, todo y siendo cierto, en parte cierto de acuerdo con Thorndike [22], personalmente distinguiremos a quienes podrían calificarse como alquimistas puros. Ciertamente, incluir a R. Llull (1235-1315) en la lista de grandes alquimistas supone posponer las casi doscientas obras de referentes a la comprensión de Medicina [23], o, más aún, su arte combinatorio para la deducción y demostración lógica de todo saber, que tanta influencia ejerció en N. de Cusa (1401-1464), G. Bruno (1548-1600) y G. G. Leibniz (1646-1716). Igualmente, ocurre lo mismo al acercar la figura de R. Bacon (1219-1292) soslayando sus aportaciones en los campos de la Física, Astronomía, Lingüística, Medicina, bajo el signo de unos preceptos epistemológicamente experimentales [24]. Significa desconocer la acerada crítica baconiana contra al Alquimia especulativa [25], quizá intuyendo veladamente la proximidad de nuevos hallazgos. Es más, la participación de S. Alberto el Grande, junto con la de Santo Tomás de Aquino (1225-1274), los dos grandes escolásticos, entendemos que en este supuesto fue una participación controladora. En efecto, conforme a los dogmas de la Iglesia, sus pretensiones de hegemonía, cualquier búsqueda alrededor de las Ciencias Naturales, y en particular de la Química, por definición debía efectuarse dentro del cuadro de la filosofía aristotélica. La Alquimia, por tanto, era tolerada, revisada aristotélicamente, con el propósito de que el lenguaje empleado fuese profundamente religioso; incluso místico dados los misterios que presuntamente desvelaba.

21. Consúltese: Thorndike, L.: *History of Magic and Experimental Sciencie*. New York, 1923-1958. 8 vol.; Mulhauf, R.P.: *Origins of Chemistry*. London, 1960; Partington, J.R.: *History of Chemistry*. London, 1966.

22. Op. Cit. III., 76.

23. Llull, R.: *L'Art Compendiosa de la Medicina*, trad. del llatí i anàl. cient. per J.M. Sevilla. Barcelona, 1987. El lector encontrará una respuesta consultando el *Inventari d'obres llullianes*.

24. Consúltese: Crombie, A.C.: *Historia de la Ciencia*, trad. J. Bernia. Madrid, 1974. 2 vol.

25. Op. cit. I. p. 59.

Entre los alquimistas puros pertenecientes al siglo XV, que anteriormente emplazábamos, sin duda destacan los nombres de N. Falmel (1330-1418) y de B. Valentín, un benedictino que vivió en Alemania durante el período señalado. Massain [26], respecto al primero pondera sus estudios sobre la generación de los metales, y, en lo tocante al segundo, la preparación del cobre a partir de la pirita mediando la transformación en sulfato de cobre. Pero, pese a poder ampliar la lista, la Alquimia históricamente es pobre, por no decir misérrima, en resultados científicos y en hechos químicos nuevos. Más bien debe ser valorada como una corriente filosófica, seriamente enraizada con el alma humana, provista de un pasado rico en acontecimientos. En consecuencia, arribados a estas alturas, acaso sea ya momento de preguntarse: ¿qué importancia tiene en la historiografía química?; las posibles respuestas reclaman un párrafo aparte.

Varios autores, entre los que destacan los ya citados Walder, Partington y Multhauf [27], coinciden en aceptar que la influencia de la Alquimia en el desarrollo de la Química es susceptible de ser dividida en cinco puntos o apartados. De entrada, las cuatro propiedades físicas de Aristóteles fueron frotadas, acaso sea ese el verbo, gracias a los portadores químicos de dichas propiedades, como, por ejemplo, el azufre, el mercurio y el arsénico, que poseían el poder de cambiar visiblemente los metales ordinarios. Huelga comentar la importancia de dicho acontecimiento, equiparable, tomemos por caso, al momento en el que N. Copérnico (1473-1543) separando las referencias científicas de las percepciones visuales dio más crédito a las suposiciones de Aristarco que a todo el sistema aristotélico. En segundo lugar, aunque menos concreto no por ello menos importante, el problema de la transformación y ennoblecimiento de los metales reportó una atención constante sobre la identificación y propiedades de los mismos. En lo concerniente a la magia, la mística y las versiones simbólicas, hasta ahora solapadamente denostadas, como contrapartida acotaremos que empezaron a incitar la necesidad de mostrar un lenguaje simple y comprensible, capaz de explicar los resulados de una observación o de un experimento. Asimismo la Alquimia demostró casualmente, perfilando algunos extremos ya comentados, que valiéndose de procedimientos químicos conocidos la transmutación de los metales los unos dentro de los otros a todas luces resultaba imposible. Finalmente, dando paso a la segunda parte del tema, la Alquimia sirvió como introducción a la obra de Paracelso; una labor que Walder [28] denomina *quimiátrica* entendiendo que es un eslabón entre la Alquimia y la Química.

26. Op. cit., p. 57-59.

27. Podrían añadirse, tomando en cuenta los juicios que se emiten, dos obras más: Walker, D.P.: *Spiritual and Demonic Magic from Ficino to Campanella*, London, 1958; y Jung, C.G.; Pauli, W.: *The Interpretation of Nature and the Psyche*. New York, 1955.

28. Op. cit., p. 25

La vida y la obra de Teofrasto von Hohenhaim (1493-1541), puesto que este era su verdadero nombre, es una auténtica tentación para cualquier historiador de la Ciencia [29]. Especialmente, en el perfil de la Historia de la Medicina [30]. Desde el fondo del tiempo su figura aparece como la de un personaje fascinante, lleno de contradicciones, de impulsos excelsos, de episodios caóticos, empero, que en Medicina conducen a un nuevo y ontológico concepto de la enfermedad, en Química a la empírica fundación de la misma, y, en sus relaciones recíprocas, llegan hasta el quicio de una revolución farmacológica [31]; apoyada en el empleo de productos procedentes del reino mineral.

Paracelso, fue un obstinado individualista y un no conformista que vivió intensamente la época de la Reforma que le cupo en suerte. Deshecha la jerarquización medieval entre seres celestes y seres terrestres el hombre ganaba la posibilidad inmediata de un acceso a Dios. Paracelso se inscribió fuertemente en esta línea de pensamiento, que le permitía revolucionar la Medicina y la Ciencia Natural. Pero, es evidente, que no podía partir de un vacío. En principio, se apoyó en los efectos de una irrepetible personalidad, la suya me atrevería a decir, históricamente colosal. Pagel [32], afirma que las ideas paracelsianas cobran vigor a través de un empirismo profundo y de un escepticismo hacia los sistemas escolásticos, es bien cierto; que habían petrificado la Medicina y los conocimientos naturales. De ahí, pues, que la Medicina fuese su eje central, aunque no único y definitivo. Paracelso, se opuso al papel predominante atribuido a los humores y a su flujo de un órgano a otro, según el esquema gelénico. En lugar de ello, señaló el origen local y el carácter de la alteración. Localizada la enfermedad, por tanto, en la obra paracelsiana quedó clasificada y condicionada por los agentes causantes, lugares y alteraciones que la constituyen. Lógicamente, el nuevo concepto repercutió en los principios terapéuticos vigentes; veámoslo como prolegómeno a la Quimiatría paracelsiana, toda vez, repetimos, que la Medicina no fue su único eje central.

En la Materia Médica antigua se confiaba en los procedimientos dirigidos contra el cuerpo considerado como un conjunto. De ahí que el sudor, la purga, el vómito

29. Entre las biografías dedicadas a Paracelso continúan manteniendo una notable vigencia: Sudhoff, K.: *Paracelsus*. Leipzig. 1936. En el terreno de las doctrinas y fuentes primordialmente hemos empleado: Pagel, W.: *Paracelsus. Introduction to Philosophical Medicine in the Era of the Renaissance*. New York. 1958.

30. Respecto a las fuentes médicas: Prosksch, J. K.: *Paracelsus über die venerischen Krankheiten un die Hydrargyrose*. Wien. 1898; Proksch, J.K.: Paracelsus als medizinischen Schriftsteller. Wien. 1911.

31. Consúltese: Ganzenmüller, W.: *Paracelsus un die Alchemie des Mittelalters*. «Beitr. Z. Gesch. der Techn. und Alch.» 7 (1956), 300 14; Multhauf, R.: *Medical Chemistry and the Paracelsians*. «Bull.. Hist. Med.» 28 (1954), 101-26.

32. Op. cit., p. 132.

y la sangría, sobre todo esta última, sirviesen para evacuar lo que había en exceso y restituir lo que faltaba. Sin embargo, Paracelso buscó la erradicación de la causa específica. Enfermedad y remedio tenían que adaptarse. Confiando en los poderes de la propia naturaleza se mostró cauto, lo que hoy en día llamamos conservador. Aunque, la búsqueda del remedio específico, constituyó la base del pensamiento paracelsiano. En suma, frente a la composición de ingredientes propugnó la separación, esto es, el *arcano* o la semilla eficaz; un principio en el que además de aceptar la doctrina de las signaturas, o sea la forma y el color de las hierbas afines a la forma y color de los órganos, no excluyó las virtudes quimiátricas.

Paracelso se instruyó en la Metalurgia y la práctica de la Alquimia. Asido al concepto de la nueva Filosofía experimental [33] reunió sus diversos campos de actividad, enlazando la Química con la Medicina, y, al unísono, reponiendo las ideas químicas a los hechos y acontecimientos del mundo exterior [34]. Es decir, respondiendo a una pregunta acuciante, fácil de prevenir, prácticamente las ideas químicas constituyen el mundo mayor (Macrocosmos) y el hombre el mundo menor (Microcosmos), ambos sujetos a la ley universal de la *simpatía* y *antipatía* de la Naturaleza. Mas, retomando el periplo alquímico de Paracelso, Delgado [35] recuerda que a partir de 1526 desarrolló su estudio sobre los tres principios, las tres primeras esencias de las cuales está compuesto el universo. Paracelso, de este modo planteó a sabiendas el problema fundamental de la composición química, la *tria prima* según la terminología alquimista del momento, que comprendía el «mercurio» como principio volátil, el «azufre» como principio combustible y la «sal» como principio de resistencia al fuego. Estos tres principios paracelsianos en proporciones variables, más o menos puros y no transformables los unos dentro de los otros, eran capaces de reproducir todas las substancias de los tres reinos de la Naturaleza, además de determinar el comportamiento químico. Paracelso fue el primero en designar «Química», en lugar de Alquimia, para relacionarla con la curación de determinadas enfermedades. Walder [36], apunta que fue en el año 1530, por cierto usando el viejo alemán, cuando en forma clara y evidente formuló todas las prioridades y las diferencias existentes entre ambas prácticas. Sólo aparentemente fundidas en esbozos de laboratorios lóbregos. Paracelso, proclamó que la Quimiatría no era como la Alquimia que pretendía

33. Vogt, A.: *Theophrastus Paracelsus als Arzt un Philosoph*. Stuttgart, 1956.

34. Indistintamente, emplearemos Química y Alquimia considerando, de acuerdo con nuestras conclusiones, que la Quimiatría paracelsiana fluctúa constantemente entre ambos campos; hasta constituirse en un antecedente de los saberes químicos.

35. Op. cit., p. 22.

36. Op. cit., p. 30.

la transmutación de los metales en plata y oro. Todo lo contrario. Según nuestro hombre la Quimiatría facilitaba medicamentos puros y concretos, con los que el médico completaba sus conocimientos; sin proponérselo avanzó, al escribir que la Química era el fundamento de la Medicina, el ulterior paso de la Fisiología a la Fisiología aplicada, que hoy en día constituye la Farmacología Experimental.

Schneider [37], entre otros autores, mantiene que Paracelso poseía un conocimiento profundo de las substancias químicas y de los métodos de trabajo de su tiempo. Ciertamente, Paracelso preconizó que las substancias empleadas como medicamentos tenían que ser puras. Porque, conforme con las muestras extraídas, distinguió la existencia de mezclas. Esta concepción, pues, le llevó a un precepto, *separir purum ab impurum*, el cual, por contigüidad, conducía a una serie de manipulaciones destinadas a mejorar los productos y su acción curativa. Es decir, este ejercicio práctico, a la postre experimental, supuso un revulsivo en las aún conclusiones filosóficas vigentes. Exactamente, que la Naturaleza, digamos con un valor semántico de *physis*, no siempre ofrece algo perfecto e inmediatemente utilizable. El hombre, en consecuencia, debe rehacer la obra de la Naturaleza; en este caso la Quimiatría, y en su defecto la Alquimia, perfeccionaba la actualidad creadora de las ofertas y de los procesos naturales.

Paracelso, dando una nueva definición de la Química, o separándola de la Alquimia, propuso unos cambios substancialmente conceptuales. En esta lucha, puesto que así puede tildarse, sin duda su apasionado carácter combativo desempeñó un valor determinante. Puesto que a expensas de defender unas teorías, más intuitivas que demostrables, fueron su ardor y convencimiento los que consiguieron adeptos y continuadores. A causa, es lícito argüir, de unas razones más fáciles de imaginar que de explicar. La obra de Paracelso constituye un cúmulo de proposiciones geniales. Logró que médicos y boticarios [38] abandonando viejas doctrinas, fieles a la sabiduría e imperturbabilidad de la Naturaleza y sus misterios, valorizaran las nuevas proposiciones quimiátricas, Walder [39], por ejemplo, pondera que medio siglo después de la muerte de Paracelso en la Universidad de Marburg se fundó la primera Cátedra de Quimiatría, que quedó a cargo de J. Hartman a partir del 1609 para ser exactos. También incide en las coincidencias cronológicas entre la obra de Paracelso y la revolución metalúrgica germana en tiempos del Emperador Carlos V, teniendo en cuenta que, entre los años 1525 y 1527, nuestro personaje escribió diversas monografías ex-

37. Schneider, W.: *Grundlagen für Paracelsus Arzneitherapie* «Arch. Gesch. Med.», 49 (1965), 28-36.

38. Término latino, *apothecarius*, empleado a partir del siglo XII, en este caso adoptado para separarlo de los actuales farmacéuticos.

39. Op. cit., p. 31.

poniendo sucintamente los principios de la Química y sus procedimientos [40]. La enumeración podría ser interminable. Recapitulando, por tanto, expuestos unos trazos elementales procede ya introducir una valoración final; próxima a las zonas de influencia que suscitó una obra como la presente, según se ha dicho, que pese a su carácter innovador entra más en el dominio de la ideología que en el de la racionalidad científica.

Pagel [41], llegó a la conclusión de que Paracelso poco hizo en el transcurso de su ajetreada vida, entrando con todos los honores en una ciudad, luego huyendo por una puerta falsa, así sucedió en Estrasburgo y Basilea, o, por otra parte, discutiendo acaloradamente con todos lo poderes fácticos. Efectivamente, hasta transcurridos unos treinta años la controvertida figura paracelsiana no cundió en el seno de las clases sociales cultas, al tiempo que sus manuscritos, prácticamente inéditos, empezaban a ser publicados. Sí, vencidos estos lustros sus más encarnizados detractores, que eran legión, no fueron ya capaces de anular la vorágine de ideas innovadoras, que con tesón y contundencia propagó en su dilatado periplo. No obstante, con los datos en la mano, las preparaciones y remedios paracelsianos adquirieron rango cuando, sus seguidores O. Croll (1580-1609) y T. de Mayerne (1573-1655), las incluyeron en la *London Pharmacopeia* editada en 1618. Así pues, tres cuartos de centuria después de la muerte de Paracelso fueron precisos para que se sancionara el valor de la Química en pro de la utilización médica de los minerales y los metales; a nuestro entender su aportación más concreta, tangible en lo que denominamos historiografía médica.

Pagel [42], sintetiza diciendo que ningún paracelsista es concebible sin Paracelso. Porque, concluye, nuestro hombre fue necesario. Asimismo, afirma que la necesidad histórica de Paracelso no discurre entre el número de descubrimientos, que ya se ha visto enuncian novedades inconmensurables, sino en las nuevas orientaciones científicas que suscitó. Indudablemente, pensamos, el paso de la Alquimia a la Química mediando la Quimiatría ocurrió interiormente y exteriormente en el decurso de un par de siglos apurando al máximo. Al lado de una técnica química vieja, forjada en la mente de Paracelso, se fue constituyendo una Química con un franco cariz científico. En principio, sus adeptos fueron los médicos, y, al final del setecientos, debe reconocerse que los médicos y farmacéuticos alemanes. Es rigurosamente válido que la Química en las postrimerías del seiscientos, después de las corrientes para-

40. Weimann, K-H.: *Paracelsus-Bibliographie 1932-1960*. Mit einem Verzeichnis neu entdecker Paracelsus-Handschriften. Wiesbaden, 1963.

41. Op. cit., p. 117.

42. Ibid.

celsistas y de la mano de J. B. von Helmont (1577-1644), el químico místico por antonomasia del Renacimiento científico, la Química rechazó la analogía macrocosmos microcosmos del paracelsismo tradicional, rompiendo así la cadena que sujetaba al hombre el mundo mayor. De todos modos, a pesar de que los científicos perdieron interés por la interpretación química del macrocosmos, no sucedió así en la comprensión química del hombre; uno de los ejes innovadores del paradigma paracelsiano.

No olvidemos que el esquema paracelsiano rechazó a Aristóteles, Galeno, e, incluso, al propio Hipócrates. A costa de acentuar la observación y el experimento como nuevas bases para el estudio de la Naturaleza, la Quimiatría constituyó una pauta ontológica, una guía, para el estudio del hombre y el Universo. Estos son los puntos que personalizan la figura de Paracelso en el contexto del Renacimiento. Aunque, su amplia utilización de material química en experimentos de destilación y su constante referencia a analogías químicas como medio de comprensión de todos los fenómenos naturales, indica claramente una conexión con la herencia hermético-alquímica. Pero, es evidente, que esta última posible contradicción deja de serlo si tenemos en cuenta la época y el lugar en que nació la obra paracelsiana; último recurso, el de los imperativos temporales, a los que la historiografía científica nunca puede renunciar por más que se trate de una historia de innovaciones y adelantos.

Solamente desearía añadir, antes de finalizar, que el estudio del pasado científico ofrece hombres y obras, hasta períodos, en los que el material sometido a crítica es tanto por lo que representa como por lo que deja de representar. O, viene a ser lo mismo, es más por lo que suscita que por lo que contiene. En el devenir histórico de la Ciencia, en la tenue dialéctica progresiva que la constituye, los grandes descubrimientos sólo son un punto de partida que explica nuevos hallazgos. De ahí, pues, que las representaciones y contenidos aludidos, su valoración exacta, constituya la clave de la crítica histórica propiamente dicha. Pues bien, la figura de Paracelso surgiendo y desprendiéndose de la Alquimia, como los esclavos de Miguel Angel lo hacen desde una masa de mármol expresamente inacabada, es la más genuina representación de unas anticipaciones de porvenir; en las que unas intuiciones absolutas substituyeron la falta de medios para confirmarlas.

NEWTON, EL MATEMÁTICO

José Montesinos Sirera
Profesor de Matemáticas
I. B. Villalba Hervás

Introducción

En el año 1650 muere René Descartes, dejando un legado intelectual de fundamental importancia para el desarrollo de la nueva ciencia. El Universo, es ahora, un complejo entramado regido por leyes mecánicas y el hombre, esa criatura finita e imperfecta, pero dotada de una mente en la que están sembradas las semillas del conocimiento, puede y debe tratar de desentrañar y dominar esas leyes.

Para ello, Descartes ha ideado un Método con el que, no aceptando nada por verdadero que no sea claro y distinto, y aplicando la razón convenientemente, siguiendo el modelo de las demostraciones matemáticas, el hombre puede llegar a resolver cualquier problema que se le presente.

El nuevo científico tendrá que creer que existen las soluciones de esos problemas y que únicamente será cuestión de tiempo y trabajo llegar a su solución. Dios, ese Maestro Infinito y Bondadoso, verá con buenos ojos a aquellas de sus criaturas humanas que consigan descubrir las claves del enigma.

El aspirante a este nuevo sacerdocio tendrá que saber MATEMÁTICAS, dominará las esencias profundas de la Geometría, representación idealizada de lo real; manejará hábilmente el Algebra, esa matemática mágica, de reciente creación, que permite nombrar y manipular los conceptos y magnitudes de la geometría con gran agilidad y precisión.

El nuevo científico, al ser consciente de vivir en un Universo infinito y en movimiento, radicalmente distinto del Mundo cerrado de los antiguos, tendrá que abandonar el «espíritu» de la matemática griega. Ahora prevalecerá la utilidad sobre la estética. La geometría no deberá temer «contaminarse» del movimiento de la Mecánica; el rigor, máximo logro que se imponían los griegos, pasará a un segundo plano.

Se aceptará el «número irracional» sin tener que recurrir a la engorrosa definición de razón de magnitudes inconmensurables, de Eudoxo (Libro V de «Los Elementos» de Euclides). Y tendrá que osar, valientemente, hacer uso de procesos infinitos, desatendiendo las advertencias y admoniciones aristotélicas. Se seguirán haciendo las demostraciones arquimedianas, pero obviando el largo y pesado método de exhaución.

Todo ello porque el fin lo justifica. Y el fin es el de arrancarle los secretos a la Naturaleza «... *conociendo la fuerza y la acción del fuego, del agua, del aire, de las estrellas, de los cielos y de todos los demás cuerpos que nos rodean... y convertirnos en los dominadores y poseedores de la Naturaleza*. De esta manera, con el estudio y el trabajo, el hombre recuperará el Paraíso perdido.

Este mensaje recorre toda la Europa culta y el «Discurso del Método» será el libro científico-filosófico más leído y de mayor influencia de la segunda mitad del siglo XVII.

Ciencia, tecnología y sociedad en la Inglaterra del siglo XVII

Este es el título de la importante Tesis doctoral que Robert K. Merton publicó en 1933, en la que a nuestro juicio, queda demostrada la estrecha relación entre la ética protestante y el desarrollo de la Ciencia en la segunda mitad del siglo XVII en Inglaterra.

Expondremos a continuación el núcleo de las ideas de Merton por considerarlas necesarias para la comprensión de la personalidad y de la obra de Isaac Newton.

A comienzos del siglo XVII, la Teología y las Humanidades recibían una consideración mucho mayor que las Ciencias en las universidades inglesas. Wallis, quien estaba en el Emmanuel College en 1635, señalaba que las matemáticas casi no eran consideradas dignas de estudios académicos y que pocos estudiantes abordarían una disciplica tenida en tan poca importancia. Hacia mediados de siglo, la ciencia, como valor social, se elevó conspicuamente en la escala de estimación. En virtud de este nuevo prestigio, las hazañas científicas proporcionaban un canal para el avance social. La burguesía, para la cual la ciencia y sus frutos técnicos prácticos iban a ser cada vez más valiosos empezó a ver en la actividad científica, tanto como en los negocios, un medio sumamente satisfactorio de ascenso social.

La religión es una expresión de los valores culturales y en el siglo XVII era una expresión claramente dominante. El calvinismo expandió sus raíces a todas las sectas protestantes de la época. Las diferencias en minucias teológicas fueron llevadas a una convergencia en la ética social real: las buenas obras justifican al hombre tanto como la fe; el trabajo duro y persistente como medio de salvación es el signo de la convicción de un estado de gracia.

Una fórmula que, aunque en buena parte carente de significado para el hombre emancipado de hoy, se convirtió en el foco de vigoroso sentimiento entre los puritanos es la glorificación de Dios como fin supremo de la existencia. Aunque era familiar a oídos cristianos —en el catolicismo medieval también se utilizó la expresión—, ahora se arropó con un nuevo significado y un nuevo énfasis. Dios debe ser glorificado, pero determinados controles institucionales canalizaron esta glorificación en direcciones particulares, con una variedad de efectos sociales. A quienes la nueva fe proporcionaba fuertes motivaciones, se los acució a alcanzar la meta de la utilidad para los semejantes, de utilidad para la sociedad.

El estudio de los fenómenos naturales es un medio efectivo para poner de relieve la gloria de Dios. Esto no implica que los descubrimientos de Newton y otros científicos puedan ser atribuídos directamente a la sanción de la ciencia por la religión. Los descubrimientos e invenciones específicos pertenecen a la historia interna de la ciencia y son en gran medida independientes de otros factores que no sean los científicos. Pero el hecho de que la ciencia se hiciera socialmente aceptable, no pudo por menos de dirigir los talentos a indagaciones científicas, talentos que en otros tiempos habrían hallado expresión en otros campos.

El puritanismo confirma la tesis de que nociones no lógicas con una referencia trascendental pueden, no obstante, ejercer una considerable influencia sobre la conducta práctica. Si bien las fantasías de una deidad inexcrutable no se prestan a la investigación científica, la acción humana que deriva de una concepción particular de esa deidad puede prestarse a ello.

Se ha hecho manifiesto que, en cada época, hay un sistema científico que reposa en un conjunto de supuestos, por lo general implícitos y raramente cuestionados por la mayor parte de los científicos de esa época. El supuesto básico de la ciencia moderna, esto es, del tipo de labor científica que comenzó a prevalecer en el siglo XVII es la convicción difundida e instintiva de la existencia de un orden de las cosas y, en particular, de un ORDEN DE LA NATURALEZA. Esta creencia, esta fe es sencillamente impermeable a la exigencia de una racionalidad coherente.

Los primeros años de Isaac Newton (1642-1660)

El día de Navidad de 1642 nace Isaac Newton en Woolsthorpe (Lincolnshire).

Newton tiene una primera infancia sentimentalmente dura e infeliz. Cuando nace, su padre ya ha muerto; y cuando tiene tres años es enviado a vivir con su abuela, pues su madre, Hannah Ayscough, contrae nuevas nupcias con el Reverendo Barnabas Smith. No la «recuperará» hasta que tiene diez años, una vez muerto el Reverendo Smith, y su madre regresa a la casa de Woolsthorpe con tres nuevos hijos y doscientos libros de teología.

A los doce años es enviado a Grantham, a la Free Grammar School, institución educativa de prestigio, que tuvo también entre sus bancos a Henry More (1614-1687), el neo-platónico de Cambridge.

Isaac Newton se aloja en la casa del boticario y es un muchacho pensativo y silencioso, que aprende rápidamente el latín, la lengua necesaria para acceder a la cultura superior.

No es un «niño prodigio» y muestra una gran aptitud e imaginación en los trabajos manuales. Fabrica muñecas y molinos de viento; se apasiona en la construcción de relojes de sol y es un maestro en «volar» cometas. Siente una gran curiosidad por las reacciones químicas que presencia en la trastienda de la farmacia.

La lectura de la Biblia es una de las actividades más importantes en la escuela. Cuando está de regreso en su casa de Woolsthorpe, durante las vacaciones, se refugia en lugares apartados y se concentra en la lectura de los libros de teología de su difunto padrastro. Su poderosa imaginación emprende aventurados viajes, alejados de los caminos de la ortodoxia religiosa. Esto constituirá su «secreto», que mantendrá y alimentará a lo largo de toda su vida, siendo una más de las componentes de la personalidad retraída y neurótica que se va formando en él.

En cuanto a su formación matemática durante este período, se tenía la impresión de que no pasaba de un cálculo aritmético elemental y de unas reglas de determinación de áreas de figuras. Sin embargo, recientemente, D.T. Whiteside —gran especialista en la obra matemática de Newton y autor de una impresionante recopilación comentada de aquélla en ocho volúmenes: «The mathematical papers of Isaac Newton»— ha descubierto un cuaderno de apuntes fechado en 1654, presumiblemente perteneciente a Henry Stokes, maestro de Newton, en el que se contemplan temas y argumentos matemáticos no tan elementales.

En 1659, Newton es reclamado por su madre para ser instruído en las tareas de dirección de sus posesiones agrícolas. Nueve meses más tarde, y ante la total falta de disposición para ello, Newton es devuelto a Grantham tras la decisión familiar de que se prepare intensamente durante un breve período, antes de su ingreso en la Universidad. Mrs. Clark, la esposa del boticario, lo recomendará, maternalmente, a su hermano Humphrey Babington, «fellow» de la Universidad de Cambridge, que será su protector en los próximos años.

Los años de estudiante en Cambridge (1660-1664)

En 1661, la Universidad de Cambridge es una venerable institución con 400 años de vida, pero no está en su mejor momento. Va a sufrir las hostilidades de los nuevos y poderosos realistas que le harán pagar sus simpatías por los puritanos. Por otra parte, hay un desfase entre los currículos oficiales, impregnados todavía de escolasticismo, y la realidad de una revolución científica en pleno desarrollo.

Ingresa en el Trinity College como «subsizar», esto es, como un estudiante pobre que tendrá que realizar trabajos, en ocasiones, humillantes, para su manutención.

Newton se vuelca en los estudios del currículo oficial. Perfecciona el Latín y el Griego. Estudia la Lógica, la Etica y la Física aristotélica, pero pronto va a perder el interés por el saber oficial y se sumerge en la lectura de Henry More y de Descartes; de Galileo y de Hobbes; de Wallis, Gassendi y muchos otros. Tiene a su disposición la magnífica Biblioteca de la Universidad y unas inmensas ganas de saber.

Especial importancia, pensamos, tiene para Newton el descubrimiento del pensamiento cartesiano. Es, seguramente, a través de Henry More, entusiasta cartesiano en una primera etapa, que Newton entra en contacto con el libro que más le va a influir en esta fase de su formación: «El discurso del método, seguido de la Dióptrica, la Meteorología y la Geometría».

En la segunda edición latina de Van Schooten, comentada y ampliada, Newton va a pasar muchas horas venciendo las dificultades de lectura que encierra un libro como «La Geometrie». Pero, sacará dos consecuencias fundamentales:

— Para aspirar a ser un filósofo de la naturaleza, hay que aprender el arte de las matemáticas, manipular con habilidad las técnicas del cálculo, en un mundo que exige conocimientos cuantitativos. Las matemáticas, no como un fin en sí mismo, sino al servicio de la Física y de la Filosofía de la Naturaleza.

— No hay problema que no pueda ser resuelto si actuamos con el método adecuado y con la necesaria tenacidad.

Otra obra, cuya lectura deja profunda huella en el joven Newton es los «Discursos...» de Galileo. En ella descubre, maravillado, el sistema heliocéntrico y las increíbles complejidades de los espacios. Confirma, una vez más, que es el lenguaje matemático el adecuado para indagar en los enigmas de la Naturaleza.

A estas alturas, Newton ya ha decidido que su vía será la de la filosofía mecánica y su herramienta fundamental las matemáticas. Y se pone a la labor de una manera febril, trabajando dieciseis horas diarias, siete días a la semana y así durante muchos meses.

El carácter solitario y retraído de Newton se acentúa y hay que destacar su formación autodidacta. Siguiendo las pautas cartesianas, se hace un consumado algebrista, completando su formación con las obras de Vieta y Oughtread. Aprende de Wallis, en su «Arithmetica infinitorum», a usar sin temor —y sin rigor— los algoritmos infinitos. (cuadraturas, cálculos de tangentes, máximos y mínimos, indivisibles aritméticos, infinitesimales). Descuida el estudio de la geometría de los griegos. Lee superficialmente los libros aritméticos de «Los Elementos» de Euclides. No conoce los libros de Apolonio y de Arquímedes.

Cuando en abril de 1664, Newton se examina de matemáticas con Barrow, éste descubre con sorpresa, que Newton conoce y maneja la Geometría de Descartes sin haber estudiado a fondo la Geometría de Euclides, de la que Barrow es el traductor a la lengua inglesa además de profundo admirador de los métodos geométricos de los griegos.

La mente preclara de Barrow reconoce los rasgos de una gran inteligencia y no sólo no le reprocha el poco conocimiento de la materia a examen, sino que se hará su valedor en el futuro y tomará importantes decisiones que afectarán positivamente a la vida de Isaac Newton.

Una vez superado el examen de «undergraduate», Newton tiene asegurada su permanencia en la Universidad por cuatro años más, tras los que podrá aspirar a la condición de «fellow». Ha mejorado su condición y ahora recibe, incluso, una pequeña paga.

Los «Anni Mirabiles». (1665-1666)

A finales de 1664, Newton abre una entrada en su cuaderno de notas con el título de «Questiones quaedam philosophae», en el que se dejan abiertos una serie de temas, que constituyen una prefiguración de sus programas de investigación. Pero inmediatamente vuelve al estudio de las matemáticas, a las que dedicará todo su tiempo en los dos siguientes años, en los que conseguirá avances importantísimos:

A comienzos de 1665, El teorema del binomio, con el que abrirá las puertas al cálculo con las series infinitas.

A finales de 1665, El método de las fluxiones, o cálculo diferencial, ligado a encontrar la tangente a una curva.

En 1666, El método inverso de las fluxiones, o cálculo integral, ligado a encontrar el área de una curva.

Estos dos «años maravillosos» de invención, son los años de la peste que asoló Inglaterra y que hizo cerrar las puertas de la Universidad de Cambridge. Newton pasó este tiempo en el campo, en su casa de Woolsthorpe, a excepción de algunas breves visitas que hacía a su protector Humphrey Babington en Boothby Pagnell, cerca de Grantham. Pero aún tuvo tiempo de esbozar su teoría de los colores y según el propio Newton, en recuerdos evocados medio siglo después:

> *«...el mismo año empecé a pensar que la gravedad se extiende a la órbita de la luna y deduje que las fuerzas que mantienen los planetas en sus órbitas debían ser proporcionales a la inversa de los cuadrados de sus distancias a los centros alrededor de los que giran... Todo esto ocurrió en los dos años de peste de 1665-1666. Pues en aquellos días estaba en mi mejor edad mental para la invención, y me interesaban las matemáticas y la filosofía, más que en ninguna otra época después».*

En su libro «Never at rest», Westfall nos previene de la mitificación de este período de la vida de Newton, a la cual contribuirían las «memorias» del Newton anciano, que trataría de «embellecer» su biografía de cara a la feroz pugna que mantenía con Leibniz sobre la paternidad del cálculo diferencial.

En cualquier caso, el joven de 24 años Isaac Newton, es consciente en 1666 de la importancia de sus descubrimientos. Pero esto no es más que un entrenamiento. Para él lo importante está por venir, la Optica, la Mecánica Celeste, la Alquimia. En el resto de su vida científica dedicará muy poco tiempo a las matemáticas.

Ciertamente, perfeccionará sus resultados cuando, muy tarde, se decida a publicarlos. En la década de los ochenta, Newton «descubrirá» la matemática de los griegos, la geometría euclídea, el rigor. Se aproximará a la definición moderna de límite, y pretenderá presentar sus «Principia...» al estilo geométrico de los antiguos. Pero todo ello será inútil porque la matemática verdaderamente importante y la que usará en sus «Principia...» es la matemática de los «amni mirabiles», la matemática de su etapa cartesiana y algebraica, cargada de inventiva y preñada de fuerza fáustica.

Como dijo el economista J.M. Keynes (1883-1946), la combinación más extraordinaria que se haya dado en mente humana de intuición y voluntad de retener un problema en su mente el tiempo necesario hasta resolverlo, hacen de WOOLSTHORPE - NEWTON - (1665-66), el conjunto ESPACIO - HOMBRE - TIEMPO más fecundo de la Historia.

El teorema del binomio

> *«O binómio de Newton é tão belo, como a Vénus de Milo*
> *O que á, é pouca gente para dar por isso»*

Con estos versos, el poeta portugués F. Pessoa mostraba su admiración por la belleza estructural que advertía en el desarrollo del binomio de Newton, cuando era estudiante de bachillerato.

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

....

Que los coeficientes numéricos del desarrollo del binomio n-ésimo (n, número natural), había que buscarlos en la fila n-ésima del triángulo aritmético, también llamado de Tartaglia o de Pascal, era un hecho ya conocido por los matemáticos chinos en el siglo XIII. Si el binomio lleva asociado el nombre de Newton, es porque éste tuvo el mérito de generalizar este desarrollo a potencias fraccionarias y negativas. (Era reciente el convenio de escribir $\sqrt[n]{a^m}=a^{m/n}$ y $\frac{1}{a^n}=a^{-n}$).

Hasta 1660 no se conocía una fórmula que diese en general los números de la fila n-ésima del triángulo aritmético. Pensamos que a Newton, convencido de la existencia de armonías preestablecidas, no le resultó muy difícil conseguir demostrar

$$X_{m,n}=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}$$

donde $X_{m,n}$ denota el término n-ésimo de la fila m-ésima. (La numeración de los términos de una fila, empezará en el cero, y claramente $X_{m,0}=1$).

Entonces, Newton se plantea la validez del desarrollo para exponentes fraccionarios y negativos. Obtiene los siguientes desarrollos:

$$\frac{1}{(1+x)^3}=(1+x)^{-3}=1+(-3)x+\frac{(-3)(-4)}{1\cdot 2}x^2+\frac{(-3)(-4)(-5)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3\dots=$$

$$=1-3x+6x^2-10x^3+15x^4+\dots$$

y análogamente,

$$\sqrt{1-x}=(1-x)^{1/2}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{128}x^4-\frac{1}{256}x^5-\dots$$

Así pues, se encuentra un desarrollo algebraico infinito, pero Newton no se arredra ante sumas infinitas pues su espíritu está ya preparado con la lectura del «Arithmetica infinitorum» de Wallis. Comprueba que:

$$(1+x)^3 \cdot (1 - 3x+6x^2 - 10x^3+15x^4 - \ldots)=1$$

y que,

$$(1- \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{16} x^3 - \frac{1}{128} x^4 - \ldots)\cdot(1 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{16} x^3 - \ldots)=1 - x$$

El álgebra no le ha engañado. Aunque ¿qué sentido tiene una suma infinita? No se detiene mucho en esta pregunta y le basta con que su nuevo algoritmo le resulte muy útil. Lo comprueba para resultados ya conocidos y lo aplica a muchos otros casos y obtiene siempre resultados perfectamente válidos en la realidad. Más tarde, en 1669, en su «De analysi per aequationes numero terminorum infinitas», justificará el uso de series infinitas de la siguiente manera:

> *«Todo lo que el análisis común (el álgebra) realiza por medio de ecuaciones de un número finito de términos, éste (el nuevo análisis) puede realizar los mismo en todos los casos, por medio de ecuaciones infinitas (series), de tal forma que no he tenido ninguna duda en darle asimismo el nombre de análisis. Porque el razonamiento en éste no es menos cierto que en el otro; ni las ecuaciones menos exactas; aunque nosotros los mortales, cuyo poder de razonamiento está confinado dentro de estrechos límites, no podemos expresar ni concebir todos los términos de esas ecuaciones como para conocer exactamente de ellas las cantidades que deseamos».*

Cuando en 1676, Leibniz, a través de Oldenburg, secretario de la Royal Society, le pregunta a Newton por su ya famoso método de las series infinitas, éste le responde con una carta (*La epistola prior, 1676*), en la que crípticamente le facilita una fórmula, sin demostración, con la que obtendría sus desarrollos en serie:

$$(P+P\cdot Q)^{m/n}=P^{m/n}+ \frac{m}{n} A\cdot Q+\frac{m - n}{2n} B\cdot Q+\frac{m - 2n}{3n}C\cdot Q+\frac{m - 3n}{4n}D\cdot Q+\ldots$$

donde $A=P^{m/n}$ y B, C, D, ... serían el 2.º, 3.º, 4.º, ... término del desarrollo. Para nosotros, y una vez visto lo anterior, no es difícil la demostración:

$$(1+Q)^{m/n}=1+ \frac{m}{n} Q+ \frac{m/n\cdot(m/n - 1)}{1 \cdot 2}Q^2+\frac{m/n\cdot(m/n - 1)(m/n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}Q^3+\ldots$$

multiplicando los dos miembros por $P^{m/n}$:

$$(P+PQ)^{m/n}=P^{m/n}+\frac{m}{n}P^{m/n}.Q+\frac{m/n(m/n-1)}{1\cdot 2}P^{m/n}.Q^2+$$

$$+\frac{m/n(m/n-1)(m/n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}P^{m/n}.Q^3+\ldots$$

y llamando

$$A=P^{m/n},\quad B=\frac{m}{n}A\cdot Q,\quad C=\frac{m-n}{2n}B\cdot Q,\quad \text{etc.},\ldots$$

tenemos la fórmula que en vano trataría de demostrar Leibniz, quien vuelve a escribir a Newton. Este le responde de nuevo (*La epistola posterior, 1676*) con una complicada explicación sobre los motivos y la obtención de la fórmula. Sería interpolando unos resultados sobre cuadraturas de Wallis que conseguiría la idea (una detallada explicación puede encontrarse en González Urbaneja, P. (1992)).

En nuestra opinión, Newton no es sincero con Leibniz y trata de complicarle las cosas al que ya vislumbra como enemigo en potencia. Entre otros resultados que Newton —en esta misma carta a Leibniz— dice haber encontrado con su método de desarrollo en series, se tienen:

— Resolución de la ecuación $y^3 - 2y - 5=0$
— Resolución de la ecuación $y^3+axy+a^2y - x^3 - 2a^3=0$
— Desarrollo en serie de $\operatorname{sen}x$ y sen^2x
— Solución al problema de Kepler (dividir un semicírculo por una línea que pasando por un punto dado del diámetro divide a aquél en dos secciones con áreas en proporción dada) para una elipse.

— Rectificación del arco de una elipse y de una hipérbola.
— El área de una hipérbola con la ayuda del desarrollo en serie del logaritmo.
— La cuadratura de la cuadratriz.
— El volumen de un segmento de un elipsoide de revolución.

En resumen, Newton consigue con su algoritmo de series infinitas una poderosa herramienta que le permitirá calcular raíces con la aproximación deseada, contruir nuevas funciones, realizar cuadraturas, cubaturas y rectificaciones, etc. Todo ello sin haber justificado rigurosamente los fundamentos. Sin preocuparse de la convergencia de la serie, pero estamos aún en una etapa de descubrimiento y avance, y no ha llegado el tiempo del rigor.

El método de las fluxiones

La obra de los matemáticos anteriores a Newton preparó el camino para que éste lograra dar nacimiento a una rama autónoma de la matemática, que hoy llamamos análisis infinitesimal pero que durante mucho tiempo siguió siendo en realidad un cálculo, un conjunto de reglas de gran utilidad y eficacia, puestas en evidencia por sus notables éxitos en las aplicaciones, pero sin unos fundamentos rigurosos.

Aquellos precursores habían tratado y resuelto numerosos problemas relativos a lo que hoy llamamos cálculo diferencial: determinación de rectas tangentes, curvatura y problemas de máximos y mínimos; y determinación de cuadraturas, cubaturas, rectificaciones y centros de gravedad, dentro de lo que hoy llamamos cálculo integral.

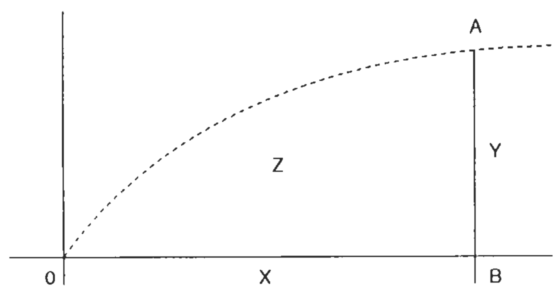
Faltaba el nexo que vinculara esos problemas aparentemente independientes.

Desde un primer momento, a través de Descartes, Newton ha puesto en estrecha relación la geometría analítica y la mecánica. Aprende, en las lecciones que escucha a Barrow, a considerar las curvas desde un punto de vista cinemático.

Su análisis de curvas será un análisis de puntos en movimiento y cuando se interese por el análisis del movimiento lo estudiará a través de consideraciones geométricas del mismo. El movimiento de un punto aparece así, vinculado a unos parámetros de naturaleza geométrica que permiten establecer ecuaciones con incógnitas a despejar. Si se conoce la naturaleza de esas ecuaciones, entonces es posible una matematización de los puntos en movimiento.

Estas ideas están en el origen de su Método de Fluxiones, fundamental en la elaboración futura de sus «Principia...».

Si consideramos la curva de la figura, Newton supone que el punto genérico A se mueve a lo largo de la curva, mientras



que su correspondiente ordenada y, su abcisa x, el valor z de la cuadratura (área OBA), o en general cualquier otra cantidad variable relativa a la curva aumenta o disminuye, cambia, fluye.

A estas cantidades que fluyen las llamó fluentes y a sus velocidades de cambio con respecto al tiempo las llamó fluxiones.

Hay que observar que en realidad los valores de las fluxiones en sí no interesan, sino su razón $\overset{o}{y}/\overset{o}{x}$, que nos da la pendiente de la tangente.

Pero veamos cómo procede en un ejemplo, en su «Tractatus de methodis serierum et fluxionum» que escribe en 1671.

Sea D un incremento de tiempo infinitesimal, entonces los incrementos correspondientes de las fluentes x, y, son respectivamente $\overset{o}{x}D$, $\overset{o}{y}D$; a estos incrementos los llama Newton momentos. Consideremos la curva de ecuación:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Si sustituimos en ella x e y respectivamente por $x + \overset{o}{x}D$ e $y + \overset{o}{y}D$ obtendremos

$$(x^3 + 3\overset{o}{x}Dx^2 + 3\overset{o}{x}{}^2D^2x + \overset{o}{x}{}^3D^3) - a\,(x^2 + 2\overset{o}{x}Dx + \overset{o}{x}{}^2D^2) + a\,(xy + \overset{o}{x}Dy + \overset{o}{y}D\,x + \overset{o}{x}\overset{o}{y}D^2)$$
$$- \,(y^3 + 3\overset{o}{y}Dy^2 + 3\overset{o}{y}{}^2D^2y + y^3D^3) = 0$$

y eliminando ahora $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, que es igual a 0, dividiendo después por D y despreciando finalmente los términos en que figure todavía el factor D, nos queda

$$3\overset{o}{x}x^2 - 2a\overset{o}{x}x + a\overset{o}{x}y + a\overset{o}{y}x - 3\overset{o}{y}y^2 = 0$$

de donde puede despejarse la razón de $\overset{o}{y}$ a $\overset{o}{x}$ con el resultado

$$\frac{\overset{o}{y}}{\overset{o}{x}} = \frac{3x^2 - 2ax - ay}{3y^2 - ax}$$

Nótese que el numerador y el denominador en el resultado final son (salvo un signo) las derivadas parciales f_x y f_y de $f(x,y) = x^3 - ax^2 + axy - y^3$

Con su método de fluxiones, Newton resuelve los siguientes problemas geométricos: trazado de tangentes, mediante la subtangente; máximos y mínimos, anulando la fluxión; determinación de los puntos de inflexión, como máximos o mínimos del coeficiente angular de la tangente; determinación del centro y radio de curvatura.

Pero lo verdaderamente importante, lo que consigue generalizar y unificar todas las técnicas infinitesimales, dando lugar a un Algoritmo Universal, es la demostración del carácter inverso del problema de la cuadratura y de la obtención de la tangente. El resultado que se denomina con el nombre de Teorema fundamental del cálculo, permite obtener el área mediante una antiderivación, cosa que ya había vislumbrado Barrow.

Con Newton la derivación (su cálculo de fluxiones) ocupará el papel principal, quedando la integración reducida a ser el problema inverso.

El profesor de la cátedra Lucasiana (1667-1680)

Newton vuelve a Cambridge en abril de 1667. En octubre de ese mismo año es elevado a la categoría de «minor fellow». El 7 de julio de 1668 adquiere finalmente el grado de «fellow» de la Universidad de Cambridge.

Estrecha su relación con Barrow, a quien comunica sus descubrimientos matemáticos y éste queda tremendamente impresionado ante la magnitud de los logros conseguidos. Cuando a finales de 1668, Barrow recibe de Nicholas Mercator su «Logarithmotechnia» en la que se muestra el desarrollo en serie de log $(1+x)$, insta a Newton a que publique sus resultados, pero lo único que consigue es que ponga en orden sus conocimientos sobre las series y el método de fluxiones, en un escrito que titula «De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas» y que será publicado muchos años más tarde.

El 29 de octubre de 1669 —no han pasado diez años desde su llegada a Cambridge— Newton accede a la Cátedra Lucasiana de Matemáticas, a propuesta del propio Barrow, titular de la misma hasta ese momento y que tres años más tarde accedería al puesto de Director del Trinity College.

Las obligaciones de su nuevo y bien remunerado cargo consistían, una vez a la semana, en impartir una lección sobre disciplinas matemáticas (geometría, astronomía, álgebra, óptica, etc.), y dos horas más para atender dudas. Además debía depositar cada año en la Biblioteca copias de diez de las lecciones impartidas.

En 1670 hace ciertas contribuciones al libro de Barrow «Lectiones geometricae», realiza un estudio sobre las cúbicas (de las cuales consigue enumerar 58 tipos distintas). Vuelve a sistematizar sus conocimientos sobre series y fluxiones en un escrito titulado «Tractatus de methodis serierum et fluxionum» y comienza aquí un largo período en el que se desinteresa de las matemáticas. Su interés se centra en la Optica y en la Teoría de los colores.

Ha decidido realizarse como un verdadero filósofo de la naturaleza. Se suscribe a las «Philosophical Transactions». Lee las obras de Boyle y Hooke.

En 1671 inventa el telescopio de reflexión, combinando sus teorías sobre la luz con su habilidad práctica y artesanal. Hace una desmostración de su invento en una reunión de la Royal Society en Londres. La comunidad científica le aplaude y Newton sienta su reputación en el mundo de la filosofía natural.

En 1672, animado por su éxito, envía a Oldenburg un artículo sobre la teoría de los colores, que es publicado en las «Philosophical Transactions». En esta ocasión sus ideas encuentran el escepticismo y el rechazo de personalidades como Hooke y Huyghens. Profundamente herido por estas críticas, Newton se retira más aún en su introvertido mundo. Las circunstancias parecen dar la razón a su enfermiza negativa a publicar. Su incapacidad de aceptar críticas le hará rehuir cualquier situación que conduzca a polémica.

Los años siguientes son de silencio y de rebelión. Newton se retira a sus aposentos de la fachada norte del Trinity College e instala allí un verdadero laboratorio. Poco a poco se ha ido haciendo con una impresionante colección de libros de alquimia. Construye con sus propias manos, en el patio-jardín de su apartamento, diversos hornos de fundición y se dedica con toda su apasionada fuerza a la tarea de penetrar en el secreto de la constitución de la materia y de las fuerzas que concurren en ella.

Según Westfall, que estudia largamente esta faceta newtoniana, «*Es necesario ver el interés de Newton por la alquimia como una manifestación de rebelión contra los límites que confinaban la filosofía mecánica en el estudio de la Naturaleza.*

Si la búsqueda de la verdad era la esencia misma de su vida, no hay razón para esperar que quedase satisfecho con ese primer amor que para él era la filosofía mecánica. Esta se le había rendido, quizás, demasiado fácilmente.

Insatisfecho, continuó la búsqueda y encontró en la alquimia y en filosofías paralelas una nueva dama de variedad infinita que nunca parecía poderse dominar totalmente...».

Desde el principio, Newton sintió algunas reservas sobre la filosofía mecánica. Compartía con Henry More el miedo a las implicaciones religiosas que se derivaban de una completa separación de espíritu y naturaleza. Ya en 1668 había escrito un ensayo, «De gravitatione et equipondio fluidorum», donde atacaba la filosofía cartesiana y la acusaba solapadamente de ateismo.

Paralelamente al interés por la alquimia se despierta en él de nuevo la inquietud por la verdad teológica. Estudia la cronología de las Sagradas Escrituras y cree descubrir una manipulación de la recta doctrina, que ha tenido lugar alrededor del siglo IV. Atanasio, venciendo a Arrio, ha hecho prevalecer la falsa doctrina de la Trinidad y esto ha llevado a la Cristiandad a su universal corrupción, encarnada fundamentalmente en el Papa de Roma.

Tiene que recurrir a las influencias de su amigo y protector Barrow, para ser liberado de su obligación, como catedrático del Trinity College, de dar sus votos como saderdote anglicano. Seguirá manteniendo, discretamente, durante toda su vida su pertenencia a la secta sociniana, una variedad del arrianismo, extendida en medios intelectuales ingleses.

Cabe decir que en todos estos años, su única actividad matemática es la de redactar, a regañadientes, las cartas a Leibniz en 1676, las Epistolas Prior y Posterior de las cuales ya hemos hablado en el desarrollo del tema del Binomio.

La ruptura con Descartes (1680-1684)

A finales de 1679 muere su madre Hannah Ayscough. Newton entra en la edad madura y como final de un proceso que se ha ido desarrollando paulatinamente, rompe con la filosofía y las matemáticas de su maestro René Descartes.

Desde la perspectiva religiosa, ya hemos visto cómo está convencido que el cartesianismo conduce al ateísmo. Desde el punto de vista físico-cosmológico, Newton que tiene ya en la cabeza las ideas que pronto plasmará en los «Principia...», advierte las deficiencias de los resultados físicos de Descartes: Los vórtices, la negación del vacío, la imposibilidad de interacción a distancia entre dos cuerpos.

Es en las matemáticas, donde a nuestro juicio es menos justificable la ruptura. Newton de pronto, «descubre» los valores de la Geometría de los Griegos. En 1679 se publica póstumamente «Varia opera mathematica» de Pierre Fermat, en la que éste hace una reconstrucción de un libro sobre lugares geométricos de Apolonio. Newton queda muy impresionado y se interesa de nuevo en las matemáticas. Tiene lugar en él una verdadera conversión a lo geométrico, que desde ahora será su ideal de elegancia y de rigor.

Se vuelca en la lectura de los libros VII y VIII de la Mathematical Collection de Pappus. Descubre con admiración los libros de Apolonio y Arquímedes. Se pone a la tarea de resolver geométricamente el problema de Pappus, que él tan bien conocía en su solución analítica a través de «La Geometría» de Descartes.

Newton se convence, en contra de lo que había afirmado Descartes, de que los Antiguos sí habían resuelto el problema para cuatro rectas, y que la demostración es mucho más elegante que la cartesiana. Da su propia solución en siete proposiciones y la hará aparecer en sus «Principia...», a pesar de no tener nada que ver con el tema allí tratado.

Newton se reprochará no haber estudiado a fondo la geometría de los griegos en su etapa de formación. Empieza a sentir la necesidad del rigor en las demostraciones y parece como si quisiera dar un aire de respetabilidad a sus matemáticas. Y ésta la conseguirá, piensa, a través de la geometría.

Escribe a James Gregory que «El álgebra es el análisis de los que no entienden de matemáticas». Por este tiempo, Newton vuelve a releer «la Geometría» de Descartes y en una especie de venganza anota en los márgenes comentarios peyorativos: «error», «esto no es geometría», etc.

Hacia 1683, juntando textos de sus lecciones de álgebra impartidas en los últimos doce años, compila un manuscrito, que será publicado en 1707 con el nombre de Arithmetica Universalis, que será una de sus obras más populares en el siglo XVIII, sin duda, por ser la de más fácil lectura dado lo elemental de su contenido. Leibniz la comentará laudatoriamente en sus Acta Eruditorum, porque contienen «ciertos logros que uno buscaría, en vano, en otros libros sobre análisis».

Sin embargo, en un libro que pretende explicar la geometría analítica, Newton ataca a los modernos analistas:

> *«Consecuentemente estas dos ciencias no deben ser confundidas. Los Antiguos distinguían tan bien la una de la otra, que nunca introdujeron términos aritméticos en su geometría; mientras que recientemente algunos autores (Descartes), confundiendo ambas, han hecho perder la simplicidad, base de la elegancia en la Geometría».*

Los principios matemáticos de la filosofía natural (1685-1694)

En 1664, Hooke observó la trayectoria de un cometa recién aparecido y sostuvo que se curvaba en las proximidades del sol, en contra de la supuesta trayectoria rectilínea. Así lo expuso ante la Royal Society, indicando que la causa de la desviación podía ser la de una fuerza de atracción que se ejercería desde el sol. Ni Hooke, ni ninguno de sus colegas fueron capaces de explicar matemáticamente dicha desviación, pero se empezó a concebir la idea de que el movimiento planetario podría estar sujeto a una influencia similar.

Recurren a Newton, por entonces ya el más renombrado matemático inglés, pero éste, recordando antiguos agravios no se digna contestar. En 1684, el matemático y arquitecto Christopher Wren, y destacado miembro de la Royal Society ofrece una prima a quien resuelva el problema. En agosto de ese mismo año es comisionado Edmund Halley para que se entreviste con Newton. Finalmente, el huraño profesor de Cambridge responde que la curva descrita por un cuerpo sometido a un movimiento inercial y a la vez solicitado por una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, es una elipse.

Halley quiere saber el fundamento de tal certeza y Newton le asegura haber hecho los cálculos en 1665-66, prometiendo buscar los papeles y enviárselos. Newton no halló los papeles y tuvo que emplear algunos meses en rehacer los cálculos.

Halley recibió más de lo que esperaba. En un pequeño tratado de nueve páginas, de título «De motu corporum in gyrum», Newton no sólo demostraba que una órbita elíptica implica una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a uno de los focos de la elipse sino que también resolvía el problema original: La curva sometida a las condiciones impuestas por Halley es una cónica —una elipse— siempre que las velocidades fuesen menores que unos determinados valores. Además, a partir de unos postulados de la dinámica, se demostraban la segunda y la tercera ley de Kepler.

Newton ha encontrado el buen camino, y al igual que le ocurrió en su período de creación del cálculo y de la óptica, avanza a grandes pasos. En Abril de 1686 tiene ya a punto en Libro I y a mediados de 1687 los Libros II y III de su gran obra: «PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA», que se editará ese mismo año, gracias al apoyo económico de Halley.

Dice I. Bernard Cohen, gran especialista de la obra newtoniana, en su obra «La revolución newtoniana y la transformación de las ideas científicas»: «*'Principia...' es un libro extraordinario en varios niveles. Presenta resultados originales en matemática pura (teoría de límites y geometría de las secciones cónicas), desarrolla los conceptos fundamentales de la Dinámica (masa, momento, fuerza), codifica sus leyes principales (las tres leyes del movimiento) y demuestra la importancia dinámica de las leyes de Kepler... el broche de oro es el Libro III, donde expone su sistema del Universo, regulado por la gravedad, por la acción de una fuerza general, una de cuyas manifestaciones particulares es el familiar peso terrestre. Buena parte de la obra trata de las órbitas de los planetas y sus satélites, los movimientos y trayectorias de los planetas y las mareas oceánicas... el triunfo mayor fue, quizás, la explicación de que la causa de las mareas es la atracción gravitacional del sol y la luna sobre los mares*».

Es en los «Principia...» donde se ha desarrollado plenamente lo que se ha dado en llamar «el estilo newtoniano», cuya esencia era la capacidad de separar en dos partes el estudio de las ciencias exactas; a saber, el desarrollo de las consecuencias matemáticas de sistemas o constructos imaginados y la subsiguiente aplicación de los resultados matemáticamente derivados a la explicación de la realidad fenoménica.

El estilo newtoniano consta de tres pasos. El primero comienza usualmente simplificando e idealizando la naturaleza, lo que lleva a un constructo imaginativo en el dominio matemático, un sistema en el espacio geométrico, en el que las entidades matemáticas se mueven en un tiempo matemático según determinado conjunto de condiciones que vienen a ser expresables como relaciones o leyes matemáticas. A continuación, se deducen consecuencias por medio de procedimientos matemáticos, a fin de transferirlas luego al mundo observable de la naturaleza física, en el que, en la segunda fase, se lleva a cabo una comparación y contrastación entre los datos de la experiencia y las leyes o reglas derivadas de tales datos. Todo ello, por lo común, produce una alteración del sistema o constructo matemático original. Así, Newton comienza con una masa puntual con un campo con una fuerza central y deduce una ley de áreas. Más adelante, terminará por tomar en consideración cuerpos de tamaño finito y forma y constitución específica, llegando incluso a considerar las diferentes posibilidades de diversos tipos de medios resistentes a través de los que puedan moverse los cuerpos. En el tercer paso, Newton aplica los resultados obtenidos en los dos anteriores (que se corresponden aproximadamente a los Libros I y II de los «Principia...») a la filosofía natural, a fin de elaborar su «sistema del mundo» (Libro III).

En cuanto al estilo matemático de los «Principia...», Newton, en plena reconversión a lo «geométrico de los antiguos», presenta su obra de una manera que recuerda a Euclides, aunque solamente el «ropaje» es euclidiano. El espíritu de los «Principia...» es esenciamente distinto al espíritu de la geometría griega.

Es importante reseñar la preocupación en estos momentos de Newton por el rigor. Así, en la sección primera del Libro I: «DEL MÉTODO DE LAS RAZONES PRIMERAS Y ÚLTIMAS por cuyo medio se demuestra lo que sigue» Newton quiere salvar las dificultades lógicas y de fundamento que entrañan los métodos infinitesimales y se acerca mucho a nuestro concepto de «límite» actual.

Esta sección primera del Libro I, la constituyen once Lemas, el primero de los cuales dice así: «Las cantidades, así como las razones de cantidades, que tienden a la igualdad constantemente en un cierto tiempo finito y antes del límite de dicho tiempo se aproximan mutuamente más que una diferencia dada, al final se hacen iguales».

En el Escolio final, Newton justifica esta sección de la siguiente manera:

> *«He adelantado estos Lemas para evitar tediosas y largas deducciones ad absurdum al estilo de los antiguos geómetras. Pues las demostraciones se hacen más breves por el método de los indivisibles. Pero como la hipótesis de los indivisibles es más difícil y además, tal método se considera menos geométrico, he preferido reducir las demostraciones de las cosas que siguen a las sumas y razones últimas de cantidades evanescentes, y a las sumas y razones primeras de cantidades nacientes, esto es, a los límites de las sumas y de las razones y, por tanto, he preferido anteponer, con la brevedad que he podido, las demostraciones de dichos límites. Por este medio se consigue lo mismo que con el método de los indivisibles y así podremos utilizar con mayor seguridad principios ya demostrados. Por tanto, en lo que sigue, cuantas veces considere cantidades como si constaran de partículas, o cuantas veces tome pequeñas curvas por líneas rectas, no quiero entender nunca que se trata de indivisibles, sino de divisibles evanescentes, ni tampoco de sumas o razones de partes determinadas, sino de los límites de las sumas y de las razones; y la fuerza de tales demostraciones debe atribuirse siempre al método de los Lemas precedentes...».*

Observemos cómo Newton rechaza las cantidades indivisibles últimas en favor de «cantidades divisibles evanescentes», cantidades que podían disminuir sin cesar. Esta es la explicación más clara que Newton da de sus fluxiones. Pero se da cuenta de que su explicación no es completamente satisfactoria y recurre al significado físico, en un párrafo que recuerda a Zenón de Elea y sus aporías:

«...Pudiera objetarse que no hay proporción última alguna entre cantidades evanescentes, ya que antes de que desaparezcan no son últimas, y, después de desaparecidas, no puede darse ninguna. Pero por la misma razón podría decirse que un cuerpo que llega a un punto en el que se acaba su movimiento no tendría una velocidad última, puesto que dicha velocidad no sería última antes de que dicho cuerpo alcance el punto final de su movimiento, y cuando le haya alcanzado ya no tendrá velocidad alguna. La respuesta es fácil: por velocidad última se entiende aquella con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto final y cesa, por consiguiente, el movimiento, ni tampoco después de haberlo alcanzado, sino aquella con la que se mueve cuando lo alcanza, esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto final y aquella con la que cesa el movimiento. De igual manera ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes la razón de cantidades, no antes de que desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquella con la que desaparece... Existe un límite que puede alcanzar la velocidad al final del movimiento, pero no puede traspasarla. Esta es la velocidad última. Y semejante es la razón del límite de todas las cantidades y proporciones nacientes y evanescentes. Y dado que tal límite es cierto e indefinido, el problema de determinarlo es puramente geométrico. Por lo demás es legítimo utilizar medios geométricos para determinar y demostrar cosas también geométricas.

También pudiera objetarse que si se dan razones últimas de cantidades evanescentes, también se darán magnitudes últimas; y así toda cantidad constará de indivisibles, contra lo que demostró Euclides sobre los inconmensurables en el Libro X de Los Elementos. Pero esta objeción se apoya en una hipótesis falsa. Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tiende a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan in infinitum.

Los últimos años (1695-1727)

El mismo año en que se publican los «Principia...» Newton es elegido diputado del Parlamento. Son frecuentes sus estancias en Londres, donde se relaciona con Locke y otras figuras de la cultura del momento.

Es testigo de los acontecimientos de la «gloriosa revolución» que coloca a Guillermo de Orange en el trono de Inglaterra, sustituyendo al tirano y «papista» Jacobo II.

A comienzos de los noventa la fama de Newton va en aumento y los «Principia...» es el libro que todo europeo culto quisiera entender...

Cuando Newton cumple cincuenta años comienza a dar inquietantes señales de cansancio e inestabilidad mental. Escribe cartas a Locke y Samuel Pepys en las que confiesa su estado turbado y depresivo. Se habla en Londres de «la locura de Newton». Sus amigos y particularmente el poderoso Lord Halifax, deciden retirarlo de su intensísima vida de trabajo intelectual (en la que sigue predominando una frenética actividad alquímica).

Newton es ahora la gran figura de la ciencia inglesa, a contraponer a Leibnitz y otros científicos del continente y encarna los valores de una sociedad inglesa que ya aspira a dominar el mundo.

Newton es separado de su cátedra de Cambridge y nombrado Director de la Casa de la Moneda en Londres, donde llevará una cómoda y tranquila vida, retirado ya de las inquietantes aventuras mentales que estuvieron a punto de sumirlo en la demencia.

En 1705 es elevado a la nobleza por la reina Ana. Desde 1703 es Presidente de la Royal Society, cargo que ostentará hasta su muerte en 1727.

Newton y el cálculo infinitesimal en el siglo de las luces

La influencia de Newton en el siglo XVIII queda sintetizada así por Isaíah Berlín: «*Las ideas de Newton tuvieron un enorme impacto; comprendidos correctamente o no, sus principios y métodos fueron la base del programa del Siglo de las Luces, sobre todo en Francia; este movimiento derivó su confianza y su gran influencia de las espectaculares realizaciones de Newton. Y esto, con el tiempo, transformó —en gran medida generó— alguno de los conceptos y orientaciones centrales de la moderna cultura occidental, en lo moral, político, tecnológico, histórico y social. Ninguna esfera del pensamiento o de la vida escapó a las consecuencias de esta transformación cultural*».

El siglo XVIII fue ante todo la era de la fe en la Ciencia y Newton era el símbolo de la ciencia triunfal.

Veamos la relación de Newton y el cálculo infinitesimal con tres grandes personajes del pensamiento y de la cultura del siglo XVIII: GEORGE BERKELEY (1685-1753), VOLTAIRE (1694-1778) y GOETHE (1749-1832).

George Berkeley, otro ilustre «fellow» del Trinity College, buen estudiante de matemáticas y de física, se dedicó a la filosofía y a la teología, llegando a ser obispo de la Iglesia Anglicana. En 1743, publica «*El analista o un discurso dirigido a un matemático infiel*» en donde con extrema virulencia ataca a las nuevas técnicas infinitesimales y «*en donde se examina si el objeto, los principios y las inferencias del moderno análisis están más distintamente concebidos, o más evidentemente deducidos que los misterios religiosos o los artículos de la fe*».

En este discurso, dirigido seguramente a Edmund Halley, Berkeley protesta del distinto trato que algunos matemáticos otorgan a la fundamentación de las «verdades» del cálculo infinitesimal y a la de las «verdades» de la religión.

«...Se supone que las líneas se generan por el movimiento de puntos, los planos por el movimiento de líneas y los cuerpos por el movimiento de planos. Y, puesto que las cantidades generadas en tiempos iguales son mayores o menores de acuerdo con la mayor o menor velocidad con que aumentan y son generadas, se ha hallado un método para hallar las cantidades a partir de las velocidades de sus movimientos generales. Y dichas velocidades se denominan diferenciales; y la cantidad generada se denomina cantidad fluctuante. Se dice que estas diferenciales son casi iguales a los incrementos de las cantidades fluctuantes, generados en las mínimas porciones iguales de tiempo; y, para ser exactos, en la primera proporción del incremento creciente, o en la última del menguante...

Ahora bien, siendo que nuestro sentido está extrañado y desconcertado por la percepción de objetos extremadamente pequeños, aún así la Imaginación, facultad que deriva de los sentidos, está muy extrañada y desconcertada para estructurar ideas claras sobre las mínimas partículas de tiempo, o los mínimos incrementos generadores en ellas: Y así, mucho más para comprender los momentos, o aquellos incrementos de las cantidades fluctuantes en statu nascenti, en su mismo primer origen o comienzo de existencia, antes de que se conviertan en partículas finitas. Y aún parece más difícil concebir las velocidades abstraídas de tales entidades imperfectas nacientes. Pero las velocidades de las velocidades —las segundas, terceras, cuartas y quintas velocidades, etc.— superan, si no me equivoco, toda comprensión humana... ciertamente, en cualquier sentido, una diferencial segunda o tercera parece un absurdo misterio...

Todos estos puntos, digo, lo suponen y creen ciertos rigurosos detractores de la evidencia de la religión, hombres que pretenden no creer más que lo que pueden ver. Que estos hombres que sólo se han ocupado de puntos claros, puedan admitir sin dificultad otros oscuros, no parece, en absoluto, inexplicable. Pero ellos que pueden asimilar una segunda o tercera diferencial, me parece que no deberían ser escrupulosos en cuanto a ningún punto de la divinidad...».

Tiene razón Berkeley cuando dice que los matemáticos estaban procediendo de manera misteriosa (sin rigor), y el que los resultados obtenidos y los teoremas demostrados con los métodos infinitesimales estuviesen de acuerdo con la realidad física de una manera sorprendente, no hacía más que irritar al buen obispo que veía cómo la «ciencia» se iba perfilando como una nueva y más poderosa «religión».

Fueron numerosos los matemáticos de esta época que replicaron a estas críticas, intentando rigorizar, sin éxito, el cálculo. Habrá que esperar a Cauchy y a los matemáticos alemanes del siglo XIX, para que con el concepto de límite y la fundamentación de los números reales, se dote al Cálculo de una base rigurosa.

Radicalmente distinta va a ser la postura frente a Newton del librepensador francés Voltaire. Ferozmente crítico con Descartes, Pascal y Leibniz, incansable enemigo de la religión organizada y ferviente abogado de la tolerancia, es el gran propagandista de las obras de Newton en Francia.

En sus «Cartas filosóficas» (1734), después de describir y ensalzar la tolerancia de la sociedad inglesa y de su régimen político, hace encendidos elogios de Newton y de su obra científica. Limitándonos a sus opiniones sobre el cálculo infinitesimal, digamos que Voltaire siente un gran respeto y admiración por ese extraño método que consigue resultados tan sublimes, *«Es el arte de nombrar y de medir con exactitud aquello de lo que ni siquiera puede concebirse su existencia»*.

> *«¿Que hay cuadrados de infinito, cubos de infinito e infinitos de infinitos, tales que el penúltimo es nada en relación al último?. Todo esto que parece de entrada el colmo de la sinrazón, es de hecho, la prueba de la finura y de la creatividad del espíritu humano, y el método de encontrar verdades hasta hoy desconocidas».*
> *«Sea como fuere, es por esta GEOMETRÍA DEL INFINITO que Newton ha llegado a los más sublimes conocimientos».*

Es a través de su amiga y amante Madame de Chatêlet, excelente matemática y traductora de los «Principia...» al francés, que Voltaire se familiariza con la obra de Newton. En 1737 publica los «Elementos de la filosofía de Newton», una de las principales obras de divulgación del pensamiento newtoniano en el siglo XVIII.

Newton aparece como un liberador del espíritu humano. El Universo no es ya el abismo insondable y angustioso de Pascal o el «mundo pleno» de Descartes lleno de resistencias. Ahora es una inmensidad límpida y serena que se abre al descubrimiento.

En «Micromegas» (1752), uno de sus «Cuentos filosóficos», el protagonista, un habitante de la estrella Sirio viaja por todo el universo: *«notre voyageur connaissait merveilleusement les lois de la gravitation, et toutes les forces attractives et répulsives. Il s'en servait si à propos que tantôt à l'aide d'un rayon de soleil, tantôt par la commodité d'une comète, il allait de globe en globe, lui et les siens, comme un oiseau voltige de branche en branche»*.

Con una cierta embriaguez cósmica, Voltaire hace viajar a su imaginación por un espacio infinito, homogéneo, donde hay diferencias que están medidas por proporciones que responden a una armonía, en un clima de fraternidad universal.

Voltaire está inmensamente agradecido, y con él toda la Europa culta de su tiempo, a este hombre que con su tesón e inteligencia y con la ayuda de las matemáticas —*«C'est une chose qui me paraît toujours admirable, qu'on ait découvert de si sublimes vérités avec l'aide d'un quart de cercle, et d'un peu d'arithmétique»*—, ha dominado el cosmos infinito, generando una confianza y una certidumbre en La Ciencia.

A finales del siglo XVIII, Goethe, el gran literato y pensador alemán, no ama el cálculo infinitesimal; sin embargo su ansia de infinito no conoce sosiego.

Goethe es decididamente escéptico a la idea de una completa matematización de la naturaleza. Las matemáticas, según él, tratan únicamente una faceta de lo real: la cuantitativa. Pero la Naturaleza no es sólo cantidad sino también calidad.

El Arte es también un intérprete de los misterios del Universo. El Arte y la Ciencia derivan de una única fuente: el Espíritu Universal. El conocimiento es una espontánea función orgánica de la vida y es precisamente desde este sustrato vitalista del mismo, desde donde Goethe intenta poner límites al análisis científico. Este no debe ir más allá del punto en que ponga en peligro la belleza de las cosas.

Goethe desarrolló una teoría sobre la luz y los colores, publicada en 1810, en la cual intenta dar a la percepción un papel básico en la óptica, mezclando física y fisiología en un esfuerzo cualitativo que desconfiaba del carácter exclusivamente cuantitativo de la teoría de los colores de Newton.

En 1800, la ciencia newtoniana está en el máximo de su esplendor. Laplace ha perfeccionado la mecánica celeste de Newton y cuando Napoleón, fino conocedor de la actualidad científica de su tiempo, le pregunta el papel de Dios en aquel soberbio entramado, éste le contesta: «Sire, je n'ai pas besoin de cette hypothèse».

Goethe, ciertamente, no simpatiza con este determinismo mecanicista y en el «Fausto» hace una reflexión sobre la Ciencia y sobre el ansia de sabiduría y sus limitaciones. Fausto es el prototipo de la humanidad descontenta que ambiciona la posesión de todos los saberes.

Goethe, seguramente, no conoció las facetas alquímicas y teológicas de Newton, celadas rigurosamente por los biógrafos-hagiógrafos interesados en presentar a Newton como el racionalista por excelencia, el mayor científico de la edad moderna.

...O sí las conoció y entonces fue Isaac Newton el modelo de su Doctor Fausto.

Bibliografía

Berkeley, G. (1985). Principios del conocimiento humano. Sarpe.

Boyer, C. (1949). The history of the calculus. Dover.

Boyer, C. (1987). Historia de la Matemática. Alianza Univ.

Cohen, B. (1987). La revolución newtoniana y la transformación de las ideas científicas. Alianza Univ.

Cohen, B. (1989). Revolución en la ciencia. Edisa.

Cuesta, N. (1985). Historia de la invención del análisis infinitesimal y de su introducción en España. Ed. Univ. Salamanca.

Fauvel, J. (1987). The history of mathematics: A reader. Mc Millan Press.

González Urbaneja, P (1992). Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Alianza Univ.

González García, J. (1992). Las huellas de Fausto. Tecnos.

Grattan-Guinnes (1984). Del cálculo a la teoría de conjuntos. Alianza Univ.

Hall, R. (1985). La revolución científica. Crítica.

Helena, A. (1988). A hombros de gigantes. Alianza Univ.

Kline, M. (1985). La pérdida de la certidumbre. Siglo XXI.

Kline, M. (1992). El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Tomo I. Alianza Univ.

Koyre, A. (1989). Del mundo cerrado al universo infinito. S. XXI.

Merton, R. (1970). Ciencia, tecnología y sociedad en la Inglaterra del siglo XVII. Alianza Univ.

Newman, J. (1969). El mundo de las matemáticas. Tomo I. Grijalbo.

Newton, I. (1987). Principios matemáticos de la filosofía natural. Traducción e introducción de Eloy Rada. Alianza Univ.

Newton, I. (1740). La méthode des fluxions. Chez de Bure.

Rey Pastor - Babini (1985). Historia de la matemática. Gedisa.

Struik, D. (1969). A source book in mathematics. Harvard U. Press.

Vickers, B. (1990). Mentalidades ocultas y científicas en el Renacimiento. Alianza Univ.

VOLTAIRE (1979). Novelas y cuentos. Bruguera.

VOLTAIRE (1964). Lettres philosophiques. Flammarion.

WESTFALL, R. (1990). Never at rest. Cambridge Paperback Library.

WHITESIDE, D. (1967). The mathematical papers of Isaac Newton. Volume I (1664-1666). Cambridge University Press.

ISAAC NEWTON

Antonio F. Rañada
Facultad de Física. Universidad Complutense

1. Introducción

Si hubiese que designar a un científico como paradigma y representación de todos los demás, no sólo por sus contribuciones sino también por su oportunidad histórica, parece claro que Isaac Newton sería el candidato más firme. Probablemente ningún otro recibió tantos honores en vida. Voltaire, que asistió a los funerales observó con sorpresa cómo le llevaban bajo un palio sostenido por dos duques, tres condes y el Lord Canciller; fue enterrado como un «rey querido por sus súbditos» escribió entonces. El contraste con los otros protagonistas de la revolución científica es enorme. Galileo vivió sus últimos años recluido en su casa sin poder exponer ni defender sus ideas, Copérnico retrasó la publicación de su gran obra hasta el final de su vida —sólo pudo verla en papel impreso ya en su lecho de muerte—, Kepler no llegó a conocer el triunfo de sus famosas tres leyes. El muy conocido epitafio de Alexander Pope indica bien la admiración y prestigio de que gozó Newton en vida.

> Nature, and Nature's Laws lay hid in Night
> God said, Let Newton be and All was light

En buena parte, su fama se debió a la idea extendida de que fue el afortunado descubridor de la única ley fundamental del único universo que existe. Hoy día creemos menos en que sólo haya una ley o, de haberla, no creemos que sea la suya sino la que se alcance si el programa de unificación de las cuatro fuerzas tiene éxito. Sin embargo, la obra de Newton, su método y su estilo siguen conformando, como lo han hecho desde su época, el modo en que los científicos se enfrentan a los problemas de su momento. El único que puede comparársele es Albert Einstein. La fama de los dos se extiende muy afuera de la comunidad de gentes que pueden entender algo de su obra. Se ha dicho incluso que se debe en parte a su propia obscuridad y dificultad, pues, como suele ocurrir con los clásicos, todos querrían haberlos leído, pero muy pocos se atreven a hacerlo.

La opinión ya tradicional sobre Newton, que muchos siguen aceptando, le considera como el primero de los científicos modernos. Se supone que esto significa de los que trabajan siguiendo estrictamente las indicaciones del método científico, lo que les separa radicalmente de los filósofos naturales que florecieron hasta ese momento, que seguían métodos próximos a veces de concepciones mágicas o que no ponían suficiente énfasis en la experiencia y en el análisis sistemático por lo que sus resultados no tenían la objetividad característica de la ciencia de hoy. Pero otro punto de vista se va estableciendo poco a poco, desde que el famoso economista Jhon Maynard Keynes, tras adquirir en una subasta algunos manuscritos de Newton, publicase un estudio en el que daba mucha importancia a sus raíces en la alquimia medieval y lo describía como

> el último de los magos, el último de los babilonios y sumerios... que consideró el universo entero y todo cuanto encierra como un enigma, como un secreto que podía adivinarse por la sola aplicación del pensamiento a ciertos testimonios, ciertas claves místicas que Dios puso en el mundo...

En la actualidad se recuperan esos aspectos de Newton por los que enlaza con prácticas y estilos más antiguos, que probablemente se habían silenciado como impropios de quien es oficialmente el creador de la manera moderna de ser científico. Su figura resulta así más compleja, sin que tengamos que renunciar a usarlo como paradigma del científico porque la ciencia es una actividad humana mucho más ambivalente y compleja de lo que el estereotipo reinante suponía.

2. *Vida*

Su vida se desarrolló en tres lugares: Lincolnshire (1642-61 y 1665-67), Cambridge (1661-65 y 1667-96) y Londres (1696-1727).

Fue un hijo póstumo de una familia campesina de Woolsthorpe, en el Lincolnshire, de buen nivel económico, pero de poca cultura. Estudió en la escuela de Grantham, pueblo próximo, hasta que a los 17 años empezó a administrar la propiedad familiar, lo que resultó desastroso pues no se ocupaba de las cuestiones prácticas de tanto leer libros. Al cabo de pocos meses se trasladó a Cambridge, para entrar en el Trinity College de esa universidad.

Allí estudió filosofía aristotélica, lógica, ética y retórica. Más tarde, y de modo autodidacta empezó a leer a algunas de las nuevas figuras del siglo XVII, como Descartes, Kepler, Galileo y Gassendi. En 1665 obtuvo el título de Bachiller en Artes. En el verano del mismo año, una epidemia de peste que asolaba Londres llegó a Cambridge y la universidad cerró sus puertas, para evitar los contagios, hasta que remitiese. Newton volvió entonces a su casa en Lincolnshire, donde, durante dos años y en un aislamiento intelectual casi completo, pasó por uno de los períodos más fecundos que ningún creador haya vivido nunca, convirtiéndose en un gran matemático y desarrollando las ideas básicas de la gran mayoría de sus descubrimientos. Es famoso el pasaje, escrito 50 años más tarde, en que resume sus logros de aquel tiempo.

> Al principio de 1665 encontré el método de aproximar series y la regla para reducir cualquier dignidad de un binomio a series (lo que hoy se llama el binomio de Newton)... en noviembre encontré el método directo de las fluxiones (las derivadas) y en enero del año siguiente la teoría de los colores y en mayo entré en el método inverso de las fluxiones (el cálculo integral) y el mismo año empecé a pensar en la gravedad, extendiéndola a la órbita de la Luna... y de la regla de Kepler (la tercera ley) deduje que las fuerzas que mantienen a los planetas en sus órbitas deben variar inversamente al cuadrado de sus distancias al centro alrededor del que giran: de ahí comparando la fuerza necesaria para mantener la Luna en su órbita con la fuerza de la gravedad en la superficie de la Tierra hallé la respuesta... Todo esto ocurrió en los años de la peste de 1665-66. Pues en aquellos días yo estaba en lo mejor de mi edad para la invención en matemáticas y filosofía, más que en cualquier otro momento desde entonces.

¿Cómo pudo conseguir algo tan asombroso? La opinión de Keynes se ha hecho célebre.

> Creo que la clave está en su poder inusual de introspección concentrada y continua... Su don especial era el poder de mantener en su pensamiento un problema puramente mental hasta entenderlo completamente... Podía pensar en un problema durante horas, días o semanas, hasta llegar a sus secretos.

En 1667, se reintegró a la Universidad de Cambridge, cuando ésta reanudó sus actividades. A los 26 años fue nombrado allí Profesor de Matemáticas, puesto que ocupó durante 32 años, tiempo que dedicó a la teología, alquimia, óptica y a escribir sus *Principia* que aparecieron en 1687.

En sus últimos 30 años vivió en Londres, como un académico retirado, gozando de gran prestigio y acumulando poder.. Fue nombrado director de la Casa de la Moneda, puesto en el que mostró una gran eficiencia. Entre sus deberes figuraban la acuñación, determinando la ley de las monedas para estabilizar las crisis económicas, y la persecución de los falsificadores. Se le atribuye la invención de las estrías que llevan las monedas, lo que en esa época se hacía para que se notase si alguien había limado su borde para recoger las virutas de oro.

3. Los Principia

Newton consideraba a su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* como su mayor logro, algo más que un tratado de física; así se manifiesta en la atrevida declaración que figura al principio de su Libro III de que, a partir de sus principios, va a «demostrar la constitución del Sistema del Mundo». Pocos negarán que se trata de la mayor joya de la historia de la literatura científica, de la que se han hecho más de cien ediciones desde que apareció en 1687.

El 24 de noviembre de 1679, Robert Hooke escribió a Newton proponiéndole iniciar una correspondencia privada sobre cuestiones científicas. Seis años antes, habían tenido una agria discusión pública sobre la naturaleza del color y la dispersión de la luz en un prisma. Desde entonces Hooke había llegado a ser Secretario de la Royal Society. La carta era cordial e invitaba a Newton a comentar la idea de «compounding the celestiall motions of the planetts (out) of a direct motion by the tangent & an attractive motion towards the central body». Según Bernard Cohen, Newton no había comprendido aún la posibilidad de descomponer el movimiento en uno tangencial y otro centrípeto, sino que pensaba en términos de fuerza centrífuga. Hooke sugería además en su carta que la fuerza centrípeta varía inversamente al cuadrado de la distancia al Sol. Pero parece que no sabía obtener consecuencias de su buena idea, por faltarle la base matemática para trabajar con infinitésimos, y no conocía o no comprendía la ley de áreas de Kepler. Por eso, necesitaba la ayuda de Newton.

El 28 de noviembre, Newton contesta a Hooke diciéndole que no recordaba tal hipótesis, es decir, que la idea era nueva para él. Le propone volver a un problema que le había ocupado otras veces: el efecto de la rotación de la Tierra sobre un grave en caída libre. Si un grave pudiese atravesar la superficie de la Tierra, ¿qué paso seguiría? Newton opinaba que una espiral, pero Hooke, en una carta del 9 de diciembre, le corrigió, al decirle que sería una elipse, diciéndole que un objeto cayendo a través de la Tierra y el movimiento de un planeta son casos de movimiento compuesto de uno directo y una atracción hacia un centro. Hooke insistió en su idea en varias cartas durante las semanas siguientes. Newton fue capaz de probar la sugerencia de Hooke, pero parece ser que no lo comunicó a nadie, una prueba más de su carácter reservado y cauteloso.

La idea de escribir los «*Principia*» vino de una visita que Edmond Halley hizo a Newton en agosto de 1684 para continuar algunas discusiones que habían tenido meses antes con Robert Hooke y Christofer Wren sobre la posibilidad de que la forma elíptica de las órbitas de los planetas pudiese deducirse de que la fuerza sobre ellos variase como la inversa del cuadrado de la distancia. Hooke afirmaba disponer de una prueba que no quería dar a conocer. Newton, tras decir a Halley que él lo había probado ya hacía años, empezó a redactar un artículo titulado *De motu corporum in girum (Sobre el movimiento de los cuerpos en una órbita),* que terminó en noviembre. Comprendió entonces la enorme importancia de sus ideas y concibió la idea de escribir un tratado sobre el movimiento en el que se desarrollase la Dinámica Astronómica. Ese fue el origen de los *Principia,* escritos en los años 1685-86.

Se trata de una investigación matemática sobre las fuerzas y los movimientos de los cuerpos, tanto en la Tierra como en todo el Universo, lo que importa mucho porque es la primera vez en la historia que se aplican las mismas leyes en todo el Cosmos. Consta de una Introducción y tres Libros. Newton sigue el esquema de los *Elementos* de Euclides, empezando con definiciones y axiomas y continuando con proposiciones, teoremas, lemas, problemas, corolarios, y escolios. Hay poca álgebra y mucha geometría, junto con la matemática de los infinitésimos que él mismo había inventado. En la Introducción enuncia sus tres leyes del movimiento. En el Libro I prueba que, si un planeta cumple la ley de áreas de Kepler, la fuerza que actúa sobre él debe ser inversamente proporcional al cuadrado de las distancias y viceversa. Considera después varios problemas de mecánica celeste y de geometría de cónicas. El Libro II se dedica al estudio de los movimientos de los cuerpos en medios fluidos que oponen resistencia. El Libro III, titulado *Sobre el sistema del Mundo,* aplica los resultados del Libro I a los planetas, cometas y satélites. En particular, demuestra que la fuerza de la Tierra sobre la Luna es de la misma naturaleza que sobre cualquier objeto en la superficie de la Tierra, lo que le permite formular su teoría de la Gravitación Universal.

Nos ocuparemos aquí de dos cuestiones: La génesis de sus tres leyes, especialmente de la segunda, y su descubrimiento de la Gravitación Universal.

Sus tres leyes en su forma original son (en la traducción de Eloy Rada).

Ley primera: Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o de movimiento a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado.

Ley segunda: El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

Ley tercera: Con toda acción, ocurre siempre una reacción igual y contraria: O sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.

La idea de inercia era una novedad de la física del S.XVII y completamente ajena a la aristotélica. La novedad consistía en pensar que un cuerpo puede permanecer en un estado de movimiento sin ningún agente motor. La misma idea, que aparece por primera vez en Descartes, de que el movimiento es un estado, no un proceso como suponía la tradición, es un cambio importante. Pues antes se admitía que el reposo era un estado, pero no el movimiento. Para Newton fue muy importante la influencia de Descartes de quien aprendió la idea de inercia y parte del lenguaje que iba a utilizar más tarde. Hay también muchas semejanzas formales entre pasajes de los *Principia* y de los *Principios de Filosofía* cartesianos. La misma denominación de Newton, «Axiomata sive Leges Motus» (Axiomas o leyes del movimiento) recuerda mucho a la que usó Descartes «Regulae quaedam sive Leges Naturae», incluso los títulos de las dos obras son casi iguales.

En la obra de Descartes, la inercia aparece separada en dos leyes distintas 1. Que todos los cuerpos perseveran en el mismo estado; lo que se mueve continúa moviéndose. 2. Que todo el movimiento es, por sí mismo, rectilíneo. Es curioso que, en algunos textos anteriores de Newton, su primera ley aparece también dividida en dos. Hasta hace unas décadas se consideraba a Descartes como un enemigo al que Newton había atacado sin mencionarlo, pues los *Principia* suponen un golpe mortal para la teoría cartesiana de los vórtices. Sin embargo desde la década de 1960, muchos estudiosos han considerado la influencia de Descartes sobre Newton, especialmente en su formación, encontrando muchas influencias de léxico y varias expresiones que Newton tomó de Descartes. Una de ellas, señalada por Bernard Cohen es «quantum in se est» en el sentido «por sí mismo», frase que aparece ya en Lucrecio, quien la usó en su exposición de la teoría atomista, como una anticipación de la inercia, hablando de su movimiento natural.

En la época de Newton se consideraban tres tipos de fuerzas que afectaban al movimiento de los cuerpos: las percusiones, las de presión y las fuerzas sobre los planetas o los graves. Las dos primeras eran fuerzas de contacto, pero la tercera parecía más bien a distancia, idea que repugnaba mucho entonces (precisamente la teoría de los vórtices de Descartes tuvo su origen en la búsqueda de un mecanismo de contacto para las fuerzas que hoy consideramos que son a distancia). La fuerza parecía algo complejo y confuso. Como ha señalado Bernard Cohen, una muestra del genio de Newton es que fue capaz de generar una idea general de fuerza aplicable al sistema solar, partiendo de la más aceptable de fuerza impulsiva por contacto.

La segunda ley en su formulación moderna dice

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

(la forma fuerza igual a masa por aceleración fue introducida en el XVIII por Euler). Pero Newton no usó ecuaciones. Usándolas, parece que su ley se expresaría más fielmente como

$$F = k\Delta(mV)$$

Newton, en su segunda ley, habla de «cambio de movimiento», lo que debe entenderse como «cambio de la cantidad de movimiento» que, según la definición II se mide por el producto de la masa y la velocidad (El dice «de la velocidad y la cantidad de materia conjuntamente»), es decir, de lo que hoy se llama el momento lineal. Nótese que no dice «tasa de cambio de la cantidad de movimiento» ni «cambio de la cantidad de movimiento por segundo» o algo parecido, a pesar de que muchos lo afirman así. Por lo tanto, lo que se llama fuerza en la segunda ley es, sin ambigüedad, lo que hoy se conoce por «impulso», es decir la integral $\int F dt$ o el producto $F\delta t$. No debe sorprendernos que sea así, porque, en la filosofía mecanicista que se estaba imponiendo, se pretendía explicar todo a partir del movimiento de corpúsculos que interactuaban mediante impactos. Por ello lo que Newton dice es «El cambio del movimiento lineal de un cuerpo es proporcional al impulso que lo produce y ocurre en la dirección de la línea de acción del impulso».

Naturalmente puede sorprender la idea de que Newton no entendía a fondo su ley. Y justamente porque, como cabe suponer, sí la comprendía y ¡muy bien!

A menudo se ha especulado sobre las razones por las que propusiera su primera ley, además de la segunda, ya que, en realidad parece ser un simple caso particular de ella: fuerza nula implica velocidad constante (no cambia la cantidad de movimiento). Bernard Cohen ha señalado algunas razones para ello. En primer lugar, la influencia de Descartes que había dedicado dos leyes a la inercia; también la de Huygens que, en su *De descensu gravium & motu eorum in cycloide* (El descenso de los graves y su movimiento en cicloides), había empezado con dos hipótesis que recuerdan a las dos primeras leyes de Newton. Quizás la más importante razón sea que la ley I tiene un aspecto revolucionario que hoy no apreciamos, al declarar que el movimiento es un estado, como ya había hecho Descartes.

En cuanto a su idea de fuerza, no cabe duda de que la usa en dos sentidos, como lo que hoy llamamos fuerza e impulso. Esto se debe a que entonces se pensaba en términos de fuerzas de impacto y a que él era capaz de pasar de uno a otro, por haber desarrollado una teoría de fluxiones, lo que le permitía entender bien el continuo. Que esto es así se deduce de sus definiciones 7 y 8, que dicen.

Definición 7. La magnitud acelerativa de la fuerza centrípeta es su medida, proporcional a la velocidad que genera en un tiempo dado.

Definición 8. La magnitud motriz de la fuerza centrípeta es la medida de la misma proporcional al movimiento que genera en un tiempo dado.

Parece claro que entendía que la constante K en la ecuación anterior es la inversa del incremento del tiempo y, por eso, no cabe duda de que su idea de fuerza es una generalización de la de fuerza impulsiva.

Es conocida la opinión de Ernst Mach de que la tercera ley constituye la contribución newtoniana más original. Sin duda se originó en el estudio de las colisiones: cuando un cuerpo A choca con otro B, la acción de A sobre B se acompaña de otra de B sobre A. Generalizar esta idea al caso de fuerzas continuas actuando sobre un intervalo de tiempo (para lo que siguió un proceso paralelo al de la segunda ley) es sin duda una gran hazaña intelectual. Su importancia no fue evidente para Newton hasta terminar su «*De motu*», en diciembre de 1864, cuando empezó a establecer la Gravitación Universal, en la que la tercera ley juega un papel esencial.

En el corolario 4 de las tres leyes, señala que «el centro común de gravedad de dos o más cuerpos no cambia su estado de movimiento o reposo por las acciones mutuas de los cuerpos; por tanto, el centro de gravedad común de los cuerpos en interacción (excluidas las acciones o impedimentos externos) o reposa o se mueve uniformemente en línea recta». Como explica a continuación, eso se basa en experimentos de percusiones o en otros en los que hacía flotar en agua piezas de hierro e imanes estudiando su atracción. En uno de ellos se colocan en el agua separados por un obstáculo flotante. Si la acción y la reacción no fuesen iguales, el obstáculo se movería en un sentido, lo que sería contrario a la primera ley para el sistema (A+B+obstáculo). También considera un experimento imaginario en el que la Tierra es dividida en tres partes.

La gravitación universal

Cuando Newton escribió *De motu* comprendió la enorme importancia de las leyes de Kepler, que en ese momento no eran muy apreciadas. Por ejemplo la *Astronomía Carolina* de Streete, que Newton cita para le tercera ley de Kepler ($a^3 \sim \tau^2$) ni siquiera menciona la ley de las áreas. La mayoría de los astrónomos del XVII no usaban dicha ley, ni mucho menos la ecuación de Kepler, para calcular las posiciones de los planetas, sino suponiendo que el radio vector desde el foco vacío gira uniformemente e introduciendo luego algunas correcciones. No es una parte pequeña del genio de Newton que comprendiese la importancia de esa ley y la elevase al lugar que le corresponde. La primera proposición de los *Principia* (libro I, sección II) prueba que, si un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza central, se cumple la ley de las áreas. La prueba consta de tres partes. En la primera, se muestra que un cuerpo que se mueve libremente describiendo una línea recta cumple dicha ley desde un punto cualquiera P. Para ello considera intervalos iguales de tiempo δt, en los que el móvil recorre espacios iguales, siendo iguales también las áreas barridas por el radio vector desde *P*. En la segunda parte, el cuerpo recibe una fuerza impulsiva hacia el punto *P* al final del segundo intervalo. Por ello, en el tercer intervalo se mueve según una recta diferente pero las áreas barridas en intervalos δt son iguales a las de antes. En la tercera el cuerpo recibe una percusión hacia *P* al final de cada intervalo de tiempo y se prueba que se cumple la ley de las áreas.

La segunda proposición de los *Principia* es la inversa: Si se cumple la ley de las áreas, la fuerza está dirigida hacia el centro. Las dos proposiciones implican que la segunda ley de Kepler es condición necesaria y suficiente para que la fuerza sea central. Newton sigue demostrando propiedades del movimiento y llega a la prueba de que las órbitas elípticas requieren un campo de fuerzas inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (Sección III, proposición XI).

¿Cuándo empezó Newton a elaborar su Gravitación Universal? La fecha que merecería ese puesto sería noviembre-diciembre de 1684. En un borrador de *De motu* de noviembre de 1684, se puede leer este escolio: «Por tanto, los planetas mayores se mueven en elipses que tienen un foco en el centro del Sol y sus radios describen áreas proporcionales a los tiempos, tal como Kepler supuso...». Newton no probó nunca este escolio que, estrictamente hablando, es falso pues, como comprendió muy pronto, el foco de la elipse de un planeta está en el centro de masas común con el Sol, porque no sólo es atraído por el Sol, sino que también lo atrae, es una interacción mutua. Si, en ese momento, Newton hubiese ya comprendido la gravitación no habría escrito ese escolio. Se dio cuenta en seguida que ese resultado se aplica solo a un sistema de un cuerpo.

Lo que le permitió pasar al sistema real de dos o más cuerpos fue su tercera ley. Así, en la introducción a la sección XI de los *Principia* dice:

> He expuesto hasta aquí los movimientos de cuerpos atraídos hacia un centro inmóvil, aunque pueda que tal cosa no exista en la naturaleza de las cosas. Pues las atracciones suelen darse hacia los cuerpos y las acciones de los cuerpos atrayentes y atraídos son siempre mutuas e iguales, por la Ley Tercera: hasta el punto de que, si fuesen dos cuerpos, ni el atrayente ni el atraído podrían estar en reposo, sino que ambos girarán en torno al centro común de gravedad y, si fuesen varios los cuerpos, bien sean atraídos por uno y este por los otros, bien se atraigan mutuamente todos, habrán de moverse entre sí de tal modo que o bien esté en reposo el centro común de gravedad o bien se mueva uniformemente en línea recta.

En diciembre de 1684, acaba la redacción de *De motu* en una versión revisada y en ella dice que

> los planetas ni se mueven exactamente en elipses ni recorren dos veces la misma órbita.

lo que lleva a la conclusión de que

> Un planeta tiene tantas órbitas como revoluciones, como le ocurre a la Luna, y la órbita de cualquier planeta depende del movimiento combinado de todos ellos, por no mencionar las acciones mutuas de unos sobre otros.

y más tarde, en una frase que resultó profética,

> Considerar simultáneamente todas estas causas de movimiento y definir estos movimientos mediante leyes exactas y cálculos convenientes excede, a menos que yo esté equivocado, la fuerza del entero intelecto humano.

Un punto merece ser destacado. Newton encuentra las leyes de Kepler a partir de las suyas propias, pero muestra que son aproximaciones, muy buenas, pero sólo eso. Ante ello, distingue entre el reino de las matemáticas, en el que las leyes de Kepler son exactas y verdaderas, y el de la física, en el que son sólo hipótesis o aproximaciones. También aquí se mostró revolucionario y anticipativo. Sin duda, se debe esto a su familiaridad con el cálculo infinitesimal y a su uso de las series.

Newton concluye que «según esta ley, todos los cuerpos deben atraerse entre sí» lo que implica atracción en todas las partículas de los cuerpos, aunque en general las fuerzas son tan pequeñas que «sólo se pueden observar en los enormes cuerpos de los planetas».

El libro III es algo más matemático. En primer lugar, en lo que se llama «la prueba de la Luna», puede identificar el peso de los cuerpos en la superficie terrestre con la atracción de la Tierra sobre la Luna (proposiciones III y IV). Después, identifica la misma fuerza con la que hay entre el Sol y los planetas o entre los planetas y sus satélites y la llama gravedad.

4. *La óptica*

En sus trabajos sobre óptica, Newton desarrolló, al menos tanto como en la mecánica y quizás más, su nuevo estilo de hacer ciencia, posiblemente porque se enfrentó a problemas más difíciles, que no pudo resolver en la misma medida que los relativos al movimiento. Ya en el período de aislamiento en Lincolnshire, había obtenido resultados importantes, especialmente el ser la luz blanca una mezcla de colores. En ese momento, se empezaba a ensayar una teoría mecanicista de la luz. Descartes opinaba que la luz es la presión del éter y que los colores se deben a la tendencia de las partículas del éter a girar. En la luz blanca, el movimiento lineal y la tendencia a girar están compensadas, cosa que no ocurre en la de color. Esto se conocía como la *hipótesis de la modificación de la luz blanca.* El estilo de Newton era diferente al de Descartes y los otros primeros filósofos mecanicistas que combinaban una visión global del mundo (el atomismo por ejemplo) y una filosofía experimental. Newton, sin embargo, prefería eliminar en lo posible las hipótesis (como era la de la modificación de la luz blanca) combinando leyes matemáticas descriptivas y conclusiones experimentales. Así dice en su *Optical lectures* que

> Estas proposiciones sobre los colores no deben ser consideradas hipotéticamente o probablemente, sino mediante experimentos o demostrativamente.

Newton pretendía hacer a la ciencia menos hipotética y más matemática y experimental y fue precisamente en sus trabajos sobre óptica en los que afinó su método. Fueron publicados en (1) *New theory about light and colours* de 1672, que encontró una gran oposición y en donde enuncia su prueba experimental de que la luz blanca es una mezcla de colores «la luz consiste en rayos diferentemente refrangibles», en (2) un artículo que envió a la Royal Society para ser leído, pero no publicado, *An hypothesis explaining the properties of light, discoursed of in my several papers.* En él dice que propone su hipótesis como una ilustración para conveniencia de aquellos que no entienden su trabajo cuando habla en términos abstractos. Especula luego sobre el éter, aunque afirma que la luz no es vibraciones del éter

> Supongo que la luz no es ni éter ni su movimiento vibratorio, sino algo diferente, que se propaga desde los cuerpos lúcidos...(la luz consiste en) multitud de corpúsculos inimaginablemente pequeños y rápidos, de varios tamaños, lanzados desde los cuerpos brillantes a grandes distancias.

y en (3) su tratado *Opticks*, que apareció en 1704. Curiosamente en la primera edición no se habla del éter ni de la naturaleza de la luz, por su horror a las hipótesis innecesarias, pero en las ediciones posteriores incluyó varias *Queries* en las que hipotetiza. Por ejemplo dice, en la edición latina de 1706,

> ¿no son los rayos de luz partículas muy pequeñas emitidas por las sustancias brillantes?

Veinte años después, su idea sobre la luz blanca empezó a aceptarse generalmente.

5. *El programa newtoniano*

Newton creía haber descubierto algo verdaderamente importante y profundo, nada menos que la constitución del sistema del mundo. Aunque su obra se concentra en las fuerzas de gravedad, las elásticas o las de resistencia de un fluido, dice que

> Me gustaría que pudiésemos deducir los demás fenómenos de la Naturaleza a partir de principios mecánicos mediante el mismo tipo de argumentos, pues muchas razones me hacen sospechar que todos ellos puedan depender de ciertas fuerzas por las que las partículas de los cuerpos, por causas aún ignoradas, bien se atraen unas a otras uniéndose en figuras regulares, bien huyen y se separan unas de otras; y, siendo desconocidas estas fuerzas, en vano han intentado hasta ahora los filósofos el estudio de la Naturaleza.

Newton tenía, pues, grandes pretensiones y, debido a ellas y a su éxito, abrió paso a una visión mecanicista del mundo, el llamado, programa newtoniano, en el que todo lo que ocurre es debido al efecto de fuerzas que actúan sobre corpúsculos, en una recreación de la teoría atomista de Leucipo y Demócrito. Los filósofos de la Ilustración tomaron esa idea como base para una filosofía materialista, punto de vista que recibió un fuerte impulso con los trabajos de Laplace sobre el Sistema Solar. Con apoyo en las ideas de Newton, muchos llegaron a concebir el Universo como un inmenso mecanismo de relojería.

Pero eso mismo era interpretado por el mismo Newton de una manera muy distinta. Para él las leyes que acababa de descubrir eran una prueba clara de la existencia de un Dios creador. Así dice:

> Este bellísimo sistema del Sol, los planetas y los cometas solo puede proceder de la sabiduría y el poder de un Ser inteligente y soberano.

Incluso llegó a considerar al espacio y al tiempo como manifestaciones de la presencia divina, llegando a decir que el espacio absoluto es el sensorio de Dios.

BIBLIOGRAFÍA

NEWTON, I. Principios matemáticos de la filosofía natural. Introducción, traducción y notas de Eloy Rada (2vols). Alianza Universidad. Madrid 1987.

NEWTON, I. Principios matemáticos de la filosofía natural. Edición de A. Escohotado y M. Sáenz de Heredia. Editora Nacional. 1982.

NEWTON, I. El sistema del mundo. Introducción y notas de Eloy Rada. Alianza. Madrid. 1983.

KEARNEY, H. Orígenes de la ciencia moderna 1500-1700. Editorial Guadarrama. Madrid. 1970.

BERNARD COHEN, I. La revolución newtoniana y las transformaciones de las ideas científicas. Ed. Alianza. Madrid 1983.

BERNARD COHEN, I. El descubrimiento newtoniano de la gravitación. Investigación y Ciencia, mayo de 1981, p.110.

CHRISTIANSON G. NEWTON. (2 vols). Biblioteca Salvat de grandes biografías. Barcelona.1986.

WESTFALL, R. Never at rest, A biography of Isaac Newton. Cambridge University Press. 1980.

KOYRÉ, A. Newtonian studies. Chapman and Hall. London 1985.

KOYRÉ, A. Del mundo cerrado al universo infinito. Siglo XXI. Madrid 1979.

LEIBNIZ, G y CLARKE, S. La polémica Leibniz-Clarke. Edición de Eloy Rada. Taurus. Madrid 1980.

TRUESDELL, C. Ensayos de historia de la mecánica. Tecnos. Madrid 1975.

SOLÍS, C.- Óptica o tratado de las reflexiones, refracciones, inflexiones y colores de la luz. Alfaguara. Madrid. 1987.

P. M. HARMAN AND A. E. SAPHIRO, editores. The investigation of the difficult things. Essays on Newton and the history of the exact sciences. Cambridge University Press. 1992.

J. FAUVEL ET AL, editores. Let Newton be. A new perspective on his life and works. Oxford University Press. 1988.

ÁTOMOS, PUNTOS Y MÓNADAS

Sobre el fundamento del sistema filosófico de Leibniz

Alberto Relancio Menéndez
Profesor de filosofía
I. B. Realejos

Palabras iniciales

En el periodo en el que vive Leibniz, desde 1646 a 1716, culmina la llamada revolución científica, que desde Copérnico a Kepler, o desde Galileo a Descartes, había puesto las bases para una nueva concepción de la ciencia y de la filosofía, una nueva concepción del mundo que acabará fraguando en la Mecánica Clásica de Newton o en las filosofías postcartesianas de Espinosa o Leibniz, de corte racionalista, enfrentadas al empirismo anglosajón iniciado por Locke y que Hume llevará a sus últimas consecuencias.

Leibniz, un niño prodigio, un trabajador infatigable interesado por todo, un erudito barroco que sabe de todo y de todo escribe, asimilará todos los descubrimientos científicos de su época y participará activamente en ellos, desde las discusiones físicas con los cartesianos (y luego con los newtonianos), hasta sus descubrimientos matemáticos que derivarán en la polémica con Newton por la primacía en la invención del cálculo infinitesimal, o su adaptación metafísica de los descubrimientos biológicos debidos a los microscopistas del momento. Participará en política como diplomático, en discusiones jurídicas, en discusiones teológicas que tenían su vertiente práctica en la unificación de las Iglesias europeas, en la organización de Academias de Ciencias, mantendrá correspondencia y conocerá personalmente a casi todos los científicos, filósofos y personajes cultos de su tiempo, e intentará crear todo un sistema filosófico, que asimilando lo mejor de la tradición, dé cuenta y razón de todo el arsenal de ideas e inventos desarrollados en todos los campos a lo largo del siglo XVII; creando así uno de los grandes sistemas de referencia de la historia de la filosofía occidental.

Su sistema de las mónadas, de las unidades últimas que constituyen toda la realidad, pretende dar cuenta de todos los fenómenos de la naturaleza que en nuestro autor se funden con todos los fenómenos espirituales, será la base metafísica para explicar las leyes dinámicas del mundo, desde todo el comportamiento de los cuerpos hasta la estructura y el desarrollo de las almas racionales humanas, dentro de la perfecta obra de la Creación debida a Dios.

I) De cómo llegó Leibniz a las mónadas, contado por él mismo

He aquí una síntesis, publicada por Leibniz en 1695, para dar a conocer al mundo de los eruditos de su época cuál había sido el proceso de generación de los fundamentos de su sistema filosófico:

«Aunque soy de los que han trabajado mucho en matemáticas, no he dejado de meditar desde mi juventud en la filosofía pues siempre me pareció que era posible establecer en ella algo sólido mediante demostraciones claras. Yo me había internado mucho en el país de los escolásticos cuando la matemática y los autores modernos me hicieron salir, aún muy joven de él. Me encantó su hermosa manera de explicar mecánicamente la naturaleza y desprecié con razón el método de los que sólo emplean formas o facultades con las que nada se aprende. Pero al tratar después de profundizar en los principios mismos de la mecánica para dar razón de las leyes de la naturaleza que conocíamos por experiencia, advertí que no bastaba con la consideración exclusiva de una masa extensa *y que era preciso emplear además la noción de* fuerza, *que es muy inteligible, aunque pertenezca al dominio de la metafísica. También me parecía que la opinión de los que transforman o degradan a los animales en puras máquinas, aunque parece posible, no resulta verosímil e incluso va contra el orden de las cosas.*

Al comienzo, cuando me había liberado del yugo de Aristóteles di en el vacío y en los átomos porque esto es lo que satisface más a la imaginación. Pero ya de vuelta de eso, después de muchas meditaciones, advertí que era imposible encontrar los principios de una verdadera unidad *exclusivamente en la materia o en lo que sólo es pasivo, puesto que su totalidad no es más que una colección o montón de partes hasta el infinito. Ahora bien, como la realidad de la multitud no puede provenir sino de* verdaderas unidades *que no proceden de la multitud y son completamente* *diferentes de los puntos —que como es sabido no pueden componer el continuo— entonces para encontrar estas unidades reales me vi forzado a recurrir a un átomo formal. En efecto, un ser material no puede ser al mismo tiempo material y completamente indivisible o dotado de una verdadera unidad*[1]. *Encontré así que su naturaleza consiste en la fuerza y que de aquí se sigue algo análogo al sentir* [sentiment = *«percepción» acompañada de memoria*] *y al apetito y que había que concebirlas, pues, a semejanza de la noción que poseemos de las* almas. *Pero del mismo modo que no debe emplearse la noción del alma para dar razón del detalle de la economía del cuerpo del animal, yo juzgaba que era preciso no emplear esas formas para explicar los problemas particulares de la naturaleza, aunque fueran necesarias para establecer verdaderos principios generales. Aristóteles las llama* entelequias primeras. *Yo las llamo, acaso más inteligiblemente,* fuerzas primitivas, *que no contienen sólo el* acto *o complemento de la posibilidad, sino incluso una* actividad *original.*

Yo veía que esas formas y esas almas debían ser indivisibles, lo mismo que nuestro espíritu... Pero esta novedad replanteaba las grandes dificultades sobre el origen y la duración de las almas y de las formas. Pues como toda substancia que posee una verdadera unidad no puede comenzar ni terminar sino por milagro, se sigue que sólo podría comenzar por creación y terminar por aniquilación. Así, pues, exceptuadas las almas que Dios quiere aún crear expresamente, yo estaba obligado a reconocer que era preciso que las formas constitutivas de las substancias hubieran sido creadas con el mundo y que siempre subsistieran...» (del *Nuevo Sistema de la Naturaleza y de la Comunicación de las substancias así como de la unión que hay entre el alma y el cuerpo,* artículo publicado por Leibniz en el *Journal des Savants* el 27 de Junio de 1695; ed. Olaso, pp. 460-462).

El texto anterior dibuja muy bien cuál fue el trayecto de Leibniz hacia su noción de mónada —cultismo griego, cuyo significado es **unidad**, que utilizaría no mucho tiempo después de escribir este artículo—, dejando de lado las explicaciones escolásticas, readaptando su fuente aristotélica, y dejando atrás, asimismo, la versión atomista; pero, sobre todo, refleja su constante polémica con el cartesianismo, el cual instauraba su noción de extensión como fundamento de su física, lo que Leibniz no admitirá pues no se podría explicar así ni el movimiento ni el dinamismo en el mundo,

1. Leibniz reescribió un poco más tarde este pasaje como sigue: *«Ahora bien como la realidad de la multitud no puede provenir de* verdaderas unidades *que no proceden de la multitud y son completamente diferentes de los puntos matemáticos que sólo son extremos de lo extenso y de las modificaciones, que como es sabido no podrían componer el continuo. Por lo tanto, para encontrar esas* unidades reales *me vi forzado a recurrir a un punto* real y animado, *por así decirlo, o a un átomo substancial que debe envolver alguna forma o actividad para constituir un ser completo».*

lo que hacía necesario introducir la noción de fuerza, la cual subyace bajo los aparentemente exclusivos movimientos mecánicos de las cosas. También Descartes había establecido la separación tajante entre dos substancias, la material y la espiritual, lo que conllevaría la negación de alma a los animales, así como la difícil solución del problema de cómo conectar el alma y el cuerpo humanos, que Leibniz se propone resolver introduciendo la armonía preestablecida entre las mónadas sincronizadas desde el principio del mundo por Dios, previa reducción del dualismo cartesiano, el de la substancia extensa y substancia pensante, a una única naturaleza espiritual, en la medida en que la extensión, la corporeidad y lo material serán reinterpretados como fuerza, vida, y, en definitiva, espíritu.

La verdadera obsesión de Leibniz es buscar verdaderas unidades reales de lo que existe, algo que es imposible encontrar en lo material, que en cuanto extenso es siempre por definición divisible, pero que tampoco se solucionará buscando unidades matemáticas en cuanto que estas son meras abstracciones de nuestro intelecto, útiles para aplicar a los fenómenos pero que no pueden dar cuenta de la esencia de lo real.

Lo que existe por sí mismo, lo substancial, no puede ser un mero agregado de partes que pueden existir por separado, sino una verdadera unidad, una unidad estructural, orgánica, formal, en cuanto que las formas son, desde el punto de vista cuantitativo, indivisibles, sin partes; ¿acaso nuestra alma puede ser troceada?, ¿pero no habrá algo análogo a nuestra alma en todo lo que existe: unidades reales, principios de actividad, de cambio, fundamento de todo?, ¿no habrá, por debajo de los fenómenos, unidades dinámicas, fuerzas primigenias, que soporten, que funden el mundo donde nos movemos, el mundo de los cuerpos y los movimientos y los choques, el mundo de las sensaciones, los pensamientos y las ideas?

II) ¿Qué es una mónada?

Las mónadas son sustancias simples, sin partes, que forman los compuestos o agregados —los cuerpos—, no tienen extensión ni figura ni se pueden dividir, son los verdaderos átomos —formales, pues no son extensos— de la Naturaleza, los elementos de las cosas. Las mónadas sólo pueden comenzar por creación y perecer por aniquilación (divina), mientras que los compuestos —los cuerpos— empiezan y acaban por agregación y disolución de sus partes.

La mónada no es alterada por nada externo, ni hay ningún tipo de cambios o movimientos internos en ella (entiéndase movimientos mecánicos, producidos por agentes externos y por transposición de partes, como en los cuerpos), lo que sólo ocurriría si tuviera partes; la mónada es cerrada, no tiene relaciones **exteriores** con otras mónadas.

Como no difieren en cantidad, las mónadas difieren en sus cualidades, que es lo que hacen que sean seres, y ninguna es igual a otra sino que se distinguen por sus diferencias internas (al contrario que los átomos materiales, que no tienen diferencias internas, sino que son cualitativamente iguales y tan sólo se diferencian cuantitativamente).

La simplicidad no impide la variedad de las modificaciones en las mónadas, sus movimientos cualitativos o **acciones internas**, que es su forma de establecer relaciones con las cosas que están afuera. Las mónadas están separadas unas de otras por *acciones* **propias** *que cambian continuamente sus relaciones.*

El estado pasajero de una mónada en donde se representa una multitud en una unidad se llama *percepción* y no debe confundirse con la apercepción o conciencia, mientras que la acción del principio interno de cambio del paso de una a otra percepción se llama *apetición;* aunque la apetición no consiga culminar toda tendencia hacia el cambio, hacia ciertas percepciones.

Es necesario señalar que lo que Leibniz entiende por *percepción* no es un proceso psicológico sino un concepto ontológico que hace referencia a los diferentes estados por los que pasa la mónada en su proceso de autodespliegue, estados que son una representación, desde el particular «punto de vista» de cada mónada, del mundo.

«La percepción es, para mí —dice Leibniz—, la representación de una multiplicidad en lo simple; y la apetición es la tendencia de una percepción a otra: pero estas dos cosas están en todas las mónadas, pues si no una mónada no tendría ninguna relación con otras cosas». (citado por Russell, p. 308).

Cada mónada es el centro de una substancia compuesta [2] y el principio de su *unicidad,* y toda mónada está rodeada de una masa compuesta de infinidad de mónadas, que es su *cuerpo propio,* y la mónada central representa lo que está afuera según las afecciones de ese cuerpo.

Las mónadas son los verdaderos átomos de la naturaleza, pero son, como en alguna ocasión las llama Leibniz, átomos metafísicos:

«Sólo existen los átomos de substancia, *es decir las unidades reales y absolutamente desprovistas de partes, que son las fuentes de las acciones y los primeros principios absolutos de la composición de las cosas y como los últimos elementos del análisis de las substancias [compuestas o cuerpos]. Las podríamos llamar* puntos

2. Propiamente la expresión *substancia compuesta* no sería correcta, aunque Leibniz la utiliza normalmente. Las substancias compuestas no son verdaderas unidades reales, sólo son unidades en la medida en que los objetos se presentan a nuestros sentidos como unidades perceptuales o, paralelamente, que nuestro entendimiento, por abstracción, unifica objetos o seres en lo que se podrían llamar unidades (entes) de razón; y es en este sentido en el que Leibniz utiliza la expresión.

metafísicos; *poseen* algo vital *y una especie de* percepción, *y los* puntos matemáticos *son su* punto de vista *para expresar el universo. Pero cuando las substancias corporales están comprimidas, el conjunto de todos sus órganos sólo es para nosotros un* punto físico. *Así pues los puntos físicos son indivisibles sólo en apariencia: los puntos matemáticos son exactos pero no son sino modalidades: sólo los puntos metafísicos o substanciales (constituidos por las formas o almas) son exactos y reales. Y sin ellos no habría nada real puesto que sin las verdaderas unidades no habría en absoluto multitud*». (*Nuevo Sistema de la Naturaleza*, ed. Olaso, p. 466).

Como se ve en el texto anterior, Leibniz distingue tres planos: el de los puntos físicos, que sólo son puntos en la medida en que dependen de nuestra percepción del mundo, y que aunque esta se acrecentara indefinidamente nos llevaría a una situación similar, en la medida que la materia es infinitamente divisible —lo extenso siempre es divisible por definición—, por eso estos puntos son indivisibles únicamente en apariencia; el de los puntos matemáticos, que si bien son unidades formales (no son puntos materiales como serían los átomos, ni siquiera puntos físicos perceptibles) como las mónadas, y en este sentido se pueden hacer corresponder con ellas como sus puntos de vista (una metáfora espacial que expresa un *lugar conceptual*, diríamos, en cuanto *lugar* en un entramado de relaciones de orden de puntos o mónadas), son modos abstractos de las mónadas, pero en cuanto desprovistos de actividad, de cualidades o acciones internas, no son fuerzas primitivas reales que se autodespliegan en su desarrollo interno; y en esto se distinguen de los puntos metafísicos, verdaderas unidades o substancias, con un principio representativo, es decir, que expresan desde su interior lo que está fuera de ellas (esto se llama *entendimiento* en las mónadas o almas racionales), unifican en su interior sus percepciones múltiples, y están vivas en cuanto que son fuerzas, principios energéticos, dinámicos, que cambian y se desarrollan.

Pero las mónadas, como decíamos, se diferencian de los átomos de materia o corpúsculos pero también de los puntos matemáticos. Lo veremos con más detenimiento a continuación.

III) Mónadas frente a átomos y vacío

Las mónadas no se confunden con los átomos. Estos sólo tienen una divisibilidad aparente, pues poseen tres dimensiones, figura y magnitud, y en consecuencia no se puede negar que estén compuestos de partes, como toda sustancia material, y por esto carecen de verdadera unidad.

Los átomos serían indistingibles, todos iguales, al no tener ningún fundamento interno de su distinción, al contrario que las mónadas.

Las mónadas tienen un principio de dinamismo, son fuerzas, con cambios internos constantes, mientras los átomos son inalterables, incapaces de cambio interno, duros e inflexibles, lo que no permitiría el movimiento, mientras que las mónadas son flexibles, forman un mundo fluido y dinámico.

«No hay átomo; *más aún, no hay un cuerpo tan exiguo que no esté actualmente subdividido... aparte de que no puede darse ninguna razón para que un cuerpo de pequeñez determinada no sea ulteriormente divisible*». (*Verdades Primeras,* ca. 1689, ed. de Olaso, p. 344).

«En efecto, un ser material no puede ser al mismo tiempo material y completamente indivisible o dotado de una verdadera unidad». (*Nuevo sistema de la Naturaleza*, ed. Olaso, p. 461).

La acción y el movimiento no pueden nacer de la extensión ni de la masa o materia pasiva, puramente impenetrable e inercial al movimiento, tiene que haber una fuerza motriz primitiva —lo que Leibniz llamará materia segunda o activa— añadida a la extensión y a la masa, una fuerza activa que actúa siempre y que se diversifica por el choque con otros cuerpos, «*y en cuanto constituye con la materia [pasiva] una substancia realmente única o sea una unidad por sí, forma lo que llamo mónada*». (*Sobre la Naturaleza misma,* 1698, ed. de Olaso, p. 492-3).

Con una materia uniforme, como los átomos o corpúsculos, sin diferencias intrínsecas sino tan sólo de lugar, en un pleno, no se puede explicar los diferentes estados del mundo, ni las diferencias de los cuerpos, si no se recurre a fuerzas primitivas, de las que derivan las fuerzas derivadas o ímpetus, que dan una direccionalidad a los cambios y a los diferentes estados presentes y futuros, lo que sí daría razón de las diversas apariencias que percibimos en nuestro mundo.

«Pues el cuerpo no sólo en el momento presente de su movimiento está en un lugar a su medida sino que tiene también el conato, es decir, el impulso (nisus) *a cambiar de lugar de modo que el estado siguiente al actual se sigue por sí mismo, por la fuerza de la naturaleza. De otro modo en el momento presente (y por tanto en cualquier momento) el cuerpo A, que se mueve, no se diferenciaría en nada del cuerpo B que está en reposo»*. Porque si no en una masa llena y uniforme no habría ninguna diferencia en los cuerpos «*y además si el estado de un momento difiere del estado de otro momento sólo por la transposición de porciones de la materia iguales y congruentes y semejantes en todo, se sigue manifiestamente que debido a la perpetua sustitución de porciones indistinguibles, es imposible diferenciar los estados del mundo corpóreo en momentos diversos. Pues sólo sería una* denominación extrínseca *la que distinguiría una parte de la materia de otra, denominación tomada, sin duda, del futuro, a saber, que en el futuro estará en tal lugar o en tal otro, pero no hay diferenciación alguna en las cosas presentes. Ni siquiera se la obtendría fundamentalmente del futuro, porque*

nunca se llegaría incluso tampoco en el porvenir a una verdadera diferenciación de las cosas presentes puesto que (a partir de la hipótesis de aquella perfecta uniformidad de la materia en sí misma) no se puede distinguir mediante señal alguna un lugar de otro lugar, ni la materia de aquella materia que ocupa su mismo lugar... Por lo tanto si el movimiento no tiene ninguna marca distintiva tampoco le proporciona a la figura ninguna marca distintiva. Y puesto que todas las cosas sustituidas por las anteriores son completamente equivalentes, **ningún observador, aunque fuera omnisciente, percibiría ni el más mínimo cambio. Por lo tanto todo sucederá como si no ocurriera ningún cambio ni diferenciación en los cuerpos; y a partir de ello jamás podríamos dar razón de las diversas apariencias que percibimos... Por lo cual debe tenerse por cierto... que tales consecuencias son contrarias al orden y a la naturaleza de las cosas y que** jamás en parte alguna se da una semejanza perfecta **(lo que se debe considerar como uno de mis axiomas nuevos y más importantes)»**. (de *Sobre la naturaleza misma, es decir, sobre la fuerza ínsita en las acciones de las criaturas para confirmar y aclarar la Dinámica del autor,* publicado por Leibniz en *Acta Eruditorum* en septiembre de 1698; ed. Olaso, pp. 495-7). «La negrita es nuestra».

La última parte del texto revela cómo el punto de partida de Leibniz para rechazar la homogeneidad de la materia, los corpúsculos macizos semejantes, así como la imposibilidad del vacío, serán los propios fenómenos de la naturaleza y su intento de explicación racional (las leyes físicas que establecerá en su *Dinámica* frente a las cartesianas, y aun antes de conocer y poder discutir las leyes de Newton; los descubrimientos biológicos, debidos sobre todo al microscopio, que tanto le impresionan, etc.). Hay que explicar los fenómenos del mundo, los hechos que nos rodean, piensa Leibniz, y estos son indefinidamente variados, cambiantes y también ordenados, y si por una parte hay que dar cuenta de ellos, por otra hay que remitirlos a su creador, a su causa (y aquí Leibniz salta a la Metafísica y a la Teodicea, que con él se racionalizan al extremo; no haría otra cosa Newton, salvo que éste mantuvo separadas casi del todo sus explicaciones de filosofía de la naturaleza de sus ideas metafísicas o religiosas).

Y así, para Leibniz, el mundo está hecho según una racionalidad matemática, como un problema de máximos y mínimos, donde Dios ha utilizado el menor número de recursos posibles para hacer la mayor cantidad de orden y variedad, magnitud que define la perfección.

«...siempre hay en las cosas un principio de determinación que se debe sacar de una consideración de máximo o mínimo, a saber, que se garantice el máximo efecto con el menor gasto, por así decirlo... sucede como en ciertos juegos en los que hay que llenar todas las casillas de un tablero según leyes determinadas... faltando toda otra determinación [en la creación divina] lo que se realiza es el máximo posible respecto de la capacidad del tiempo y del lugar (o sea del posible orden

de existencia tal como las baldosas se ubican en una superficie de manera que quepa el mayor número en el área prevista.

Por estos ejemplos se puede entender de un modo admirable cómo se aplica en el mismo origen de las cosas cierta matemática divina o mecánica metafísica y cómo tiene lugar la determinación del máximo. Así en geometría, entre todos los ángulos, el ángulo determinado es el ángulo recto. Así también los líquidos vertidos en otros, heterogéneos, toman la forma que posee el máximo, es decir, la esférica... [así] resulta el mundo, en el cual se realiza la máxima producción de posibles». (*Sobre la originación radical de las cosas,* 1697; ed. Olaso, pp. 474-5).

Y así estamos en el mejor de los mundos posibles, donde reina el principio de plenitud: todo está lleno en nuestro mundo, no hay huecos o vacíos; y todos sus seres son diferentes: no hay dos seres iguales —principio de los indiscernibles—; y toda esta infinita variedad está ordenada según el principio de continuidad de lo existente: todo es una escala gradual, que pasa por infinitos niveles sin saltarse ninguno, desde la última mónada hasta Dios; según leyes establecidas, por eso todo tiene una razón de ser y estar en un lugar determinado —principio de razón suficiente—; todo está realizado y armonizado de la forma más perfecta posible —principio de lo mejor—.

Los átomos, así, van contra la ley de continuidad, pues suponen que la dureza infinita y la indivisibilidad absoluta surgen repentinamente al alcanzar cierto estadio de la división; y la rigidez primitiva es una cualidad que carece por completo de razón. Son indiscernibles y al ser puramente materiales carecen de actividad.

«No pueden obedecer [los átomos] a las leyes del movimiento, y la fuerza de dos átomos iguales, que chocaran directamente con velocidades iguales, tendría que perderse; pues parece que sólo la elasticidad hace rebotar a los cuerpos».

«La materia, según mi hipótesis, sería divisible en todas sus partes y más o menos fácilmente, con una variación imperceptible al pasar de un lugar a otro lugar vecino; mientras que según [el sistema de] los átomos, saltamos de un extremo a otro, y de una incohesión perfecta, en el lugar de contacto, pasamos a una dureza infinita en todos los demás lugares. Saltos éstos que carecen de ejemplo en la naturaleza». (textos citados por Russell, p. 273; ver bibliografía).

«...ningún cambio se produce por medio de un salto. *Esto supuesto, se deduce también que* no pueden existir los átomos... *que ningún cuerpo es tan pequeño que no tenga elasticidad y que, por ello, no pueda ser atravesado por un fluido más sutil, y que* no existen los elementos de los cuerpos, *ni se da una materia fluidísima, ni no sé qué glóbulos de un segundo elemento, sólidos exactos y duraderos [contra la física cartesiana]; sino que el análisis procede al infinito».* (*El Especimen de Dinámica,* 1697, en *Escritos de Dinámica,* p. 87).

Para Leibniz la extensión entendida como Descartes se identificaría con el vacío, pues la esencia de la materia es la resistencia o impenetrabilidad que se extiende en el espacio y que lo llena todo, y que es una cualidad primaria de las mónadas. Así Leibniz opone su noción de extensión a la de Descartes, la cual era una extensión geométrica, sin fuerzas, inerte, una pura abstracción para aquél, para el que la extensión es una *difusión* de mónadas, en sí mismas inextensas, que son impenetrables e inerciales en cuanto fuerzas muertas, pero, a la vez, origen espontáneo del cambio y de los movimientos, en cuanto fuerzas vivas.

«... *la noción de extensión no es primitiva sino que se la puede descomponer en sus elementos. Pues en lo extenso se requiere que haya un todo continuo en el que exista simultáneamente una pluralidad. Y para decirlo más ampliamente, la extensión, cuya noción es relativa, requiere, sin duda, que algo se extienda o se continúe, tal como en la leche se extiende la blancura, y en el cuerpo se extiende lo mismo que constituye su esencia: cuya repetición (cualquiera sea) es la extensión. Y estoy totalmente de acuerdo con Huygens... en que el concepto de lugar vacío y de mera extensión es el mismo; y a mi juicio la misma movilidad o la antitypía (resistencia) tampoco se pueden entender únicamente a partir de la extensión sino a partir de lo que subyace a la extensión, que no sólo constituye el lugar sino también lo llena*». (*Advertencias a la parte general de los Principios de Descartes*», redactado en 1691, y corregido en 1697; ed. Olaso, p. 430).

«No hay vacío. *Pues las diversas partes del espacio vacío serían completamente similares y congruentes entre sí, y no podrían distinguirse en sí mismas, de modo que diferirían solamente en el número, lo cual es absurdo...*» (*Verdades Primeras*, ca. 1689; ed. de Olaso, p. 343).

El vacío va contra el principio de perfección metafísica —principio de plenitud— y la necesidad del espacio vacío para el movimiento no es tal si la materia es fluida. Y también se deriva de la negación de la acción a distancia. Contra la extensión como la esencia de los cuerpos argumentaba Leibniz que el espacio vacío es también extenso y no es un cuerpo, ya que los cartesianos indentificaban cuerpo y extensión.

«*Nosotros [Locke y Leibniz] parecemos diferir también respecto de la materia en que al autor cree que debe haber en ella un vacío para posibilitar el movimiento, pues estima que las partes pequeñas de la materia son rígidas. Y yo admito que si la materia estuviese compuesta de tales partes, el movimiento en el* plenum *sería imposible... El espacio, al contrario, debe concebirse como lleno de una materia últimamente fluida, susceptible de toda división, y aun sujeta actualmente a divisiones y subdivisiones* ad infinitum... *En consecuencia, la materia tiene en todas partes cierto grado de rigidez tanto como de fluidez*». (citado por Russell, p. 274).

IV) Mónadas frente a puntos matemáticos

Los puntos matemáticos son abstractos, construcciones mentales, puros modos de la sustancia, que designan la posición, los «*puntos de vista para expresar el universo*», y que, como tal, no pueden componer compuestos ni son sujetos de acción y pasión.

Para empezar a entender lo anterior pasemos revista a una serie de definiciones de Leibniz sobre qué es punto, límite, parte, continuo, que comentaremos inmediatamente.

«*Los puntos, hablando con exactitud, son extremidades de la extensión y de ningún modo partes constitutivas de las cosas; la geometría lo muestra bastante bien*». (carta a Samuel Masson, 1716; ed. Olaso, p. 631).

«*Sin embargo, el continuo no se divide en puntos, ni se divide de todas las maneras posibles; en puntos no, pues los puntos no son partes, sino límites; ni de todas las maneras posibles, pues no todas las criaturas están contenidas en lo mismo, sino sólo una cierta progresión infinita de las mismas. Del modo como quien pusiera una recta y alguna parte bisectada de la misma establecería otras divisiones de quien la pusiera trisectada*». («*Verdades Primeras*», circa 1689, ed. Olaso, p. 344).

«*Lo que está en algo homogéneo se llama* parte, *y aquello en que está se llama* todo. *En otras palabras, parte es un ingrediente [si dada una cosa se da la otra inmediatamente] homogéneo.*

Límite común *es aquello que está en dos entes que no tienen una parte común. Si se entiende que son partes del mismo todo, su límite común se llama un corte del todo.*

Es obvio, pues, que el límite no es homogéneo con lo limitado por él, ni el corte con lo cortado.

El tiempo y el momento, el espacio y el punto, el límite y lo ilimitado, aunque no son homogéneos, son sin embargo homógonos, *por cuanto el uno puede desaparecer en el otro en virtud de un cambio continuo...*

...la ley de la continuidad, *proclamada por mí antes que nadie, en virtud de la cual la ley de los objetos en reposo es como un caso especial de la ley de los que están en movimiento, la ley de los iguales como un caso especial de la ley de los desiguales, la ley de las curvas como un caso especial de la ley de rectas; lo que se cumple cada vez que un género acaba en la cuasiespecie opuesta... la continuidad, en efecto, se halla en el tiempo, en la extensión, en las cualidades, en los movimientos, y en todo tránsito de la naturaleza, que jamás ocurre a saltos*» [3] (*Principios Metafísicos de la Matemática*, ca. 1714-16; ed. Olaso, pp. 583-4 y 590-1).

3. Nota de R. Torretti: «*Entiéndase: cada vez que la variedad de especies de un género se puede ordenar en una serie cuyos miembros difieren cada vez menos del género opuesto, el cual puede en este sentido tratarse como caso especial o cuasiespecie del mismo género, el elemento último o límite de la serie de sus especies*».

Intentemos aclarar algo las definiciones anteriores. En primer lugar, habría que decir que si nos movemos en el dominio de la matemática estamos para Leibniz en un subcampo de lo ideal, de lo posible, y no de lo real, de lo actual (de lo creado). Aquí, como en otros tantos casos en Leibniz, para desconcierto de sus lectores, éste utiliza la misma palabra para denominar cosas diferentes, o bien en ocasiones utiliza un término en un sentido técnico, riguroso, y a continuación en un sentido vulgar, lato. Eso es lo que ocurre aquí, fundamentalmente, con las nociones de continuidad y de parte/todo.

Leibniz llama continuidad a dos cosas. Por un lado, a la continuidad matemática, es decir, ideal, producto de nuestro entendimiento (o del entendimiento divino, donde se encuentran los posibles, las ideas eternas, las esencias), que es continua en el estricto sentido de que no tiene partes constitutivas, no está formada por acumulación de partes hasta formar un todo; lo que sería contradictorio, pues si las partes son tales, estrictamente, serían discretas y no podrían formar, como es lógico, un continuo, que si lo es, debe ser indivisible (lo cual no quiere decir que en él no puedan señalarse límites o extremos, que no son, de ninguna manera, sus partes formantes).

Pero Leibniz también llama continuo a la serie infinita gradual de las mónadas reales que forman por agregación de partes los compuestos o substancias compuestas, los cuerpos y todo lo real que hay en el mundo (el cual, dicho sea de paso, tampoco sería un todo en el sentido estricto, pues en un verdadero todo, como en el verdadero infinito, no hay divisiones, ya que ambos son absolutos). Ya dijimos más arriba que las substancias compuestas son totalidades unificadas por una mónada dominante, pero no *todos* como las propias mónadas, que por definición no tienen partes. Aún así se puede denominar a los compuestos *todos* formados de partes constituyentes porque eso son para nosotros, esto es, para nuestros sentidos, nuestra imaginación y nuestro entendimiento abstractivo (aunque sean todos o unidades subjetivas).

Es decir, en el mundo real sí hay partes constituyentes de totalidades o todos compuestos, pero no en el mundo matemático ideal donde los todos son indiferenciados, continuos en el estricto sentido, y donde, a la inversa, no debería hablarse de partes, pues no son partes constitutivas, sino de límites o extremos que nosotros instauramos en los continuos, dividiéndolos o modificándolos de la forma en que queramos. Pues en sí estos continuos matemáticos son indiferenciados, y podemos dividirlos en partes (utilizando ahora la palabra *partes* en un sentido amplio, no estricto) según nos convenga (puesto que no hay partes previas, ya establecidas, *partes* en sentido estricto); siempre que luego nos atengamos, eso sí, en la construcción o análisis subsiguiente a las leyes matemáticas.

Ahora bien, igual que en Platón el tiempo es una imagen móvil de la eternidad, en Leibniz la continuidad ideal, la que proviene de la confusión de nuestros sentidos e imaginación y de la abstracción de nuestro entendimiento, no es sino una representación (una expresión que mantiene, hasta cierto punto, el orden de las relaciones) de la continuidad real. Pero la continuidad real es heterogénea, cualitativa y discontinua, mientras que nosotros, en nuestro conocimiento nos la representamos, la expresamos como homogénea, cuantitativa y continua, y es así como damos cuenta de los fenómenos de la naturaleza.

Esto se ve claramente en la noción de *extensión*, que comentábamos más arriba. Esta surge como cualidad extensiva a partir de nuestros sentidos y nuestra imaginación, y a partir de ahí creamos la noción abstracta de *extensión matemática*, como algo homogéneo y cuantificable, indefinido e infinitamente divisible, (igual que hacemos a partir de la percepción del cambio, abstrayendo nuestra noción de *duración*). Esto hace posible que podamos aplicar la Geometría a la Física, en cuanto que la masa o materia pasiva es correlativa de la extensión (Geometría que, a su vez, está subordinada a la Aritmética en cuanto que la extensión es una repetición, una multiplicidad de *lo que se extiende*), lo que hacía el mecanicismo cartesiano reduciendo la materia a extensión, lo que para Leibniz es quedarse en el nivel de la imaginación física, pues las fuerzas, el dinamismo de las mónadas, su actividad substancial, está subyacente, en el nivel metafísico, y es el fundamento real de la Dinámica.

Por otra parte, la ley de continuidad está en Leibniz respaldada por su descubrimiento del cálculo infinitesimal, donde se deja de lado la imagen de la geometría elemental de querer construir la continuidad de una línea a partir de puntos-corpúsculos, discontinuos e idénticos, para pasar a ver los puntos como límites de lo continuo, como un punto límite, un punto característico sobre la curva, un ángulo de tangente, un ángulo que no es extenso. Así en la Dinámica el reposo no será más que un movimiento infinitamente pequeño, o no se podría hablar de un cero de aceleración, de una cantidad nula, sino de un límite (no se podrían integrar cantidades nulas), *«on ne peut être induit en erreur, puisqu'il suffit de substituer à un infiniment petit une quantité aussi petite qu'on voudra, pour que l'erreur ne peut être donnée»*.

V) Continuidad matemática, fenómenos y mundo real

Sobre la continuidad uno de los textos privilegiados es el final de la carta a la electora Sofía de 31 de octubre de 1705, recogida en *Filosofía para princesas*, en la cual hemos remarcado los pasajes que nos parecen más interesantes y que no tienen desperdicio para entender la teoría de Leibniz:

«...*es verdad que* **nada impide a la materia estar compuesta por sustancias simples e indivisibles, puesto que la multitud de dichas sustancias o Unidades es infinita. Sin embargo, no ocurre igual con los cuerpos matemáticos o con el espacio, que es algo ideal** *y que no está compuesto por puntos, así como el número abstracto y tomado en sí mismo no está compuesto por fracciones extremas o por la pequeñez última. La fracción más pequeña ni siguiera es concebible, ni hay nada en el número que corresponda a los puntos o extremos del espacio, porque el número no conlleva situación ni relación de existencia. Es cierto que los matemáticos toman a veces una fracción como la más pequeña de todas, porque de ellos depende no seguir subdividiendo y despreciar los errores que, por ejemplo, no pasen de 1/1000000000000. En este sentido recuerdo que Cavalieri empleó un cierto Elemento logarítmico. Se ve así también que el número, sea entero, quebrado o sordo [irracional], no es una cantidad continua en relación a las fracciones, como lo son la línea, el tiempo y el grado de intensión de la velocidad [aceleración]. Así pues, aun cuando la naturaleza consista en un agregado de innumerables sustancias simples, y aunque la duración de las criaturas, al igual que su movimiento actual, consista en un agregado de estados momentáneos, sin embargo hay que decir que el espacio no está compuesto por puntos, ni el tiempo por instantes, ni el movimiento matemático por momentos, ni la intensión por grados extremos.* **La materia, el decurso de las cosas y, en fin, todo compuesto actual, es una cantidad discreta, pero el espacio, el tiempo, el movimiento matemático, la intensión o el crecimiento continuo que se concibe en la velocidad** *y asimismo en otras cualidades, en resumen, todo lo que puede ser estimado, incluidas las posibilidades,* **son cantidades continuas e indeterminadas por sí mismas, es decir indiferentes a las partes que podamos tomar en ellas y que en la naturaleza son tomadas actualmente. La masa de los cuerpos está dividida actualmente de una manera determinada y nada en ella es exactamente continuo; pero el espacio, o la continuidad perfecta que hay en dicha idea, no marca más que una posibilidad indeterminada de dividir como se quiera. En la materia y en las realidades actuales el todo es un resultado de las partes: pero en las ideas o en los posibles** *(que no sólo comprenden este universo, sino también cualquier otro que pudiera ser concebido y que el entendimiento divino se represente efectivamente)*, **el todo indeterminado es anterior a las divisiones, como la noción de entero es más simple que la de las fracciones, y la precede.**

...Asimismo los puntos, los momentos, los extremos (en el caso de un aumento o disminución continuada de las cualidades según ciertas leyes matemáticas) no son las partes, sino los extremos del espacio, del tiempo, etc». (la negrita es nuestra, *Filosofía para Princesas*, pp. 85-6).

Como hemos resaltado en el texto, Leibniz cree en un infinito actual de sustancias simples o mónadas, que como tal son discretas en cuanto unidades diferenciadas y no están fundidas unas con otras, no son continuas en este sentido, y forman por composición los agregados o substancias compuestas, por eso en la materia y en las realidades actuales se encuentran *todos* formados por composición de partes determinadas. No ocurre así con el espacio, la extensión, el tiempo, el movimiento, la aceleración ni el número, que son ideales, abstractos, por lo que son todos indeterminados que se pueden dividir en las partes (en sentido amplio) que se quiera, puesto que no tienen partes (en sentido estricto) constitutivas previas, y en este sentido los todos son anteriores y verdaderamente continuos en cuanto indeterminados; en este sentido la infinitud ideal es meramente potencial, no actual.

El continuo es, pues, ideal en cuanto implica partes indeterminadas (posteriores al todo, no reales), mientras que en lo actual, lo real, todo es determinado (hay partes previas, formantes del todo compuesto), y cuando se confunden ambas cosas, es decir, cuando se buscan partes actuales en los seres ideales, abstractos (puntos reales anteriores al espacio, que no es más que un orden ideal de relaciones entre las cosas, por ejemplo), o bien se considera a los todos reales, los compuestos o los cuerpos, como formados por partes indeterminadas, no reales, (intentar descomponer un cuerpo real, por ejemplo, en puntos geométricos, abstractos), se cae en lo que Leibniz llamaba el *laberinto del continuo.*

Así los puntos, los instantes, los momentos, son nociones de diferente nivel que el espacio, el tiempo o la velocidad, no sus partes formantes. Lo mismo ocurre en el número, que es una idea simple, anterior lógicamente a las fracciones, que no son partes formantes de la idea de número. Así, dirá Leibniz: «*La unidad es divisible, pero no resoluble; pues las fracciones que la componen incluyen menos nociones simples, dado que los enteros (menos simples que la unidad) entran siempre en las nociones de las fracciones. Muchas personas que han filosofado, en matemática, acerca del punto y la unidad, han caído en la confusión por no haber distinguido entre la resolución en nociones y la división en partes* [Leibniz utiliza aquí el término *partes* en sentido amplio, no como partes constituyentes, antecedentes, reales]. *Las partes no siempre son más simples que el todo, si bien son siempre menores que éste*». (citado por Russell, p. 288). Otro ejemplo: la línea abstracta no es compuesta para Leibniz, porque lo verdadero de ella es su relación de distancia, que como tal relación es indivisible. Por eso, las nociones de *límite o extremo* de los puntos o instantes de los continuos del espacio y el tiempo pertenecen a otro nivel diferente a éstos, y no son partes suyas, sino nociones relacionadas que se mueven a otra escala.

Leonhard Euler, uno de los grandes impulsores de la Física newtoniana y de la matemática de sus predecesores en el siglo XVIII, criticará en sus *Cartas a una princesa alemana sobre diversos temas de física y filosofía* (1760-2) una versión vulgarizada —derivada del discípulo de Leibniz, Wolff, y de los wolffianos de esa época, que no de Leibniz— de la teoría monadológica, en la que se objeta que es absurdo que partes inextensas, simples, formen la extensión de los seres compuestos como partes constitutivas suyas (en el contexto de la divisibilidad de los cuerpos extensos).

Ana Rioja, a cargo de la cual está la edición de escritos de Euler citados (véase bibliografía), hace, a este respecto, un comentario muy interesante sobre los puntos matemáticos, la composición del continuo, y su confusión con la interpretación física o metafísica:

«No puede negarse que 'compuesto' es un término relativo que perdería toda su significación si se afirma que lo compuesto está infinitamente compuesto de compuestos. Lo compuesto supone lo simple, pero ¿significa ello que lo simple es parte *de lo compuesto?, ¿podemos acaso constituir el continuo espacial por la mera agregación de puntos? El punto se determina como* límite, *y no como parte de la línea. Así, el término o límite del segmento AB está en él, pero no forma parte de él, puesto que dicho segmento es una longitud y el término no lo es. El punto y la línea, o si se prefiere, el límite y lo ilimitado, no pertenecen al mismo nivel de realidad. Un segmento o una serie son dados, pero* el término del segmento o el límite de la serie han de ser puestos por el matemático, *o de lo contrario, jamás se accedería a ellos. La serie 1/2 + 1/4 + 1/8 + etc. tiende a 1, pero jamás llega a 1. Al poner un límite a una serie, el matemático le adscribe una noción que no forma parte de ella; podría decirse que los límites son metaseriales. Hay que decir, en consecuencia, que lo continuo y lo discontinuo no tienen el mismo nivel o estatuto de realidad matemática.*

Es precisamente esta diferencia de niveles la que en el fondo desea expresar Leibniz, si bien en un lenguaje excesivamente metafísico, al decir que lo compuesto pertenece a la física y lo simple a la metafísica, prohibiendo toda argumentación sobre las mónadas desde la mecánica. El físico no debe ocuparse de las mónadas sino de los fenómenos plurales y extensos, en la medida en que aquéllas no son partes de los fenómenos sino su fundamento [4]. *Son justamente las consecuencias absurdas*

4. Nota a pie de página de Ana Rioja: «'*Hablando con rigor, sin embargo, la materia no está compuesta de estas unidades constitutivas, sino que resulta de ellas, ya que la materia o masa extensa no es sino un fenómeno fundado en las cosas.* (...) Las unidades sustanciales no son en verdad partes, sino fundamento de los fenómenos'», *Leibniz an De Volder*, Hanoverae, 30 Junii, 1704, C. Ph., II, p. 268. (La letra en redondo es de Ana Rioja). En esta nota previa de Ana Rioja se explicita el salto mortal que da Leibniz desde el nivel metafísico de las mónadas hasta el nivel de los fenómenos —los cuerpos, las sustancias compuestas—; brecha por la que se cuelan las inconsistencias en su sistema: remitimos sobre este asunto a las **Palabras Finales** de este trabajo.

que de tal modo de proceder derivan, las que Euler pone de manifiesto con gran ingenio, y también con gran ironía. En mecánica no deben utilizarse mónadas, o de lo contrario se cae en los extremos ridículos que en esta cartas se critican y que, en rigor, no son imputables a la teoría de Leibniz. Afirmar que son partes indivisibles de la materia es tan paradójico como afirmar que los puntos son partes, en vez de límites, de la línea, lo que implicaría que con dichos puntos podría formarse una magnitud continua. Esto es lo que Leibniz llamaba 'el laberinto del continuo' y al que Newton, en virtud de su realismo espacial, debía enfrentarse más que nadie. Pero aún más, ¿cómo los puntos geométricos, a los que han sido reducidos los cuerpos por el gran científico inglés en base al teorema de los centros de gravedad constituirán, no ya el espacio, sino la propia materia? Estos puntos-masa han sido introducidos para dar razón del comportamiento de las fuerzas, pero en modo alguno pueden considerarse como partes de los cuerpos, al igual que las mónadas tampoco lo son. No hay un proceso continuo que lleve del punto a la línea, de los puntos-masa a los cuerpos que percibimos o de las mónadas a la materia.

En contra de lo que parece creer Euler, la afirmación de la infinita divisibilidad de la extensión en modo alguno permite zanjar este asunto, puesto que los mismos problemas se plantean tanto si entendemos las mónadas como partes de los cuerpos, tal y como hace este autor, apartándose de la interpretación del propio Leibniz, como si entendemos los puntos como partes de la extensión, al modo de Newton [5]. *En ambos casos nos encontramos con entidades inextensas (puntos geométricos o puntos metafísicos, según la definición que Leibniz daba a veces de las mónadas), que han de fundar la extensión».* (*Reflexiones sobre el espacio, la fuerza y la materia*, L. Euler, Introducción, selección, trad. y notas de Ana Rioja, pp. 35-7).

Para entender cabalmente el final del texto anterior, hay que tener en cuenta la diferencia radical entre las teorías del espacio y el tiempo de Leibniz y de Newton. Para este último el espacio aparece como algo sustancial, como algo previo a los cuerpos, como un lugar que hace de sistema de referencia para medir las distancias entre cuerpos, algo subyacente, distinto e independiente de los propios cuerpos; y donde las relaciones de distancia están compuestas por una infinidad de puntos actuales, que reconstruyen los cuerpos. Para Leibniz, esta visión sustancialista del espacio

5. Nota de Ana Rioja: «'*En todas direcciones* el espacio puede ser diferenciado en partes *cuyos comunes límites solemos denominar* superficies; *y estas superficies pueden diferenciarse en todas direcciones en partes cuyos comunes límites solemos denominar* líneas; *y de nuevo estas líneas pueden diferenciarse en todas direcciones en partes que solemos denominar* puntos. *Y así las superficies no tienen profundidad, ni las líneas anchura, ni los puntos dimensión*', I. Newton, *De Gravti. Unpubl.*, Edited by A. R. Hall y M. B. Hall, p. 100. Traducción inglesa, pp. 132-133».

es errónea, pues se confunde lo actual (lo real) con lo ideal; caeríamos, pues, en el laberinto del continuo. El espacio para este último (como el tiempo) no es un lugar previo e independiente de las substancias, de las mónadas o los cuerpos, un *lugar* donde están los cuerpos, un espacio vacío donde se colocan las cosas, compuesto de puntos *existentes* de hecho.

El espacio no es para Leibniz una sustancia, algo real, sino ideal, un orden de relaciones, un orden de coexistencia posible entre las sustancias, de tal manera que sino hubiera mónadas o sustancias creadas por Dios no habría espacio actual, que sería las interrelaciones de orden entre las mónadas, pero sí seguiría existiendo en las ideas de Dios, en todas las formas posibles de coexistir las sustancias, en todos los mundos posibles (antes de que se creara cualquiera de ellos). Si las mónadas creadas fueran otras el espacio sería distinto, aunque seguiría estando formado por relaciones de distancia, que son en sí mismas indivisibles, pues una relación no está compuesta por sus términos —por eso los puntos no son partes del espacio, pues no son relaciones, y en este sentido no son espaciales—, de ahí que el espacio sea continuo, uniforme, pleno y no compuesto de partes. Esto confirma que el espacio es ideal y no una substancia, pues no es más que el conjunto de las relaciones de distancia posibles, y esto define el continuo espacial, donde los puntos matemáticos no serían más que las posiciones posibles de las relaciones de distancia, posiciones abstractas, pero que pueden ser ocupadas por mónadas creadas, que es lo que es verdaderamente real. Las distancias en sí mismas pueden ser mayores o menores, pero, como dice Russell, «las partes de una distancia son meramente otras relaciones menores de la distancia y no están en modo alguno presupuestas por la distancia mayor, que es lógicamente independiente de ellas», y por eso no se puede resolver esta noción del espacio en partes indivisibles (recuérdese lo que antes apuntamos, al hablar de los números, de la distinción leibniciana entre resolución de nociones, en lo ideal, y la composición de partes, en lo actual).

Para el tiempo se seguiría el mismo razonamiento. Este es un orden de relaciones sucesivas de los estados de las mónadas, continuo y no extenso, igual que el espacio (pues lo que es extenso es la materia, la repetición de mónadas, no el espacio), pues el tiempo no *dura*, dado que también es ideal, y por eso no está formado por instantes.

Pero el texto a la electora Sofía que arriba comentamos tiene una segunda parte, imprescindible para ver por qué Leibniz cree que puede apoyar su visión metafísica de las mónadas en los fenómenos que percibimos, y, sobre todo, en qué se basa que se puedan aplicar las matemáticas al mundo fenoménico, al mundo tal y como nosotros lo percibimos y lo entendemos (no al mundo real, actual, subyacente). También aparece su concepción relacional del espacio y el tiempo. Veámoslo.

«Para concebir mejor la división actual infinita de la materia y la exclusión que hay de toda continuidad exacta e indeterminada, hay que considerar que **Dios ya ha producido tanto orden y variedad como era posible introducir hasta ahora y que por lo tanto nada ha permanecido indeterminado, siendo así que lo indeterminado es la esencia de la continuidad.** *Esto es lo que la perfección divina enseña a nuestro espíritu y lo que la experiencia misma confirma a través de nuestros sentidos. No hay gota de agua tan pura en la que no se observe, bien mirada, algún tipo de variedad. Un trozo de piedra está compuesto por diversos granos y esos granos aparecen a través del microscopio como rocas en las que hay mil juegos de la naturaleza. Si la fuerza de nuestra vista se viese continuamente aumentada, siempre encontraría algo en que ejercitarse. Hay por doquier variedades actuales y nunca una uniformidad perfecta; nunca dos piezas materiales son enteramente semejantes entre sí, en lo grande como en lo pequeño.*

...Por consiguiente, siempre hay divisiones y variaciones actuales en las masas de los cuerpos existentes, sea cualquiera el grado de pequeñez. Únicamente nuestra imperfección y las insuficiencias de nuestros sentidos nos hacen concebir las cosas físicas como seres matemáticos, en los cuales sí hay indeterminación. Se puede demostrar que en la naturaleza no hay línea o figura que proporcione exactamente y conserve uniformemente en el tiempo y espacio más pequeños las propiedades de la línea recta o de la circunferencia, o de cualquiera otra cuya definición pueda ser comprendida por un espíritu cultivado... **Pero la Naturaleza no puede y la sabiduría divina no quiere trazar exactamente esas figuras de esencia limitada, que presuponen algo determinado y por consiguiente imperfecto en las obras de Dios. Sin embargo, sí se encuentran en los fenómenos o en los objetos de los espíritus limitados: nuestros sentidos no se percatan y nuestro entendimiento se desentiende de una infinidad de pequeñas desigualdades** *que, sin embargo, no impiden la regularidad perfecta de la obra de Dios, aunque una criatura finita no la pueda comprender. Sin embargo,* **las verdades eternas fundadas en las ideas matemáticas limitadas nos sirven en la práctica, en tanto está permitido hacer abstracción de las desigualdades demasiado pequeñas que no den lugar a errores considerables en relación a la meta propuesta***; como un ingeniero que traza sobre el terreno un polígono regular no se preocupa de si un lado excede a otro en algunas pulgadas.*

Bien se ve que el Tiempo no es una sustancia, puesto que una hora o cualquier otra parte del tiempo que tomemos nunca existe entera y con todas sus partes conjuntamente. No es más que un principio de relación, un fundamento del orden en las cosas, en tanto se concibe su existencia sucesiva o sin que existan juntas. Otro tanto sucede con el espacio. Es el fundamento de la relación del orden de las cosas, pero en tanto se las concibe existiendo juntas. Uno y otro de ambos fundamentos *es verdadero, aunque sea ideal...* **La materia nos parece un continuo, pero sólo lo parece, de la misma manera que el movimiento actual.** *Es como el polvo de alabastro que, cuando se le hace hervir al fuego, parece formar un fluido continuo,* **o como una rueda dentada parece continuamente traslúcida cuando gira con mucha velocidad**, *sin que pueda discernir el lugar de los dientes del lugar del vacío entre ellos,* **enlazando nuestra percepción los lugares y los tiempos separados.** *Se puede concluir pues que* **una masa de materia no es verdaderamente una sustancia,** *que* **su unidad sólo es ideal** *y que* **(aparte el entendimiento) no es más que un aggregatum, un agregado, una multiplicidad de infinitas sustancias verdaderas, un fenómeno bien fundado, que nunca contradice las reglas de las matemáticas puras, pero que siempre contiene más allá de ellas».** (la negrita es nuestra, *Filosofía para Princesas*, pp. 86-9).

Como bien se puede apreciar Leibniz considera que las matemáticas son el reino de lo indeterminado, de los continuos, de la uniformidad y de las nociones limitadas, frente al mundo creado, real, que es el reino de lo determinado, discontinuo, regular pero no uniforme y del infinito actual más allá de cualquier número o noción ideal, siempre limitados y sólo potencialmente infinitos.

Pero una cosa es el mundo tal y como Dios lo ha creado y tal y como Él lo percibe y entiende, y otra muy distinta es cómo lo percibimos y lo entendemos los humanos, restringidos a una percepción siempre limitada, que hace que ante nuestros sentidos la materia o el movimientos parezcan continuos, representándonos este confusión en nuestra imaginación, haciendo abstracción en nuestro entendimiento de su constitución real, que se nos escapa. Así nuestro mundo inmediato es el de los fenómenos —los cuales no son arbitrarios, sino reflejo de la realidad subyacente—, el de las apariencias, a las que podemos aplicar la propia abstracción de las matemáticas, cuyas limitaciones de seres ideales encajan útilmente con nuestras propias limitaciones como seres finitos, con nuestra forma de conocer el mundo, que necesariamente tiene que dar cuenta, explicar estos fenómenos aunque sea para luego desbordarlos, ir más allá de ellos; y en esta tarea es útil y necesaria la matemática.

Palabras finales

Pero es innegable que el esfuerzo de Leibniz por sistematizar todos los conocimientos sobre todo lo divino y lo humano de su época, dentro del contexto de la filosofía y las ciencias de su momento histórico (así como de la teología, la economía política, el derecho, etc.), tiene sus limitaciones. El análisis de Leibniz le lleva hasta la noción de mónada como constituyente último de lo real, rectificando dialécticamente todos los otras formas posibles alternativas: átomos y vacío, corpúsculos, puntos matemáticos; dotando a las mónadas con una serie de características a partir de las cuales poder derivar todos los fenómenos de nuestro mundo de la forma más racional posible. Pero después de llegar en el análisis último a las mónadas hay que volver de nuevo a los fenómenos, hay que reconstruir el mundo de partida, hay que poder regresar a la caverna para explicar a los demás cuál es la verdadera realidad. Y en esta síntesis reconstructiva leibniciana aparece un hiato (no el único), un salto radical: cómo reconstruir con átomos metafísicos, formales, un mundo de cuerpos, un mundo material, un mundo corpóreo. Solución: negar la distinción cartesiana entre *res cogitans y res extensa,* negar la distinción entre el mundo del pensamiento, los sentimientos, las ideas, el mundo de las almas, y el mundo de lo extenso, del espacio y el tiempo, de los movimientos y los choques, el mundo de los cuerpos.

En sentido contrario a como pudo hacer el materialismo grosero del siglo dieciocho, al reducir las almas, el pensamiento, las emociones o las voliciones, a movimientos, a partículas materiales, a relaciones entre cuerpos, Leibniz reducirá, reinterpretará, lo material como algo espiritual, como algo análogo a las almas, como fuerzas, como vida, como voluntades y entendimientos expandidos a todo lo existente en mayor o menor grado; los cuerpos no serán más que apariencias de nuestra forma de representarnos el mundo, fenómenos, cuya realidad última son mónadas, unidades anímicas, dinámicas, vivas, espirituales, incorpóreas en el sentido tradicional.

Pero aún dentro del graduacionismo infinito e individualizado de las mónadas espirituales leibnizcianas hay al menos dos saltos más: la barrera establecida entre las mónadas dotadas de razón —los espíritus, los humanos— y las mónadas inferiores, y la barrera infranqueable entre todos los espíritus —humanos, pero también genios o ángeles cada vez más perfectos— y Dios, para el cual el concepto de mónada sólo puede ser análogo, una forma de expresión imperfecta, y, a todas luces, insuficiente.

BIBLIOGRAFÍA

Obras de Leibniz:

Análisis Infinitesimal, estudio preliminar J. de Lorenzo, trad. T. Martín Santos, ed. Tecnos, Madrid, 1987.

Correspondencia con Arnauld, trad. de V. P. Quintero, ed. Losada, Buenos Aires, 1946.

Discurso de Metafísica, versión, prólogo y notas de J. Marías, Alianza Editorial, Madrid, 1986.

Escritos Filosóficos, editados por Ezequiel de Olaso, Ed. Charcas, Buenos Aires, 1982.

Escritos de Dinámica, estudio preliminar y notas de J. Arana, trad. J. Arana y M. Rodríguez, ed. Tecnos, Madrid, 1991.

Filosofía para Princesas, prólogo, edición y notas de Javier Echeverría, Alianza Editorial, Madrid, 1989.

La polémica Leibniz-Clarke, ed. de Eloy Rada, Taurus ediciones, Madrid, 1980.

Monadología, edición trilingüe, introducción de Gustavo Bueno, trad. de J. Velarde, Pentalfa ediciones, Oviedo, 1981.

Monadología, ed. de H. Arnau y P. Montaner, Ed. Alhambra, Madrid, 1986.

Nuevos Ensayos sobre el Entendimiento Humano, edición de Javier Echeverría, Editoria Nacional, Madrid, 1977. (nueva edición en Alianza Editorial, 1992).

Teodicea, ensayos sobre la bondad de Dios, la libertad del hombre y el origen del mal, trad. P. Azcárate, ed. Claridad, Buenos Aries, 1946.

Escritos sobre Leibniz:

AITON, E. J.: *Leibniz. Una biografía*. Trad. C. Corredor, Alianza Universidad, Madrid, 1992.

BELAVAL, Y. (bajo la dirección de): «Leibniz», en *Historia de la Filosofía* (t.VII), ed. Siglo XXI, Madrid, 1987, capt. II, pp. 26-98, por Y. Belaval y M. Serres.

BELAVAL, Y.: *Leibniz. Initiation a sa philosophie*. Ed. Vrin, Paris, 1984 (5ª ed.).

BRÉHIER, E.: «Leibniz», en *Historia de la Filosofía* (t.I), trad. J. A. Pérez y D. Morán, ed. Tecnos, Madrid, 1988, capt. VIII, pp. 810-38.

CASSIRER, E.: «Leibniz», en *El problema del conocimiento* (t.II), trad. W. Roces, F.C.E., México, 1986, capt. II, pp. 64-125.

DELEUZE, G.: *El Pliegue. Leibniz y el Barroco.* Trad. J. Vázquez y U. Larraceleta, ed. Paidós, Barcelona, 1989.

ECHEVERRÍA, J.: *Leibniz*, ed. Barcanova, Barcelona, 1981.

EULER, L.: *Reflexiones sobre el espacio, la fuerza y la materia*, introducción, selección, trad. y notas de Ana Rioja, Alianza Editorial, Madrid, 1985.

HEIZ HOLZ, H.: *Leibniz*, trad. A. Sánchez Pascual, ed. Tecnos, Madrid, 1970.

MARTINEZ MARZOA, F.: *Cálculo y ser (aproximación a Leibniz)*, ed. Visor, Madrid, 1991.

ORTEGA Y GASSET, J.: *La idea de principio en Leibniz*, Alianza Editorial, Madrid, 1979.

RUSSELL, B.: *Exposición crítica de la Filosofía de Leibniz*, trad. de la 2ª ed. de Hernán Rodríguez, ed. Siglo XX, Buenos Aires, 1977.

LA INFLUENCIA DE LAS IDEAS ARGUESIANAS EN EL DESCUBRIMIENTO DE LEIBNIZ DEL CÁLCULO INFINITESIMAL *

Javier Echeverría
Profesor de filosofía de la Ciencia
Universidad del País Vasco

1. Introducción

El gran éxito de la geometría cartesiana y del Cálculo Infinitesimal de Newton y Leibniz durante el siglo XVII oscurecieron los trabajos de Desargues, Pascal y otros autores sobre Geometría Perspectiva. Sin embargo, la noción arguesiana de *punto del infinito,* así como el hexagrama de Pascal y la teoría de la involución de Desargues, que luego fueron precedentes de la obra de Monge y de la aparición de la Geometría Proyectiva o Sintética en el siglo XIX, interesaron en su momento a algunos pocos matemáticos del siglo XVII, y entre ellos a Leibniz. Nada se ha comentado sobre el papel que las ideas arguesianas jugaron en el descubrimiento por parte de Leibniz del Cálculo Diferencial. La reciente edición del texto completo del

* Este artículo ha sido preparado en el marco de un proyecto de investigación financiado por la Universidad del País Vasco (1993-1995) y dirigido por el Prof. Miguel Sánchez-Mazas sobre «Nuevas ideas, nuevos documentos y nuevas lecturas de la Lógica y la Matemática de Leibniz». Agradezco al Leibniz-Archiv de Hannover, y en particular a los Profesores Heinekamp y Breger, las facilidades que siempre se me han concedido para consultar y utilizar los materiales guardados en la Landesbibliothek de Hannover.

De Quadratura Arithmetica por parte de Eberhard Knobloch [1] muestra que, aparte de los trabajos de Fermat, Roberval, Gregory, St. Vicent y otros muchos sobre las cuadraturas y las investigaciones de los matemáticos ingleses sobre las series numéricas, las ideas perspectivas de Desargues y de Pascal también jugaron un papel en el descubrimiento leibniciano del Cálculo Diferencial. El presente artículo tiene como objetivo aportar algunos documentos poco conocidos al respecto y comentar esta influencia, que en principio puede parecer sorprendente. Se muestra así que la Geometría Perspectiva del XVII no se redujo a la práctica de pintores, arquitectos, escenógrafos y artesanos (corte de piedras, relojes de sol, etc.), sino que también incidió en uno de los principales avances de la matemática teórica a finales del siglo XVII.

2. *Leibniz, lector de Desargues y de Pascal*

Es sabido el interés que Leibniz siempre mostró por las ideas de Desargues y de Pascal sobre Geometría Perspectiva. Entre otros, Jean Mesnard y René Taton han reconstruído minuciosamente la búsqueda por parte de Leibniz de papeles y documentos de Desargues y Pascal durante su estancia en París (1672-1676) [2]. Taton señala que:

> «ce n'est pas sur sa propre initiative, mais pour répondre à des demandes pressantes du mathématicien anglais John Collins, demandes répercutées auprès de lui par H. Oldenbourg, sécretaire de la Royal Society, qu'il s'est efforcé de retrouver et de consulter les oeuvres perdues ou egarées de Desargues et de Pascal, avant de prendre lui-même un intérêt évident à l'étude des pièces qu'il put découvrir [3].

Leibniz, efectivamente, había sido informado en 1673 por Collins y Oldenbourg sobre la posible existencia de una obra de Desargues titulada *Leçons de Tenèbres;* le encargaban buscar un ejemplar de dicho libro en París, caso de que existiera y fuera localizable:

> «There came lately to our view and perusall a folio *Treatise of perspective* written by Mons. Heuret, wherein he censures and rejects the Conickes of Mons. Desargues, entituled, *Lecons de tenebres,* whereof we understand, there were but 50 Coppies in all printed, and it will be extreame difficult to procure one of them [4]».

1. G. W. Leibniz, *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis,* ed. E. Knobloch, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1993, 160 pp.

2. Ver Jean Mesnard, «Leibniz et les papiers de Pascal», *Studia Leibnitiana Supplementa* XVII, Wiesbaden: Steiner 1978, pp. 45-48 y René Taton, «L'initiation de Leibniz à la Géométrie», *Ibid.*, pp. 103-129.

3. R. Taton *o.c.*, p. 108.

4. Carta de Collins en el envío de Oldenbourg a Leibniz del 20 de abril de 1673. *Akademie-Ausgabe* III, 1, Br. 13, p. 55.

El interés de Collins por las ideas de Desargues se refería a la posibilidad de construir los tres tipos de cónicas mediante un mismo método, partiendo de una esfera cuyo centro sería el ojo O y que a continuación sería cortada de tres maneras diferentes, obteniendo la elipse, la parábola y la hipérbola. Este tipo de tratamiento de la teoría de cónicas le resultaba desconocido a Leibniz, que por aquella época era un aprendiz en Matemáticas. Tras leer algunas obras al respecto, su interés por las propuestas de Desargues pasó a ser muy grande, motivo por el cual se aplicó a la búsqueda de documentos de Desargues al respecto.

En el mismo envío, Collins y Oldenbourg también le pedían a Leibniz que tratara de buscar los trabajos de Pascal sobre la obra geométrica de Apolonio, trabajos que Pascal nunca había publicado, pero de los que se tenía noticia a través de Huret:

> «Whereas Mersennus saith concerning Paschall the Son, quod unica propositione universalissima, 400 Corollaris armata, totum Apollonium complexus est; we understand that this treatise is yet unprinted, but proceedes in Desargues Method (whose scholar he was) and Mons. de Pres a Bookseller in Paris hath informed, that the manuscript of it remaines with one of the brothers of him, the said de Pres at Auvergne [5]».

Dos años después, Collins y Oldenbourg le insistieron a Leibniz sobre su interés por los trabajos geométricos de Desargues, Pascal y Roberval, señalando la posibilidad de que las escalas perspectivas de Desargues pudieran servir para resolver ecuaciones algebraicas mediante un método contrapuesto al de Descartes. Collins quería saber si el método de Desargues podía aplicarse también a las ecuaciones trascendentes:

> «We think it worth that a Conicall treatise deriving the same from Projections of the Sphere should be fitted up out of Desargues *Lecons de tenebres*, and out of the remaines of Paschall and hope that it will be done here, and that the remaines of Fermat de *Locis Planis Solidis Linearibus at ad Superficiem de Porismatibus et Contactibus Sphaerarum*, as also the remaines of Lalover will be printed, and when should willingly know [6]».

Leibniz y Tschirnhaus trataron de satisfacer estas peticiones y buscaron en París escritos de Desargues, Pascal y Roberval. Los resultados de esas indagaciones han sido comentados por Hofmann, Costabel, Itard, Mesnard et Taton [7]. Por mi parte,

5. *Ibid.*, p. 56.

6. Envío de Oldenbourg a Leibniz del 4 de julio de 1675. *Akademie* III, 1, Br. 56, p. 262.

7. Ver referencias en la bibliografía.

he mostrado que Leibniz leyó también a algunos de los discípulos y de los adversarios de Desargues: además de Philippe La Hire, Bosse, Aleaume y Dubreuil fueron leídos atentamente por Leibniz, como puede comprobarse por sus notas marginales en los ejemplares de diversos Tratados de Perspectiva que se conservan en Hannover [8]. Puede conjeturarse incluso que Leibniz habría podido leer la *Optique de Pourtraicture et de Peinture* que publicó Grégoire Huret en 1670 con el fin de oponerse a los métodos perspectivos de Bosse y de Desargues. De hecho, Huret manifiesta su más radical oposición a la identificación arguesiana de las líneas convergentes et las líneas paralelas:

> «Monsieur Pascal fils a écrit, que le dit sieur Desargues a fait voir que les paralleles sont toutes semblables à celles qui aboutissent en un point & qu'elles n'en different point, ce qui est non seulement contraire à la 35. definition & au 14. axiome des Elemens, mais aussi à la veritable connoissance de tout le monde [9]»,

mientras que Leibniz elogia con toda claridad la propuesta arguesiana:

> «Car Messieurs des Argues et Pascal ont fort bien fait de prendre les ordonnées generalement par des lignes convergentes ou paralleles, d'autant plus que les paralleles peuvent estre prises pour une espece de convergentes, dont le point de concours est éloigné infiniment [10]».

La aceptación leibniciana de la noción de punto del infinito constituye uno de los puntos más importantes en lo que concierne a la influencia de Desargues y de Pascal sobre Leibniz: diversos manuscritos confirman la alta estima que mostró Leibniz hacia este tipo de propuestas [11]. Comentando este pasaje, Taton sugirió la posibilidad de que Leibniz hubiera leído directamente el *Brouillon-Project* de Desargues [12]. Por lo que se refiere a Pascal, se sabe que Leibniz leyó y a veces hizo copia de varios documentos de Pascal sobre Geometría a partir del 4 de junio de 1675 (primer envío de los hermanos Périer a Leibniz) y hacia finales de diciembre de 1675 o principios del año 1676 (segundo envío de los hermanos Périer). Mesnard ha considerado que

8. Ver J. Echeverría, «Recherches inconnues de Leibniz sur la Géométrie Perspective», en A. Heinekamp (ed.), *Leibniz et la Renaissance*, Wiesbaden: Steiner 1983, pp. 191-201.

9. Gregoire Huret, *Optique de portraiture et peinture*, Paris 1670m l'autheur, page 156, section 359.

10. Leibniz a Gallois, finales de 1675, *Akademie* VI, 1, Br. 73, p. 359. Taton criticó la fecha propuesta por Hofmann para esta carta, hacia finales de 1675, y propuso 1676 como fecha más aproximada.

11. Ver, por ejemplo, los manuscritos 853, 857, 861A y 862 del *Catalogue Critique* de Rivaud.

12. Ver R. Taton, *o.c.*, pp. 119-120.

la lectura de las Cónicas de Pascal habría sido para Leibniz una fuente muy importante en lo que respecta a tres puntos de sus investigaciones matemáticas sobre Geometría Perspectiva:

— la identificación entre líneas paralelas y convergentes.

— la unidad de las cónicas.

— el hexagrama místico, mediante el cual había encontrado Pascal una solución puramente geométrica (no analítica ni cartesiana) del célebre problema de Pappus [13].

Y Mesnard concluye de todo ello:

> «Ce qui s'en dégage, c'est que Leibniz a été surpris et frappé d'admiration par des découvertes qui pourtant remontaient à plus de trente ans» ... «Mais le philosophe tire encore davantage d'enseignements, selon la ligne naturelle de son esprit, du fait que Pascal fait abstraction du calcul et pratique une géométrie de situation: sa méthode 'optique' envisage la transformation des figures par le mouvement et la diversité des apparences sensibles selon la perspective adoptée. Leibniz exprime le souhait qu'une telle méthode puisse être généralisé audelà des coniques [14]».

Además de las *Cónicas*, Leibniz encontró entre los papeles de Pascal el escrito *De l'esprit géométrique*, cuya lectura ha desempeñado un importante papel en la formación del proyecto leibniciano de un *Analysis Situs* o *Characteristica Geometrica* [15]. De hecho, sabemos que Leibniz leyó la *Introduction à la Géométrie* de Pascal, donde puede leerse la expresión «*situs punctum*», e hizo los comentarios siguientes entre sus notas:

> «En géométrie, toute méthode de découverte par le biais de la situation, et donc sans calcul, consiste à embrasser simultanément plusieurs objets en même situation; ce qui se fait, tantôt par le moyen d'une figure qui en comprend plusieurs, où se découvre l'usage des solides, tantôt par le moyen du mouvement, ou de la mutation. De plus, entre les mouvements et les mutations, il paraît qu'on peut s'appliquer très utilement à la mutation d'apparence, ou transformation optique des figures; il faut voir si par ce moyen nous ne pourrions pas dépasser le cône et nous élever aussi à des considérations plus hautes [16]».

13. Ver Jean Mesnard, *o. c.*

14. J. Mesnard, *Ibid.*, p. 54.

15. Hipótesis sugerida por Jean Ytard (1964), pp. 283-284 y aceptada por Mesnard y Taton. No hay que olvidar que el primer escrito de Leibniz sobre la Característica Geométrica está fechado en enero de 1676, es decir en la época en que Leibniz se dedicaba a leer los papeles de Pascal. Ver al respecto la edición de J. Echeverría y Marc Parmentier, Leibniz, *La Caractéristique Géométrique*, París, Vrin, 1994.

16. P. Costabel, «Traduction française des notes de Leibniz sur les 'Coniques' de Pascal», *Revue d'Histoire des Sciences* XV (1962), p. 265. Ver también B. Pascal, *Oeuvres*, ed. Mesnard, vol. 2, p. 1127.

Podemos concluir por tanto que la primera introducción de Leibniz a las ideas sobre Geometría Perspectiva tuvo lugar durante el período 1675-1676, cuando buscaba (y encontró en parte) documentos de Desargues y de Pascal, a petición de Collins y Oldenburg. Dándose cuenta de inmediato del interés matemático de este tipo de ideas, a partir de ese momento Leibniz siempre mostró interés al respecto, leyendo los tratados sobre Perspectiva de La Hire y Bosse, así como los libros de los detractores de Desargues. Como he mostrado en un artículo anterior, Leibniz leyó con atención la *Manière Universelle* de Desargues, publicada en el libro de Bosse en 1648, que constituye el gran compendio de los métodos arguesianos en aquella época. Leibniz escribió notas marginales en ese libro, interesándose en particular en los pasajes relativos a la noción de *punto del infinito.* Tras leer a Dubreuil y Alcaune, que fueron adversarios de Desargues, Leibniz tomó partido en favor de este último en su polémica contra el Secretario del Rey, Beaugrand, y sus seguidores (Curabelle y los editores Langlois y Tavernier). Leibniz escribió algunos ensayos propios sobre Geometría Perspectiva, que todavía permanecen inéditos, pero en lugar de restringirse al debate sobre los métodos propiamente perspectivos supo ir más allá, infiriendo la existencia de ideas que le fueron particularmente útiles en su descubrimiento del Cálculo Diferencial y en sus investigaciones sobre el Analysis Situs, que siempre contrapuso al Análisis Algébrico de Vieta y de Descartes [17]. Puesto que la influencia de las ideas arguesianas en el descubrimiento del Cálculo Diferencial es algo poco menos que desconocido, en el resto del artículo me centraré exclusivamente en este punto.

Antes de llegar a ello, conviene recordar que Leibniz llevó consigo su dossier Pascal cuando dejó París en 1676 para incorporarse a su puesto de bibliotecario de Hannover. Como aprovechó la ocasión de ese viaje para volver a pasar por Londres, y es sabido que allí se entrevistó con Collins, resulta verosímil pensar que habló con el matemático inglés sobre el contenido de los escritos geométricos de Desargues y de Pascal, puesto que Collins se lo había solicitado por dos veces, y Leibniz tenía algo que aportarle: la muy probable inexistencia de las *Leçons de Ténèbres* de Desargues [18]. Tras su célebre encuentro de 1676 con Collins, que ha dado lugar a tantos estudios relacionados con la polémica ulterior sobre la prioridad en el descu-

17. Ver al respecto J. Echeverría, «Cálculos Geométricos en Leibniz», *Theoria* II, VI, N. 14-15, octubre 1991, pp. 29-54, al que sigue la edición del manuscrito inédito de Leibniz *Circa Geometrica Generalia et Calculum Situs...* (*Ibid.*, pp. 55-66).

18. En una carta del mes de junio de 1676, Tschirnhaus informó a Oldenburg sobre la imposibilidad práctica de encontrar ejemplar alguno en París de las pretendidas *Leçons de Ténèbres* de Desargues. Ver J. Eh. Hofmann, *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizchen Mathematik während des aufenthaltes in Paris (1672-1676)*, München: Leibniz Verlag 1949, p. 164.

brimiento del Cálculo Infinitesimal por parte de Newton y Leibniz, éste último siguió manteniendo correspondencia con Collins sobre la Geometría Perspectiva. En 1679, por ejemplo, Leibniz le envió a Collins un ejemplar de los *Nouveaux Elemens des Sections Coniques* de Philippe La Hire, por medio de Hansen, conjuntamente con una obra de Viviani [19]. El año anterior Collins había enviado a su vez a Joachim Heinrich von Bülow dos libros para Leibniz [20]. El interés de Leibniz por las ideas de Desargues y de sus discípulos se siguió manifestando en 1701, cuando le aconseja a Bodenhausen «in der Perspecktiv Desargues durch Bosse» [21].

Resulta pues muy probable que el único acceso directo que tuvo Leibniz a los escritos de Desargues tuvo lugar por medio de la obra de Bosse [22], aparte del resumen del contenido del *Brouillon-Project* hecho por el propio Leibniz a partir de los papeles de Pascal [23].

3. La resolución de las figuras en triángulos

En lugar del método de resolución de ecuaciones que Collins esperaba encontrar en los trabajos de Desargues y de Pascal, Leibniz extrajo una idea muy diferente, pero mucho más importante para sus propias investigaciones de aquella época: la posibilidad de analizar las figuras geométricas mediante un nuevo instrumento de análisis, basado en las rejillas perspectivas. Así como Descartes analizaba las figuras mediante cuadrados (sistema de ejes cartesianos) para reducir cada punto a ordenada y abscisa y cada recta o figura geométrica a ecuación algebraica, así Leibniz encontró en Desargues la posibilidad de analizar las figuras mediante un sistema de triángulos que, por mantener su proporcionalidad cuando se hacen evanescentes, le vino a proporcionar un nuevo instrumento matemático para el análisis de figuras infinitamente pequeñas.

19. Ver la carta de Hansen a Leibniz del 12 de junio de 1679 (*Akademie* I, 2, p. 485). El libro fue enviado el 1 de octubre de 1679 (*Ibid.*, p. 519).

20. *Ibid.*, Br. 322.

21. Carta del 17 de abril de 1701, *Briefwechseln mit Mathematikern* (ed. Gerhardt), p. 514.

22. En la Landesbibliothek de Hannover se conserva un ejemplar (signatura Leib. Marg. 175) con una recopilación en dos volúmenes de escritos de Bosse: dicha obra contiene dos textos de Desargues, con el título *Reconnoissances de Desargues*, así como su *Exemple d'une des manieres universelles touchant la Pratique de la perspective*. El primer volumen contiene varias notas marginales escritas por Leibniz. Ver J. Echeverría (1983), pp. 193-195 para los detalles de la lectura de Leibniz de dicha obra, así como de su lectura de otro ensayo de Desargues, titulado «Enseigner une méthode aisée pour apprendre & enseigner à lire & à écrire la Musique».

23. Ver L. Hd. XXXV, vol. XV, 1, Bl. 11 y la transcripción de Taton en la obra colectiva *L'oeuvre scientifique de Pascal*, París: Centre International de Synthèse 1964, p. 45.

Desde que leyó a fondo la Geometría de Descartes, es decir en 1675, Leibniz se mostró siempre convencido de que los métodos de Vieta y de Descartes eran insuficientes para analizar y estudiar algunas figuras y problemas geométricos, como las ecuaciones trascendentes [24]. Su proyecto de un *Analysis Situs* trata de superar las limitaciones del análisis cartesiano de las figuras y de desarrollar un nuevo *Análisis Geométrico de la Situación*, en el que no haya necesidad de recurrir ni a las magnitudes ni a las ecuaciones. No hay duda de que en los papeles de Pascal y Desargues supo ver la similitud de la Geometría Perspectiva con su propio proyecto, en la medida en que los teoremas perspectivos no dependen del tamaño de las figuras, sino de los alineamientos y situación respectiva de los puntos: de ahí su admiración hacia las propuestas arguesianas, que nunca dejó de manifestar, a pesar de que no volviera a ocuparse a fondo de la Perspectiva, con excepción de los manuscritos inéditos a los que aludiré en el siguiente apartado.

Leibniz pensaba que la gran mayoría de los matemáticos que se habían ocupado de la Geometría de los indivisibles (Cavalieri, Fermat, Wallis, etc.) habían fracasado por su dependencia respecto a las ecuaciones cartesianas: así lo manifiesta en el siguiente pasaje de una carta a Gallois:

> «La raison pourquoy ceux qui ont écrit de la Géométrie des indivisibles, et de l'Arithmétique des infinis, n'ont pas fait la même remarque, est parce qu'on est accoutumé de ne resoudre les figures que par les ordonnées paralleles, en une infinité de petits rectangles, au lieu que j'ay trouvé un moyen general de resoudre utilement toute figure en une infinité de petits triangles aboutissans à un point, par le moyen des ordonnées convergentes [25]».

Es justo a continuación cuando hace el elogio ya citado (ver nota 9) a la identificación de Desargues y de Pascal entre las líneas paralelas y las convergentes, proponiendo a continuación:

> «un theoreme fondamental, que j'ay trouvé, et qui est sans doute un des plus universels et des plus feconds de la Geometrie... Ce theoreme a des grandes suites, et il suffit luy seul pour prouver par une seule demonstration Geometrique toutes les Quadratures de l'Arithmetique des infinis, que le celebre Mons. Wallis n'a trouvé que par induction; outre quantité d'autres, que j'ay trouvées par là. Comme par exemple celle d'un certain Segment de la Cycloeide [26]».

24. Ver, por ejemplo, la carta de Leibniz a Huygens (septiembre de 1675), así como la carta (no enviada) a Malebranche de junio de 1679 o la carta a Huygens de septiembre de 1679.

25. *Akademie*, VI, 1, Br. 73, p. 359.

26. *Ibid.*

Vemos pues que Leibniz relaciona directamente los métodos arguesianos y el sistema de ordenadas triangulares a sus propias investigaciones sobre las Cuadraturas que, como se sabe, constituyen el origen de su descubrimiento del Cálculo Diferencial. Este vínculo entre los conceptos perspectivos y el Cálculo Infinitesimal puede parecer inusitado: por consiguiente, habrá que detenerse a examinar con detalle este tipo de propuesta de Leibniz.

El manuscrito inédito titulado *Qui de Geometriae utilitate* constituye, a mi modo de ver, una fuente muy importante para comprender el uso que Leibniz hace de estas coordenadas triangulares de inspiración arguesiana y pascaliana [27]. En dicho texto, en efecto, se puede leer:

> «Nimirum plerique qui Geometriam indivisibilium hactenus tractavere, figuras tantum in rectangula aut certè paralelogramma ordinatarum inter se parallelarum ope resolvere consuevere. Mihi semper Desarguesii et Pascalii mirè placuit ratio, qui in Conicis, ut universaliter loqui possent ordinatarum nomine non tantum parallelas comprehendunt sed et rectas ad unum punctum fixum concurrentes, sive convergentes, praesertim cum parallelae sub convergentium nomine, si punctum infinitè abesse dicatur, continentur. Itaque cum aliis parallelas tantum ordinatas tractassent et figuras in parallelogramma AB (B) (A), (A) (B) ((A)) ((B)) Cavaleriana methodo resolvissent (Fig. 1), ego adhibitis convergentibus resolvo figuram datam in triangula CD(D), C(D)((D)), et mox aliam exhibeo (Fig. 2) cuius ordinatae AB, (A)(B), etc. his ipsis triangulis sunt pro rationales. Quod fit: si ipsae AB ipsis CE aequantur, posito rectas DE esse tangentes curvae datae. Ita enim ut infra ostendam efficietur ut spatium CB(B) sit duplum segmenti C(D)DC, cuilibet figura ut C(D)DC alia aequivalens exhiberi potest [28]».

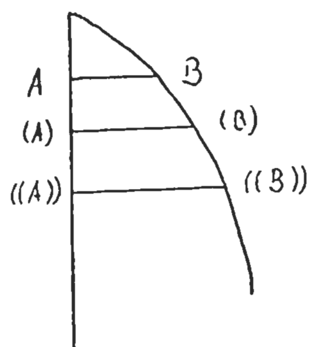


Fig. 1

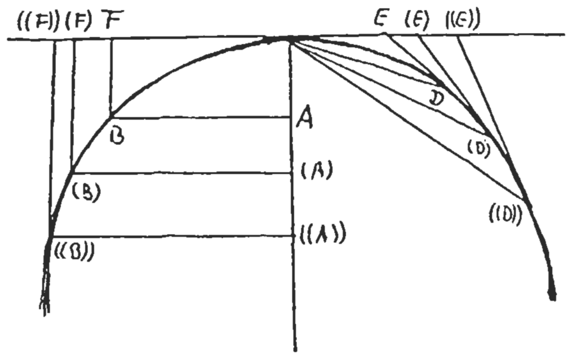


Fig. 2

27. L. Hd. XXXV, vol. VIII, 13, F. 82-85.

28. *Ibid.*

El reemplazamiento de los pequeños paralelogramos de Cavalieri por triángulos infinitesimales va a ser una de las ideas motrices del descubrimiento leibniciano del Cálculo Infinitesimal. Por consiguiente, lo que Leibniz va a hacer, será aplicar a las curvas algunos instrumentos arguesianos de origen perspectivo. La tesis central consiste en que utilizando determinados triángulos se pueden analizar las curvas y sus áreas comprendidas mejor que si se utilizan los cuadrados de Descartes o los paralelogramos de Fermat, Cavalieri y otros.

La cuadratura leibniciana del círculo (así como de la parábola, de la hipérbola y de otras figuras) no depende sólo del problema de la suma de series infinitas, como suele decirse al comentar la vía que le llevó al descubrimiento del Cálculo Infinitesimal, sino que también está fundada en la idea de reducir a magnitudes las curvas y sus áreas comprendidas por medio de una triangulación de dichas figuras. Dicha triangulación, que puede verse puesta en práctica en el De Quadratura Aritmetica, es de inspiración «perspectiva», como vamos a confirmar a continuación.

La posibilidad de estudiar las curvas y las figuras por medio de triángulos infinitamente pequeños había sido «*intuída*» por Leibniz al leer los papeles de Pascal, tal y como él mismo refirió al hablar del *triángulo característico pascaliano* y tal y como puede constatarse sobre sus propios manuscritos de 1675 y 1676. Una frase tachada de la carta de Leibniz a E. Périer, el depositario del fondo Pascal, fechada el 30 de agosto de 1676, así lo atestigua:

> «Et comme il arrive que quelques unes de ces six droites qui font l'Hexagramme sont infiniment petites, c'est de là que viennent les proprietez des touchantes des sections du cone [29]».

Esta carta de Leibniz resulta muy importante, a mi modo de ver, porque en ella Leibniz resume para Périer, como éste le había encargado, el contenido de los tratados sobre las cónicas de Pascal, con vistas a decidir sobre la conveniencia de publicar esos documentos de Pascal o no. Al hacer la recensión y evaluación del segundo tratado, Leibniz escribe:

> «Apres avoir expliqué la generation des sections du Cone, faite optiquement par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cone des rayons, il explique les proprietez remarquables d'une certaine figure composée de six lignes droites, qu'il appelle Hexagramme Mystique, et il fait voir par le moyen des projections que tout Hexagramme Mystique convient à une section conique; et que toute la section conique donne un Hexagramme Mystique. J'ay mis au devant

29. *Akademie* III, 1, Br. 90, p. 589, variante de la línea 4.

> ces mots: *De hexagrammo mystico et conico.* Une partie de cette piece se trouve repetée et inserée mot à mot dans une autre, sçavoir les definitions (avec leur corollaires) et les propositions (mais sans les demonstrations) se trouvent repetées dans le traité *De loco solido* dont je parleray cy dessous. Je croy même que les figures du traité *De loco solido* suppleeront au defaut de quelques unes qui manquent dans celuy cy: *De hexagrammo* [30]».

Los hexagramas de Pascal permiten, por consiguiente, una caracterización de todas y cada una de las cónicas, con la peculiaridad adicional de que, para Leibniz, pueden ser infinitamente pequeños.

La carta de Leibniz a Périer constata también la propuesta de un «magnum problema» en uno de los papeles de Pascal: «Dato Puncto in sublimi et solido conico ex eo descripto, solidum ita secare, ut exhibeat sectionem conicam datae similem [31]». Veremos a continuación que este tipo de terminología pascaliana va a ser retomado por Leibniz en sus propias investigaciones sobre Geometría Perspectiva. Podemos pues concluir que la influencia de Pascal, e indirectamente de Desargues, es efectiva. Leibniz transfirió alguno de los métodos e ideas arguesianas a sus propias investigaciones matemáticas, y en particular a sus estudios sobre la cuadratura de las figuras curvas.

4. *Investigaciones inéditas de Leibniz sobre la Perspectiva*

En un artículo publicado en 1983 he dado noticia de la existencia de una serie de seis manuscritos inéditos de Leibniz sobre Geometría Perspectiva, que continúan sin haber sido publicados [32]. Se trata de un conjunto de estudios estrechamente conectados, en los cuales Leibniz intenta demostrar dos teoremas generales sobre Geometría Perspectiva que, en su opinión, proporcionarían los auténticos fundamentos de dicha ciencia. Tras demostrar ambos teoremas en el caso más sencillo, cuando la apariencia de un objeto se reduce a un punto, Leibniz los amplía a figuras más complicadas: triángulos, poliedros, líneas tangentes al cono y, finalmente, el hexagrama de Pascal. A lo largo de esas investigaciones la terminología pascaliana está presente; en el fragmento «Perspectivae Planae Compendium seu delineationis in plana superficie», por ejemplo, puede leerse la expresión «oculum spectatoris ponere in sublimi [33]», que acabamos de constatar en el texto de Pascal a la hora de proponer el «magnum problema».

30. *Ibid.*, pp. 588-589.
31. L. Hd. XXXV. vol XI. 17. f. 12 retro.
32. Ver J. Echeverría (1983).
33. L. Hd. XXXV. vol. XI. 17. Bl. 12 retro.

Del conjunto de seis manuscritos inéditos, a mi modo de ver los más relevantes son el «Origo Regularum Artis Perspectivae qualis sine libro ac magistro inveni» y el ensayo «Scientia Perspectiva», que parece haber sido escrito por Leibniz con vistas a una posible publicación, que desgraciadamente nunca tuvo lugar.

El fragmento titulado *Origo Regularum* propone una figura (ver Fig. 3) en la que se supone un ojo O, una tabla ADB y un objeto R cualesquiera. A continuación, se reducen el ojo y el objeto a dos puntos y la tabla a una superficie plana, colocándolos entre sí a distancias finitas. Leibniz introduce luego un nuevo sistema de coordenadas (triangulares, por supuesto), que le permite definir el punto R por medio de tres magnitudes, al igual que la posición del ojo O y de la apariencia Q del objeto sobre la tabla. A esas tres magnitudes, a las que podríamos llamar coordenadas arguesianas, las denomina *longitudo, latitudo et altitudo.*

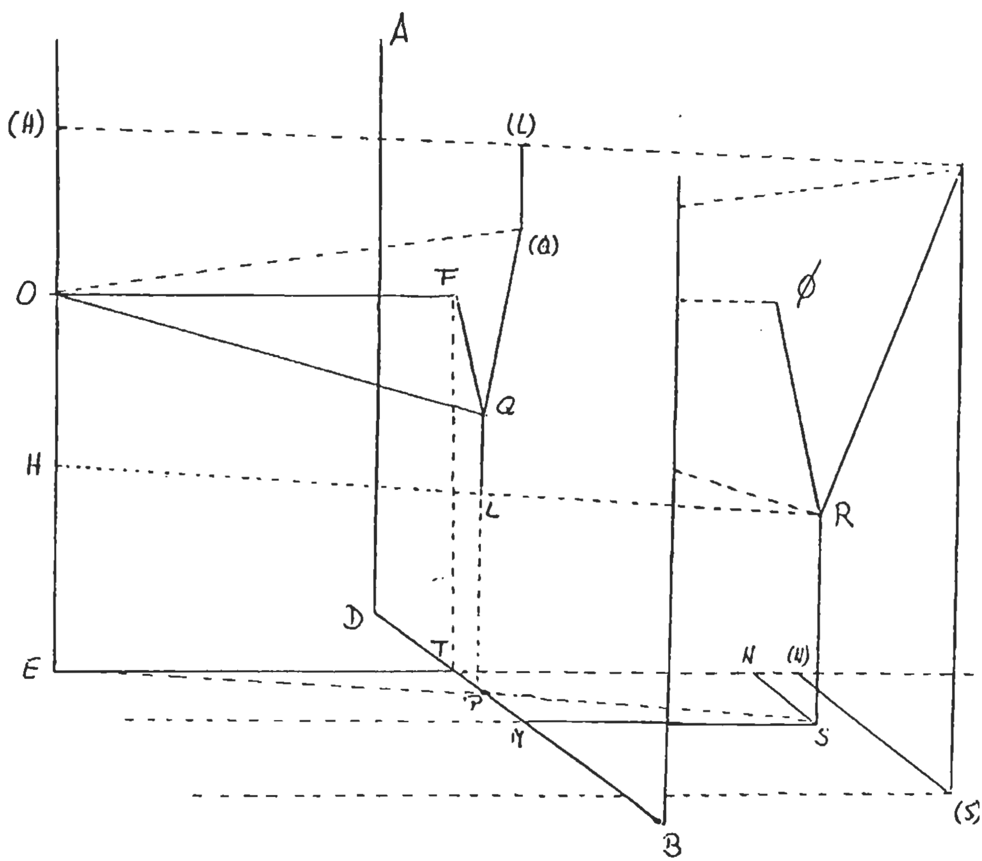


Fig. 3

Puesto que los triángulos OHR y QLR son semejantes entre sí, podemos inferir la proporción OH/LQ = HR/LR; pero como HR=HL (que a su vez es igual a OF+MS, se concluye el primer *teorema fundamental:*

Th. 1: La altitud del ojo (OH) es a la altitud de la apariencia (LQ) como la suma de las longitudes (OF+MS) es a la longitud del objeto (SM).

Como los triángulos ETP y ENS son también semejantes, obtenemos la proporción NS/PT = EN/ET; pero en el rectángulo HRSE se tiene que HR/LR = SE/SP, y en el triángulo ESN vale SE/SP = EN/ET; por consiguiente, Leibniz puede enunciar su *segundo teorema fundamental:*

Th. 2: La latitud del objeto (NS o MT) es a la latitud de la apariencia (PT) como la suma de las longitudes es a la longitud del ojo.

Se sigue de los dos teoremas que, para cualquier objeto, es posible determinar completamente la posición de su apariencia sobre la tabla. Por consiguiente Leibniz puede concluir que, en base a esos dos teoremas, se puede determinar siempre la apariencia Q de un punto-objeto cualquiera sobre cualquier tipo de tabla, independientemente de la posición del ojo, del objeto y de la forma de la tabla. El paso siguiente consiste en demostrar que las relaciones de alineación y de tangencia son invariantes para estas reglas de proyección. El interés del manuscrito de Leibniz consiste precisamente en haber aplicado las técnicas proyectivas a la relación de tangencia entre dos figuras geométricas: ello será lo que le permita transferir algunas nociones arguesianas al problema de las cuadraturas.

Al final del «Origo Regularum», Leibniz puede pretender con razón haber logrado poner en práctica un método geométrico general para estudiar cualquier situación básica en Geometría Perspectiva. El fragmento *Scientia Perspectiva,* que es posiblemente el último de la serie de seis, aplica esos dos teoremas fundamentales al caso del paralelepípedo recto-rectangular y al caso del hexagrama de Pascal. Con ello se logra el objetivo básico de Leibniz cara a la Geometría Perspectiva.

Mas al comienzo de este último manuscrito, Leibniz propone una Ciencia Perspectiva completamente universal, en la cual incluye dos casos particularmente relevantes para el objeto de nuestro estudio, a saber: la situación perspectiva en la que el ojo está situado infinitamente lejos y la configuración «perspectiva» en la que el ojo está colocado infinitamente cerca de la tabla. Veremos a continuación que estas dos extensiones de los dibujos perspectivos a casos en los que la noción de infinito está implicada le van a permitir a Leibniz vincular las ideas de Desargues y de Pascal a sus propias indagaciones sobre las cuadraturas de las figuras curvas de manera precisa y rigurosa.

5. *El manuscrito «De Quadratura Arithmetica»*

Al final de su estancia en París (1675-76), Leibniz escribió y preparó para su impresión un manuscrito muy largo, titulado *De Quadratura Arithmetica Circuli, Ellypseos et Hyperbolae, cuius corollarium est Trigonometria sine Tabulis,* que era un auténtico primer tratado sobre las cuadraturas de las figuras curvas y sobre los métodos de Leibniz para llevarlas a cabo. Desgraciadamente, dicho manuscrito nunca fue publicado completo hasta la reciente edición de Knobloch de 1993. Las ediciones de Gerhardt y de Scholtz fueron parciales [34], a pesar de que se sabía que dicho manuscrito era la fuente más completa sobre la vía que llevó a Leibniz al descubrimiento del Cálculo Infinitesimal. Habiendo aparecido ya la edición completa, habría muchos puntos de interés a comentar. Sin embargo, me limitaré a mostrar que el análisis de dicho texto muestra claramente la utilidad que las ideas de Desargues y de Pascal tuvieron para Leibniz a lo largo de las investigaciones de 1675 y 1676 que le condujeron al descubrimiento del Cálculo Diferencial.

El teorema 1 demuestra la posibilidad de reducir los rectángulos a triángulos, que como vimos constituye la idea central de contraposición al álgebra cartesiana. Pero la proposición más importante al respecto es, sin duda, la de la *transmutación* (Teorema 7), en la cual Leibniz comienza a utilizar triángulos infinitesimales (figura 4).

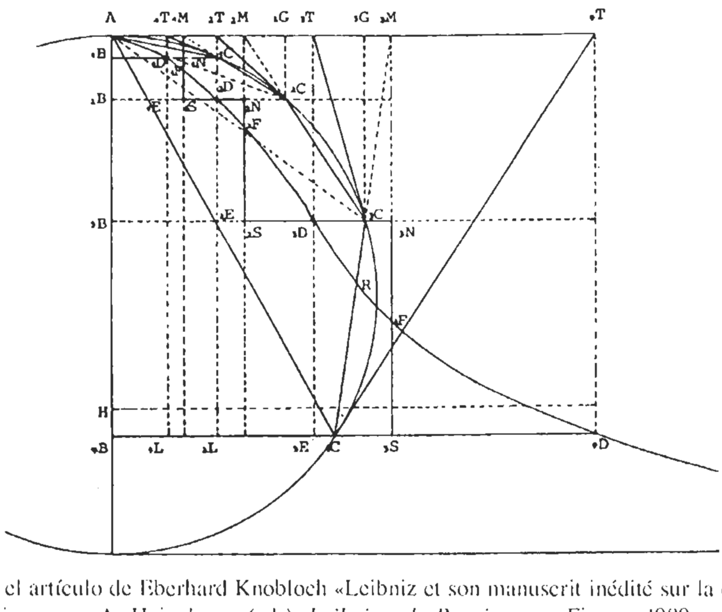


Fig. 4

34. Ver el artículo de Eberhard Knobloch «Leibniz et son manuscrit inédité sur la quadrature des sections coniques» en A. Heinekamp (ed.), *Leibniz et la Renaissance*, Firenze 1989, pp. 127-151, para una historia completa de dicho manuscrito y sus ediciones.

Tal y como dice en un Scholium ulterior: «nobis propositio septima viam dedit, cujuslibet curvae datae segmento cuidam vel sectori, utcunque parvo, duplicato, infinitis modis, figuras longitudine infinitas exhibendi aequales [35]».

Esta es la novedad técnica esencial que Leibniz propone en relación a sus predecesores en el Análisis de los Infinitésimos: reducir los rectángulos infinitesimales (o elementales, como él los llama) a triángulos infinitesimales, sumando a continuación las áreas de dichos triángulos conforme a un sistema de ordenadas convergentes. Por supuesto, ello le llevará a obtener series numéricas diferentes, para cuya resolución tendrá algunas dificultades. Pero para nuestro objeto podemos prescindir de esos desarrollos ulteriores del *De Quadratura Arithmetica* para subrayar las alusiones que, precisamente en este momento, hace a Desargues y a Pascal en el Scholium del Teorema 7, que el propio Leibniz considera como el fundamental de su tratado:

> «Quod ad ipsam attinet propositionem, arbitror unam esse ex generalissimis, atque utilissimis, quae extant in geometria, usque adeo enim universalis est, ut omnibus curvis, etiam casu aut pro arbitrio sine certa lege ductis, conveniat; et data qualibet figura alias exhibeat numero infinitas, quarum singularum dimensio pendeat ex priore vel contra. Sed et inter foecundissima Geometriae theoremata haberi potest [36]».

Estamos pues ante el mismo «teorema fecundo» del que Leibniz hablaba a Gallois. Pues bien, las ideas arguesianas sirven de fundamento a dicho teorema, como Leibniz explicita a continuación:

> «Porro cum clarisimi geometrae, qui Conica universaliter tractare coepere, ordinatarum ad curvas nomine comprenhendant non tantum rectas parallelas, quales sunt 1C 1B, 2C 2B, 3C 3B, ut vulgo fieri solet, sed etiam rectas A 1C, A 2C, A 3C, quae omnes ad unum punctum commune A, convergunt (quod vel ideo recte fit, quoniam ipsaemet parallelae sine errore pro convergentibus sumi possunt, ita tantum ut punctum concursus earum seu centrum commune infinite abesse fingatur, quemadmodum alter parabolae focus aut vertex). Hinc jam ope theorematis hujus nostri feliciter evenit, ut harum quoque novarum ordinatarum, nempe convergentium, usus esse possit ad quadraturas [37]».

Vemos también que, al haber identificado arguesianamente las líneas paralelas y las convergentes, admitiendo por tanto la noción de *punto del infinito*, es posible obtener un nuevo método para analizar y cuadrar las curvas, basado en el sistema

35. *Ibid.*, p. 132.

36. Ed. Knobloch, pp. 35-36, líneas 418-422.

37. *Ibid.*, p. 36, l. 433-442. Knobloch señala en nota que esos «clarissimi Geometrae» son Desargues y Pascal, como evidencia el pasaje tachado por Leibniz a continuación en el manuscrito (*Ibid.*, p. 36 y p. 131).

de triángulos y en las ordenadas convergentes; puesto que el ojo puede estar supuesto en un punto del infinito, la relación entre las nociones perspectivas y el cálculo integral se hace de repente perfectamente clara. Basta con colocar el punto A de la figura 4 en el infinito y analizar a continuación una curva cualquiera f(x) mediante los triángulos mixtilíneos para obtener, sumando los triángulos que tienen su vértice en el infinito, la integral indefinida de f(x)dx.

Para calcular esa suma (o integral) en el caso de una y otra cónica (o curva) habrá que resolver no pocos problemas técnicos ligados a la suma de series numéricas: Leibniz retomará al respecto algunas de las investigaciones de los matemáticos ingleses. Pero la idea básica que llevó a Leibniz a solucionar el problema de las cuadraturas de las curvas parte de nociones extraídas de la Geometría Perspectiva de Desargues y de Pascal. El método de la *transmutación*, que luego denominará Leibniz método de la *metamorfosis*, surge de sus investigaciones sobre la *Ciencia Perspectiva*.

Para terminar, conviene recordar que ulteriormente Leibniz irá introduciendo las notaciones diferenciales, lo cual le permitirá generalizar enormemente dicho método: los rastros de la Geometría Perspectiva desaparecerán por completo cuando Leibniz publique en 1684 su *Nova Methodus*. Mas el estudio de sus notas de lectura, así como de sus borradores y manuscritos primeros sobre las cuadraturas y el Cálculo Diferencial, muestran que la influencia de Desargues y de Pascal fue muy efectiva en un momento clave del desarrollo de las investigaciones matemáticas de Leibniz.

BIBLIOGRAFÍA

ALEAUME: *La perspective speculative et pratique: mise au jour par Estienne Migon*, París: Tavernier & Langlois 1643.

ANONYME: «Girard Desargues, de Lyon», *Magasin Pittoresque* 1849, pp. 166-168.

F. AMODEO: *Nuova analisi del trattato delle coniche di Gerard Desargues*, rendiconti Accademia Napoli 1906. *Origine e sviluppo della geometria proiettiva*, Napoli: Pallerno 1939.

K. ANDERSEN: «Desargues' Method of Perstective», *Centaurus* 34 (191), pp. 44-91.

A. BIREMBAUT: «Quelques documents sur Desargues», *Rev. Hist. Sci.* 14 (1961), pp. 193-204.

R. BKOUCHE: «La Naissance du projectif: de la perspective à la géométrie projective», en R. Rashed (ed.), *Mathématiques et Philosophie de l'Antiquité à l'Age Classique*, París: CNRS 1990.

A. S. BLUM: *Abraham Bosse et la société française au XV eme siècle*, París: A. Morancé 1924.

E. BODEMANN: *Die Leibniz-Handschriften*, Hannover-Leipzig: Hahn 1895.

A. BOSSE: *Manière universelle de Mr. Desargues pour pratiquer la Perspective*, París 1648.

N. A. COURT: «Desargues and his strange theorem», *Scr. Math.* 20 (1954), pp. 5-13 y 155-164.

P. COSTABEL: «Note sur l'annexe au Brouillon-Project: Desargues», en *Atc. VIIene Congr. Hist. Sci.*, Jerusalem 1953, pp. 241-245. «Traduction française des notes de Leibniz sur les Coniques de Pascal», en *L'oeuvre scientifique de Pascal*, París: Centre International de Synthèse 1964, pp. 85-101.

G. DESARGUES: *Oeuvres (ed M. Poudra), París: Leiber 1864.*

J. DHOMBRES ET J. SAKAROVITH (EDS.): Desargues en son temps, París, Blanchard, 1994.

J. DUBREUIL: *La perspective practique*, París: Tavernier & Langlois 1642.

J. ECHEVERRÍA: «L'Analyse Géométrique de Grassmann et ses rapports avec la Caractéristique Géométrique de Leibniz», *Studia Leibnitiana* XI/2 (1979), pp. 223-273. *Edition critique des manuscrits de Leibniz concernant la Caractéristique Géométrique en 1679*, 8 microfichas, Univ. de Lille III 1984. «La Geometría leibniciana: de la Perspectiva al Analysis Situs», *Actas II Congreso Sociedad Española de Historia de las*

Ciencias, Jaca 1982, vol. III, pp. 69-78. «Recherches inconnues de Leibniz sur la Géométrie Perspective», en A. Heinekamp (ed.) *Leibniz et la Renaissance*, Wiesbaden: Steiner 1983, pp. 191-201. «Géométrie et Topologie chez Leibniz», en *V. Internationaler Leibniz-Kongress: Vorträge*, Hannover: Leibniz-Gesellschaft 1988, pp. 213-220. «Cálculos Geométricos de Leibiniz», *Theoria* II, VI, N. 14-15 (1991), pp. 29-66. «Leibniz, interpréte de Desargues», en J. Dhombres et J. Sakarovith 1994, pp. 283-294.

J. ECHEVERRÍA ET M. PARMENTIER (EDS.): G. W. Leibniz, *La Caractéristique Géométrique*, París, Vrin, 1994.

G. ENESTRÖM: «Gérard Desargues und D.A.L.G.», *Bibl. Math.* III:14 (1914), pp. 253-258.

J. V. FIELD AND J. J. GRAY: *The Geometrical Work of Girard Desargues*, New York: Springer 1987.

A.R. HALL: *Philosophers at war: the quarrel between Newton and Leibniz*, Cambridge: Cambridge Univ. Press 1980.

K. HARA: «Nouvelles observations sur les écrits mathématiques de Pascal», *Historia Scientarum* 26 (1984), pp. 1-17 y 27 (1984), pp. 11-25.

J. EH. HOFMANN: *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik*, Leibniz Verlag: München 1949. *Leibniz à Paris 1672-1676. His growth to mathematical maturity*, London: Cambridge Univ. Press 1974. *Register zu G.W. Leibniz Mathematische Schriften und Briefwechseln mit Mathematikern*, Hildesheim: Olms 1977.

G. HURET: *Optique de portraiture et peinture*, París 1670.

J. ITARD: «L'introduction à la Géométrie de Pascal», en *L'oeuvre scientifique de Pascal*, París: Centre International de Synthèse 1964, pp. 102-119.

W. M. IVINS: «Two first editions of Desargues», *Bull. Metrop, Mus. Art* 33-5 (1942). «A note on Girard Desargues», *Scr. Math.* 9 (1943), pp. 33-48. «A note on Desargues 'theorem'», *Scr. Math.* 13 (1947), pp. 203-210.

E. KNOBLOCH (ED.): G. W. Leibniz, *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1993.

D. LANIER ET J. P. LE GOFF: «L'héritage arguésien», en *Les Cahiers de la Perspective, Points de Vue*, 5, juin 1991, pp. 43-116.

J. P. LE GOFF: «Vers l'édition des Oevres Complètes de l'architecte et géomètre lyonnais, Girard Desargues», *Cahiers de la Perspective, Point de Vue*, 5, juin 1991, pp. 7-13, con una «Bibliographie Arguésienne Abrégée», *Ibid.*, pp. 14-19.

G. W. LEIBNIZ: *Sämtliche Schriften und Briefe, Akademie-Ausgabe,* Darmstadt-Berlin, 1923... *MMathematische Scrifien* (ed. C.I. Gerhardt), Halle: 1858-1863. *Der Briefwechseln von G.W. Leibniz mit Mathematikern* (ed. C.I. Gerhardt), Berlin 1899. *Opuscules et fragments inédits* (ed. L. Couturat), París 1903.

PH. DE LA HIRE: *Nouvelles méthodes en Géométrie plane*, París 1673. *Nouveaux elements des Sections Coniques*, París 1679. *Sectiones Conicae*, París 1685.

A. MAIRE: *Bibliographie de l'oeuvre scientifique de Blaise Pascal*, París: Hermann 1912

J. MESNARD: *Pascal et les Roannez*, Bruxelles: Desclée de Brouwer 1965. «Leibniz et les papiers de Pascal», *Studia Leibnitiana Supplementa* XVII (1978), pp. 45-58.

A. DE MONTAIGLON: *Procès-Verbaux de l'Académie Royale de Peinture et de Sculpture* (1648-1792), París: J. Bauer, 1875-1892, 10 vols. (vol. I: 1648-1672).

K. MÜLLER: *Leibniz-Bibliographie,* Frankfurt: Klostermann 1967.
C.Y. PANC: «Leibniz in Paris», *Scripta Mathematica* XX:1-2 (1954), pp. 37-50.

J. PARES: «La Gnomonique de Desargues à Pardies», *Cahiers d'Historie et de Philosophie des Sciences* 17 (1988), pp. 1-181.

BL. PASCAL: *Oeuvres Complètes*, París: Seuil 1963.

M. POUDRA: *Historie de la perspective ancienne at moderne*, París 1864.

P. RITTER: *Kritischer Katalog der Leibniz-Handschriften*, Berlín 1908.

A. RIVAUD: *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz*, Poitiers: Soc. Fr. d'imprimerie et de librairie, 1914-1924.

J. P. SCHOBINGER: *Kommentar zu Pascals Reflexionen über die Geometrie im allgemeinen,* Basel-Stuttgart: Schawabe 1974.

B. A. SWINDEN: «Geometry and Girard Desargues», *Math. Gaz.* 34 (1950), pp. 253-260.

P. TANNERY, «Sur un opuscule de Desargues», en *Mémoires scientifiques,* vol. VI, Nr. 8 (1890), pp. 115-118.

R. TATON: «Découverte d'un exemplaire original du *Brouillon-Project sur les Coniques* de Desargues», *Revue d'Histoire des Sciences* 4 (1951), pp. 176-181.
— «Documents nouveaux concernant Desargues», *Arch. Int. Hist. Sci.* 4 (1951), pp. 620-630.
— «La première oeuvre géometrique de Philippe de La Hire», *Revue d'Histoire des Sciences* 6 (1953), pp. 93-111.
— *L'oeuvre mathématique de Desargues*, Paris: PUF 1951, reimp. 1981 y 1988.

— «L'oeuvre de Pascal en Géométrie Projective», en *L'oeuvre scientifique de Pascal,* Paris: Centre International de Synthèse 1964, pp. 17-72.
— «L'initiation de Leibniz à la Géométrie», *Studia Leibnitiana Supplementa* XVII (1978), pp. 103-129.

R. Taton et J. Mesnard: «Edition critique de la lettre de Leibniz à Périer du 30 août 1676», en *L'oeuvre scientifique de Pascal,* Paris: Centre Internationale de Synthèse 1964, pp. 73-84.

G. Valentin: «Zwei Briefe von Desargues und Bosse», *Bibliotheca Mathematica* IIIeme s., Nr. 13 (1912), pp. 23-28.

G. Wallet: «L'origine du calcul différentiel chez Leibniz», *Cath. Fundamenta Sci.* 98 (1980), pp. 1-18.

H. Wieleitner: «Ueber die 'Plani-Coniques' von de La Hire», *Arch. Gesch. Naturwiss. Unterricht* 5 (1913), pp. 49-55.

LA POLÉMICA LEIBNIZ - CLARKE

Raquel Santos Elorrieta
Mª Jesús Castaño Vinuesa
Profesoras de Filosofía
I.B. Granadilla
I.B. Los Realejos

Introducción: Las raíces de la polémica

En noviembre de 1715 Leibniz escribió una carta a la princesa de Gales [1] en la que expresaba sus recelos relativos al debilitamiento de la religión y la propagación del materialismo y las filosofías sin Dios en Inglaterra, en donde algunas personas no sólo dudaban de la inmaterialidad y la inmortalidad del alma sino que incluso llegaban a atribuirle materialidad a Dios, y donde el propio Isaac Newton y sus amigos tenían ideas que rebajaban e infravaloraban el poder divino.

Una acusación de este tipo era lógico que no se quedara sin respuesta, pero dado que Newton consideraba una indignidad hacerlo él mismo —quien además odiaba las polémicas y discusiones públicas—, la tarea recayó sobre el doctor Samuel Clarke [2], discípulo

1. Wilhelmine Carolina, quien posteriormente se convertiría en reina, fue princesa de Brandenburg-Anspach antes de convertirse, en 1705, en esposa de George Augustus, príncipe elector de Hannover. Como princesa de Hannover se hizo amiga íntima de Leibniz.

2. EL doctor Samuel Clarke fue rector de St. James, Westminster. Además de ser un teólogo filosófico, fue capellán de la reina Ana, aunque fue destituido del cargo por falta de ortodoxia ya que prácticamente era arriano. A pesar de ésto, tras la muerte de la reina Ana se hizo amigo íntimo de la princesa Carolina.

y fiel amigo de éste, quien además tradujo al latín su *Óptica*. Como resultado de ello se comenzó una larga y fructífera correspondencia en la que la princesa Carolina actuó como intermediaria, y que fue mantenida entre 1715 y 1716. Se publicó en Londres un año después de la muerte de Leibniz y la edición estuvo a cargo del propio Clarke.

Existen muy diversas razones que justifican la importancia de estos escritos, acentuadas por el hecho de que históricamente han sido interpretadas de forma bastante parcial. Ya las ediciones de Clarke y de Des Maizeaux estuvieron al servicio de las pretensiones de Newton contra Leibniz. Es bien famosa la rivalidad científica que existió entre ambos, sobre todo en lo referente a la invención del cálculo infinitesimal; pero sus antagonismos llegaron mucho más lejos, incluso al campo de la rivalidad personal.

Leibniz había atacado a Newton en muy diversas ocasiones, e incluso en su *Teodicea* acusó a la gravedad de comportarse como una «*cualidad oculta*». Con respecto a esta acusación Newton sólo hace un amago de respuesta en los retoques de los Principia y del Escolio General con su «*Hypóthesis non fingo*», y también se reconoce que pudo influir en las Questiones añadidas en la edición latina de la Óptica. Pero, como dice Eloy Rada en la Introducción a su edición de la *Polémica*, «*este era sólo un episodio más, la verdadera confrontación se iba a producir en un terreno más ambiguo y seguramente de mayor audiencia, cual era el de la teología natural*» (p. 22).

A partir de 1690 surge una generación de teólogos que,amén de suscribir el credo latitudinarista [3] en general, están además influidos por la filosofía natural de Newton, de tal modo que llegarán a explicitar el nuevo orden natural y social de acuerdo con la síntesis filosófico-teológica de éste.

La vía oportuna para difundir esta doctrina filosófica, teológica y científica fue la institución testamentaria de Boyle en la que fundaba unas conferencias, las «Boyle Lectures», cuyo objeto sería defender la Religión Cristiana contra los infieles más destacados, ateos, teístas, paganos y judíos. Los albaceas de Boyle entendieron que las respuestas más adecuadas a las nuevas dificultades y objeciones se hallaban contenidas en los *Principia* y en general en la filosofía natural de Newton. De este modo, los más destacados newtonianos se ocuparon de la cátedra «Boyle», dentro de la lista de conferenciantes desde 1692 a 1714, Clarke ocupaba el número once. Tenía un conocimiento muy completo y profundo de la obra de Newton, y fue él quien estableció de un modo más claro y coherente las bases naturalistas newtonianas para su construcción ética, política y religiosa del modelo social, de modo paralelo a como lo hiciera con el modelo físico; la continuidad entre ambos modelos estaría garantizada por la providencia, poder, infinitud y omnipresencia divinas.

3. El latitudinarismo es un movimiento dentro de la Iglesia Anglicana caracterizado por la tolerancia de ideas y por propugnar la necesidad de que la razón se constituya en juez y guía de todo.

En cuanto al contenido mismo de la polémica podríamos cifrar la tesis inicial en la afirmación de Leibniz de que Newton hace a Dios material y además inepto para hacer un mundo perfecto, porque el mundo que Newton prescribe no es el mejor de los mundo posibles.

La primera afirmación la hace Leibniz basándose en la teoría newtoniana del espacio y del tiempo —eslabones, junto con la providencia y el poder divinos, entre Dios y el mundo— y en particular en sus caracteres de «sensorium Dei» y de «absoluto». La segunda en la afirmación newtoniana de que el mundo se va «ralentizando» y se pararía con el paso del tiempo, y por eso Dios ha de repararlo de cuando en cuando. Defenderse de esta acusación era cuestión más filosófica y teológica que propiamente científica.

1. La decadencia de la religión natural

Esta es la tesis de partida, según la cual Leibniz cree que la física de Newton es insuficiente para fundamentar una explicación adecuada de Dios, de su existencia y de su naturaleza, tanto como de su acción en el mundo.

1.1. La intervención de Dios en el mundo

En la Cuestión 28 de la Óptica dice Newton: «Debido a la tenacidad de los fluidos, al rozamiento de sus partes y a la debilidad de la elasticidad de los cuerpos, el movimiento es mucho más proclive a perderse que a ganarse y siempre está extinguiéndose» (*Óptica, p.316*), de ahí que Dios tenga que poner en hora el reloj cósmico cuando empieza a retrasarse.

La crítica de Leibniz a Newton está focalizada, mayormente, sobre la concepción teológica de este último.

Planteamiento de Leibniz

«La cuestión es: ¿Dios obra lo más regularmente posible? ¿su máquina es capaz de caer en tales desórdenes que esté obligado a repararla?, y la voluntad de Dios ¿es capaz de actuar sin razón?, y el espacio ¿es un orden absoluto?, ¿en qué consiste la naturaleza del milagro?» (Polémica, pág.71).

—Dios es un ser perfecto y omnipotente.

El desarrollo y las distintas implicaciones de esta idea entran en contradicción con la concepción de un mundo imperfecto que hay que reorganizar de vez en cuando: si Dios es perfecto sus obras lo han de ser también, si es omnipotente, ¿qué le hubiese impedido crear un mundo en el que el movimiento y la fuerza se mantuviesen siempre idénticos?

Para Leibniz es incuestionable la existencia de Dios, varias pruebas rigurosas dan razón de ello: el argumento ontológico, el cosmológico, la prueba de las verdades eternas y la de la armonía preestablecida.

En cuanto a la esencia divina, en principio hay que aclarar su distanciamiento tanto de Spinoza como de Descartes. Sobre ambos recaen sus críticas en la *Teodicea*, declarándose contrario a un Dios-Naturaleza, sustancia única fuera de la cual sólo habrían sus propios accidentes y modificaciones.

El Dios de Leibniz en tanto que sustancia se caracteriza por la omnipotencia, es ante todo voluntad de ser, poder infinito. Pero no sólo es omnipotente sino que además posee inteligencia y voluntad. Y esta causa inteligente debe ser infinita, perfecta en poder, en sabiduría y en bondad. Su poder reside en el ser, su sabiduría en la verdad y su voluntad en el bien.

«Su entendimiento es la fuente de las esencias y su voluntad es la causa de las existencias» (Citado por Belaval, *Teodicea*, I, § 7; págs. 111-12, ed. Claridad).

El mundo que existe es contingente o, lo que viene a ser lo mismo, Dios es plenamente libre de crearlo. Dios sólo puede estar determinado por sí mismo: su espontaneidad es absoluta. En el entendimiento divino existen una infinidad de esencias eternas pujando por existir, y Dios al combinar dichas esencias no sólo tuvo en cuenta la posibilidad del mundo existente sino que valoró también la posibilidad de crear otros, y es perfectamente libre de hacerlo. Pero ¿cómo elige?

Cada esencia eterna tiene un grado de perfección, que Leibniz llama «cantidad de esencia», y que viene caracterizado precisamente por su tendencia a coexistir, a ser composible con otras esencias. Las posibilidades de existir de las esencias eternas no son equivalentes y surge una gradación. La sabiduría de Dios penetra, sopesa y compara unas posibilidades con otras para estimar sus grados de perfección o de imperfección; hace una infinidad de infinitos, es decir, una infinidad de series posibles del Universo donde cada una contiene una infinidad de criaturas. Esta es la primera fase que suele llamar Leibniz «matemática divina» o «mecanismo metafísico». En la segunda fase interviene la voluntad divina guiada por el principio de perfección o de óptimo: en el caso de las esencias existentes pasa a existir aquella que más perfección implica en su relación con las restantes.

El mundo existente es el mejor de los mundo posibles ya que es el más perfecto, es decir, aquel en el que existen más esencias en un mínimo de difusión espacio temporal [4]. El universo entero no podría disminuir en perfección.

4. Ver la conferencia de Ortega y Gasset «Del Optimismo en Leibniz», en *La idea de principio en Leibniz*, pp. 335-368.

Y es aquí donde tendremos que hacer referencia a una cuestión determinante para entender esta última afirmación: se trata de la teoría de la *armonía preestablecida*.

Aunque cada mónada es un mundo aparte, cambia en correspondencia armoniosa con los cambios de todas las demás mónadas, según una ley o armonía preestablecida por Dios. El Universo es un sistema ordenado en el que cada mónada tiene su función particular. Las mónadas están de tal modo relacionadas unas a otras en la armonía preestablecida que cada una de ellas refleja la totalidad del sistema infinito de un modo particular.

Pero no hay interacción causal directa entre las mónadas, «*la unión de alma y cuerpo, y aun la operación de una sustancia sobre otra, consiste solamente en el mutuo acuerdo perfecto, finalísticamente establecido por el orden de la primera creación, en virtud del cual cada sustancia, siguiendo sus propias leyes, conviene con lo que las otras requieren; y, así, las operaciones de la una siguen o acompañan la operación y cambio de la otra*».

Frente a los ocasionalistas, Leibniz propone esta teoría, según la cual el mundo necesita ser conservado por Dios, y depende de Éste para continuar en la existencia; pero es un reloj que marcha sin necesidad de que se le enmiende.

Hay que observar aquí una conciliación de la causalidad mecánica con la causalidad final: las cosas materiales actúan de acuerdo con leyes fijas y averiguables (con leyes mecánicas). Pero todas estas actividades forman parte del sistema armonioso establecido por Dios según el principio de perfección.

Es necesario que nos detengamos en la cuestión de la **dependencia del mundo respecto de Dios**, por ser una cuestión ampliamente debatida por Clarke y Leibniz. Este último se defiende de las acusaciones que Clarke vierte sobre él, en el sentido siguiente: si se afirma que el curso del mundo puede seguir sin la dirección continua de Dios como su supremo gobernador, se ha de concluir necesariamente con la exclusión total de Dios del mundo, es decir que el mundo no necesita de la Providencia divina para su perfecto funcionamiento, y Dios regiría sobre él de una forma meramente nominal. Esto traería como consecuencia añadida que el mundo debería ser infinito, sin principio ni fin en el tiempo.

Pero nada más alejado de las intenciones de su pensamiento según el propio Leibniz, y de esta forma se defiende en las cartas II y V,:

Dios conserva siempre las cosas, las cuales no podrían subsistir sin él... (Polémica, pág 60)

y en otro lugar:

...he sostenido que la dependencia de la máquina del mundo de un autor divino es más bien la causa de que ese defecto no se dé y de que la obra no tenga necesidad

de ser arreglada; no se puede inferir contra mí, que es necesario, si esto es así, que el mundo material sea infinito y eterno (*Polémica*, pág. 156).

En principio toda proposición existencial, excepto la proposición «Dios existe», es contingente, y esto porque en el origen del mundo está una elección, una decisión y un acto divino. El mundo es finito y Dios ha sido plenamente libre de crearlo o no.

Y en cuanto a su subsistencia, Leibniz afirma solamente que Dios no tiene necesidad de corregir el mundo, por la razón de que ya lo ha organizado perfectamente previamente, y en este sentido es incuestionable que las cosas dependen enteramente de él, en el sentido de que no hay nada que ocurra en el mundo que no haya sido previamente proyectado por Dios.

Mas, a pesar de ello, es evidente también para Leibniz que **Dios posee una naturaleza supramundana** y no está comprendido bajo la naturaleza de las cosas. Es causa primera y su espontaneidad es absoluta, es decir, no está determinado a obrar más que por sí mismo.

Si Dios tiene que corregir el curso de los acontecimientos mundanos de vez en cuando, sólo puede hacerlo de dos formas, o bien de forma sobrenatural (milagrosa), o bien mediante medios naturales. Está claro que el primer caso está totalmente descartado; Dios está constantemente presente en el mundo como causa primera y ha de suponérsele como directamente responsable de su creación así como de su exterminio, pero los procesos naturales que implican el desarrollo y transformación de la materia han de explicarse por causas naturales y mecánicas. Esto nos sitúa en el segundo de los casos propuestos, si Dios necesita interferir en el mundo para corregirlo con cierta frecuencia, Dios se incluye en la naturaleza y se convierte en el alma del mundo.

Las características fundamentales de este Dios de Leibniz en su relación con este punto aparece de modo esclarecedor detallado por Alexandre Koyré en el siguiente texto:

«El Dios de Leibniz no es el Señor feudal que hace el mundo como quiere y continúa actuando sobre él como hizo el Dios bíblico en los primeros seis días de la creación. Es más bien, si se me permite seguir con el símil, el Dios bíblico del día sabático, el Dios que ha terminado su obra y que la ha hallado buena, es más, el mejor de todos los mundos posibles, y que, por tanto, no tiene más que hacer en él, sino tan sólo conservarlo y preservarlo en su ser. Al mismo tiempo, este Dios es —una vez más, frente al Newtoniano— el Ser supremamente racional, el principio de razón suficiente personificado, razón por la cual tan sólo puede actuar de acuerdo con tal principio; es decir, tan sólo para producir la mayor perfección y plenitud[5]».

5. Alexandre Koyré. *Del mundo cerrado al universo infinito*, pág 223.

Esto nos introduce en uno de los puntos más calientes de esta polémica, si Dios tiene que poner a punto el reloj del mundo de vez en cuando, ¿quiere esto decir que la fuerza y el vigor del mundo van progresivamente desapareciendo de éste?, desde luego para Leibniz esto no es así ya que se declara decididamente a favor de la permanencia de la misma fuerza en el mundo, si bien dicha fuerza es redistribuida constantemente a través de los procesos de choque de los cuerpos.

A este respecto dice Leibniz en su escrito «Principios de la Naturaleza y de la Gracia fundados en Razón»:

La suprema sabiduría de Dios lo ha hecho elegir sobre todo las leyes del movimiento mejor ajustadas y que mejor convienen a las razones abstractas o metafísicas. En ellas se conserva la misma cantidad de fuerza total y absoluta o de la acción; la misma cantidad de fuerza respectiva o de la reacción; la misma cantidad, por fin de la fuerza directiva. Además la acción es siempre igual a la reacción y el efecto íntegro siempre equivale a su causa plena (*Escritos filosóficos*, pág. 602-3, ed. Olaso).

Está de más decir nada sobre la importancia que el concepto de fuerza tiene dentro del sistema filosófico de Leibniz y eje, al mismo tiempo, de esa nueva disciplina inaugurada por él : La Dinámica. Veamos como se autoexplica Leibniz su escrito «Examen de la física de Descartes» de Mayo de 1702:

Los cartesianos colocan la esencia de los cuerpos únicamente en la extensión; yo, en cambio, aunque no admito ningún vacío —al igual que Aristóteles y Descartes, contra Demócrito y Gassendi—juzgo —contra Aristóteles y junto con Demócrito y Descartes— que la rarefacción o condensación son sólo aparentes, considero sin embargo —con Demócrito y Aristóteles contra Descartes— que en los cuerpos hay algo pasivo además de la extensión, esto es, aquello que en los cuerpos resiste a la penetración. Pero, por otra parte, reconozco en los cuerpos una fuerza activa o entelequia —con Platón y Aristóteles, contra Demócrito y Descartes—. Considero que todo cuerpo tiene siempre una fuerza motriz, incluso un movimiento intrínseco actual, ínsito en el desde el origen de las cosas. (*Escritos filosóficos*, pág. 434-5.ed. Olaso).

Leibniz impugna la reducción de los cuerpos a la extensión, y proclama que en la vieja doctrina de las formas sustanciales hay algo de cierto. El factor esencial es la idea de **fuerza**; la fuerza es causa y principio del movimiento, pero también es causa y principio de la extensión, porque constituye el ser de lo extenso. Todo esto es la fuerza motriz; es responsable del movimiento y de la extensión, es activa porque genera la acción que hay tras toda transformación, y también es pasiva, en cuanto que gracias a ella los cuerpos se convierten en sujetos pacientes de tales transformaciones, son movidos y oponen resistencia, haciendo que a toda acción acompañe una reacción equivalente.

Esta *fuerza pasiva* de los cuerpos es en todas partes la misma y proporcional al tamaño de éstos.

La *fuerza activa* envuelve un conato o tendencia a la acción de modo tal que la acción se sigue si algo no lo impide. Ahora bien esta fuerza es doble, *primitiva* y *derivativa*, esto es substancial o accidental.

La fuerza activa primitiva es otro principio natural que junto con la materia o fuerza pasiva constituye la sustancia corpórea. Esta entelequia es o bien alma o bien algo análogo y siempre obra naturalmente sobre un cuerpo orgánico.

La fuerza derivativa es un conato, una tendencia a un movimiento determinado, por consiguiente aquello mediante lo cual se modifica la fuerza primitiva o principio de acción. La misma fuerza no se conserva en el mismo cuerpo pero sin embargo, cualquiera que sea el modo en que se distribuya en muchos cuerpos permanece siendo la misma en total y difiere del movimiento mismo cuya cantidad no se conserva.

La fuerza primitiva se transforma en derivativa en el choque de los cuerpos, esto es en cuanto el ejercicio de la fuerza primitiva se vierte hacia adentro o hacia afuera. Pero realmente todo cuerpo tiene movimiento interior y nunca puede ser reducido a reposo. Esta fuerza interna se vierte hacia afuera cuando cumple función de fuerza elástica, a saber, cuando el movimiento interior se ve trabado en su curso normal; todo cuerpo es, por lo tanto, esencialmente elástico. Y si todo cuerpo no fuera elástico no podría establecerse las verdaderas leyes del movimiento. Cuanto más duro es un cuerpo tanto más elástico es y rebota con más fuerza. En realidad los cuerpos siempre reciben del choque un movimiento propio que poseen por fuerza propia a la que el impulso ajeno sólo ofrece la ocasión y, por decirlo así, la determinación de obrar.

Ni siquiera en la conservación de la fuerza absoluta la naturaleza se aparta de su constancia y de su perfección.

En el tercer escrito a Clarke dice Leibniz:

«*Si la fuerza activa disminuyese en el universo por las leyes Naturales que Dios ha establecido, de manera que precisase suministrar una nueva Impresión a fin de restaurar la Fuerza, como un Artesano que repare las imperfecciones de su Máquina, entonces el desorden no sólo sería con respecto a Nosotros, sino también con respecto al propio Dios. Este podría haberlo evitado, tomando medidas para escapar a tales inconveniencias; por tanto, ciertamente, de hecho, las ha tomado*». (*Polémica*, pág 70).

Es de destacar aquí el peso que en la argumentación tienen tanto el Principio de Razón Suficiente como el Principio de Perfección, ambos aplicados al quehacer divino. Para Clarke la argumentación carece de sentido desde el momento en que se afirma la absoluta libertad divina, o sea la no necesidad de una razón determinante de la elección y acción de Dios. Pero para Leibniz esta sería una elección inmotivada y esto no supone una verdadera libertad sino una vaga indiferencia. Clarke, por el contrario, considera que una acción absolutamente motivada de Dios, en este caso guiada por el principio de máxima perfección, sería no una acción libre sino necesaria.

Planteamiento de Clarke y Newton

Cuando Newton muere deja una muy cuantiosa colección de manuscritos personales («Colección Portsmouth»), donde se encuentran miles de folios cuyo contenido no reflejan un Newton científico, sino más bien un Newton alquimista y sumamente religioso, comentarista e intérprete de textos bíblicos.

La Biblia, para Newton, era la otra «entrega» divina (la primera era la hecha en la creación) y por ello acudía a su estudio de un modo apasionado, pues allí se hallaban las claves para conocer el formidable plan de Dios, para conocer la historia total del mundo.

La existencia de un Newton renacentista y medieval, podemos verla reflejada en la vinculación teórica de Dios con las cuestiones últimas de la *Óptica* o de los *Principia*, y en última instancia, de todo el sistema. Esta dependencia del mundo respecto a su Dios —como creador, ordenador, conservador, restaurador, etc..— no es algo marginal en la filosofía de Newton sino el punto de convergencia de sus líneas de pensamiento, las cuales se asemejan más al teocentrismo medieval que a la «autonomía del mundo y del individuo».

Burtt, es uno de los representantes que nos muestra la faz del Newton teólogo. La religión para Newton —dice Burtt— tenía un interés fundamental, él creía que ciertos hechos empíricos expuestos a la observación de todos implicaba la existencia de un Dios de naturaleza y de acción definida. Dios no estaba separado del mundo que la ciencia trata de conocer; en efecto cada paso verdadero de la filosofía natural nos acerca a un conocimiento de la causa primera. En Newton hay una subordinación de la ciencia a la religión, en última instancia el reino de la ciencia depende del Dios de la religión. Newton creía que el hecho científico suponía el teísmo, pero se separa del teísmo postulado como corolario de la ciencia, puesto que para él la realidad de lo existente no se circunscribe únicamente al mundo acotado por la ciencia.

Por otra parte, basado en el principio de que hay un orden cósmico (de que habría fines inteligibles), Newton expresa, en sus obras clásicas, sus argumentos acerca del origen divino del mundo. De entre ellos, el más evidente es el de que se expresa en la primera carta a Bentley:

«Los movimientos que ahora tienen los planetas no podían provenir solamente de una causa natural, sino que los imprimió un agente inteligente» (*Burtt, Los fundamentos metafísicos de la ciencia moderna*, p. 316).

Así pues, el estudio de Newton no puede limitarse a su vertiente mecanicista tal como se expone en los *Principia* y en la *Óptica*, pues el mismo Newton rehusó explicar el universo solo a través del mecanicismo, ya que estimaba que *«este bellísimo sistema del sol, los planetas y cometas sólo puede proceder de la sabiduría y el poder de un Ser inteligente y soberano»*.

En oposición a Leibniz, Newton sostiene sobre el orden y adaptación del mundo, una concepción religiosa del universo que se basa en que Dios creó originalmente las masa y las puso en movimiento, constituyendo con su presencia continuada el espacio y el tiempo en que se mueven. No debemos olvidar en este sentido, como señala Burtt, que ninguno de los predecesores de Newton tuvo una concepción plenamente coherente del mundo como una máquina matemática; así Descartes, a pesar de su mecanicismo, sostenía que Dios mantenía la gran máquina del mundo por medio de un «concurso general».

Mientras que Leibniz adopta la orientación intelectualista al modo tomista, Newton y seguidores, adoptan la visión voluntarista de Dios (propia de agustinianos y franciscanos). La tradición inglesa voluntarista de la filosofía moderna y medieval tendían a subordinar el entendimiento de Dios a su voluntad; el dominio y poder de Dios son más notables que su sabiduría y conocimiento. Así, en el famoso párrafo sobre la naturaleza de Dios en la segunda edición de los *Principia*, Newton expresa esta concepción:

«Él lo rige todo, no como alma del mundo, sino como dueño de todos. Y por su dominio, suele llamarse señor dios «emperador universal» (*Principia II*, p. 782).

Es por ello que resultaría absurdo concebir a un ser despojado del gobierno que ejerce actualmente de su creación.

Según Burtt, Newton postula que el orden, la belleza, y la armonía que caracteriza el reino celeste tienen que ser eternamente conservados. El espacio, el tiempo, la masa y el éter solos no pueden conservarlo, su conservación requiere el ejercicio continuo de esa voluntad divina que escogió este orden y armonía como fines de su primera tarea creadora.

— La Degradación del movimiento y la necesidad de un arreglo divino.

La pérdida de la cantidad de movimiento en el mundo es uno de los fundamentos en que se apoya Newton y sus seguidores para justificar la intervención de Dios en el mundo. En la cuestión 31 de la *Óptica* Newton nos dice:

«En efecto, de las diversas maneras de componerse dos movimientos se desprende con toda certeza que no hay siempre la misma cantidad de movimiento en el mundo. Por ejemplo, si dos globos unidos con una varilla ligera giran en torno a su centro de gravedad común con un movimiento uniforme, mientras que dicho centro se mueve uniformemente en una línea recta contenida en el plano de su movimiento circular, entonces la suma de los movimientos de los dos globos, en el momento en que éstos están en la línea recta descrita por su centro común de gravedad, será mayor que la suma de sus movimientos cuando están en una línea perpendicular a ésta. De este ejemplo se desprende que el movimiento se puede ganar o perder [6]».

La polémica en este punto se centra en la diferentes concepciones de la fuerza como supuesta causa del movimiento: en Newton se parte de una concepción donde el acento recae en la inercia, es decir en la imposibilidad de los cuerpos de modificar, por sí mismos, sus estados; no hay principio de actividad en ellos. En Leibniz la concepción es dinámica: el fundamento de las fuerzas traspasa el ámbito de lo mecánico, centrándose en el dinamismo de la substancia, el acento recae en la vis viva.

Al contrario que la teoría de la materia cartesiana, Newton afirma que la materia está dotada de un principio de inercia que, al no operar en condiciones iguales, no es capaz de conservar el movimiento, el cual tiende a perderse más que a aumentar. Por lo tanto Dios ha de proveer continuamente a la materia de principios activos y, esporádicamente de arreglos más radicales. Se observa aquí las razones teológica de Newton, el cual busca una causa del movimiento ajena a la materia.

Newton recurre a un universo «cuasivacío», incapaz de funcionar por sí mismo, sino fuese por que Dios lo llena y lo mueve con una providencia continua, exigida por un principio de degradación del universo [7].

Clarke en *La Polémica* establece que la asimilación del mundo a un mecanismo perfecto en movimiento sin la intervención divina, «...constituye la idea del *materialismo* y del *Hado*, y en realidad tiende (tras la pretensión de hacer de Dios una *inteligencia supramundana*) a excluir del mundo la *Providencia y el Gobierno de Dios*. Y, por la misma razón que un filósofo puede representarse que todas las cosas se desarrollan desde el comienzo de la creación sin ningún gobierno o interposición de la Providencia, un *Escéptico* podrá fácilmente argüir más lejos aún en el tiempo

6. Sobre el ejemplo expuesto por Newton, Koyré considera extraño que aquél y sus editores no se dieran cuenta de este razonamiento era evidentemente falso.

7. Sobre el problema de la degradación del movimiento, nos informa Carlos Solís que Newton «consideraba que era susceptible de llevar a la destrucción del orden cosmológico existente y a la terminación caótica del universo (de acuerdo con la idea de los cataclismos cíclicos), para la que Newton encontraba apoyo en la Biblia», ver p. 450 de la *Óptica*.

y suponer que todas las cosas han ido desde la Eternidad sin ninguna creación verdadera o sin Autor original alguno, sino sólo con lo que tales razonadores denominan *Naturaleza omnisapiente y eterna*». (citado por Koyré en p. 221).

Para los newtonianos, el Dios leibniziano es un Dios que sólo está interesado en conservar en su ser un mecanismo de relojería construido de una vez por todas y dotado, también de una vez por todas, de una cantidad constante de energía. La diferencia entre Dios y un Dios ausente sería nula.

Desde la perspectiva física, en el choque de dos cuerpos en el espacio cuya velocidad antes del impacto y después de éste no se conserva, un científico actual puede localizar en otras formas la energía aparentemente perdida; al parecer Leibniz ya había defendido que la energía que se pierde a nivel macroscópico sigue manteniéndose en las partículas microscópicas de los cuerpos, pero Newton no tuvo en cuenta ésto, y en su opinión el mundo de la materia parecía ser una máquina muy imperfecta, ya que el movimiento estaba por doquier en decadencia.Y en este sentido afirma en la *Óptica:*

«La vis inertiae es un principio pasivo en virtud del cual los cuerpos persisten en su movimiento o reposo, reciben movimiento en proporción a la fuerza que se les imprime, y repelen tanto cuanto son repelidos. Con este principio solamente nunca podría haber habido movimiento en el mundo. Se necesita otros principios para poner en movimiento estos cuerpos; y estando en movimiento, se necesita otro principio que conserve el movimiento. Pues de la distintas composiciones de dos movimientos surge con certeza que no hay siempre la misma cantidad de movimiento en el mundo».

Y continúa más adelante:

«Siendo así que la variedad de movimiento que encontramos en el mundo está disminuyendo siempre, es necesario conservarla y restablecerla con principios activos, tal como la causa de la gravedad, por la cual los planetas y cometas conservan el movimiento de sus órbitas, los cuerpos adquieren al caer un movimiento grande...» (*Óptica*, p. 343).

1.2. El espacio como «Sensorium dei»

En las cuestiones de la *Óptica*, Newton considera el espacio como sensorio divino; en él, el intelecto y la voluntad de Dios conciben y guían los hechos del mundo físico.

Para Newton el objetivo básico de la filosofía natural es el argumentar a partir de los fenómenos, «sin imaginar hipótesis», y deducir las causas desde los efectos hasta hallar la causa primera, siendo esta última no mecánica. En la cuestión 28 de la *Óptica*, después de hacerse diversos interrogantes sobre las armonía de los cuerpos celestes y de los cuerpos de los animales, Newton nos dice:

«Habiendo despachado estas cosas correctamente, ¿No se sigue de los fenómenos que hay un ser incorpóreo, viviente, inteligente, omnipotente que ve íntimamente las cosas mismas en el espacio infinito, como si fuera en su sensorio, percibiéndolas plenamente y comprendiéndolas totalmente por su presencia inmediata ante él?

Planteamiento de Leibniz

La polémica sobre esta cuestión adquiere en su desarrollo varias vertientes, en principio una cuestión terminológica sobre el significado del término «sensorio», en segundo lugar e inevitablemente la relación que dicho concepto posee con otro sumamente importante aquí, el espacio, y por último, la presencia de Dios en el mundo en su vertiente gnoseológica: relación perceptiva entre Dios y el mundo, con la referencia inevitable, en el caso de Leibniz a su teoría de la armonía preestablecida.

Para Leibniz el espacio no es el sitio de Dios, ni de las cosas ni de las ideas, y es innecesario ningún concepto mediador para justificar la presencia de Dios en el mundo, así como también es innecesario para Dios ningún medio para sentir las cosas. Es equivocado desde el punto de vista de Leibniz intentar comparar el modo de percibir de Dios con el modo de percibir de las almas.

«Dios conoce las cosas porque las produce continuamente», dice Leibniz en la carta IV a Clarke, su presencia en el mundo no es a través de una situación sino de una operación que incumbe a su propia esencia, como es la de producir continuamente lo que de bondad y perfección hay en el mundo. En cambio las almas conocen porque Dios ha puesto en ellas un principio representativo de lo que está fuera de ellas, de modo que cada una de ellas es un reflejo del universo «según su punto de vista», y esto ha sido establecido desde el principio por Dios en la armonía cósmica. Así dice Leibniz en la carta IV: *«Las almas operan sobre las cosas porque los cuerpos se acomodan a sus deseos en virtud de la armonía que Dios ha preestablecido en ellos»*. Y en el escrito *«Qué es idea»* de 1678 podemos leer:

Afirmar que la idea de las cosas está en nosotros no es más que sostener que Dios, autor a la vez de las cosas y de la mente, ha impreso en ella aquella facultad de pensar de tal modo que puede obtener mediante sus operaciones todo lo que se corresponde perfectamente con lo que surge de las cosas mismas. (*Escritos Filosóficos*, ed. Olaso, pág 179).

Pero Dios no puede sentir las cosas como las sienten los espíritus, sino por el hecho de que provienen de él mismo, porque él las ha producido y querido, y «lo que Dios *quiere* es tanto como lo que *existe*». Pensar de otro modo, es decir, sostener, como sostiene Clarke, que Dios siente las cosas igual que las almas sienten lo que pasa por su cuerpo, significaría por una parte convertir a Dios en el alma del mundo, y por otra, degradar el conocimiento de divino.

Planteamiento de Clarke y Newton

Para los newtonianos Dios es un ser incorpóreo, inteligente, omnipresente, que ve las cosas en el Espacio infinito «como si» fuera en su sensorio; y por otra parte afirman una analogía entre el modo de operar del alma humana y Dios. Para Leibniz esto supone la identificación del espacio con el sensorio divino de una forma antropomórfica, de la que se infiere la corporeidad de Dios, concibiéndolo como el alma del mundo.

Esta visión de Newton sobre Dios tiene sus raíces, según señala Koyré y Burtt, en Henry More y su concepción del Espíritu. La concepción del espíritu de More es propia del siglo XVII; la idea de una entidad extensa aunque no material constituía algo común en la época. Tales entidades estaban representadas en la vida diaria, así como en la experiencia científica; ejemplo de ello es la luz, la fuerza magnética y la gravedad.

Newton considera el *sensorio* como el asiento extenso de la sustancia sensitiva espiritual, (tal y como lo confirmará Clarke en la respuesta cuarta).

En lo referente a la semejanza entre el modo de operar humano y divino, los newtonianos consideran que la forma de percibir del alma humana y Dios transcurren por vías paralelas. Nuestra alma percibe según una teoría representativa estricta, por el contacto inmediato entre imágenes y *sustancia sensitiva* en el sensorio: «*sin estar presente en las imágenes de las cosas percibidas no puede percibirlas*». Pero no basta con estar presente, es necesario que actuemos (Dios y los humanos) sobre la sustancia percibida. La diferencia entre nosotros y Dios estriba en que nosotros necesitamos un cuerpo intermediario, mientras que Dios no, pues *Él* estando presente en todas las partes, siendo el espacio como su sensorio, actúa sin necesidad de nervios sobre el éter que invade todos los intersticios de la materia. A pesar de la analogía con la mente humana, no se puede dar el paso de considerar el espacio como el órgano de conocimiento divino. En la cuestión 31 de la *Óptica* aclara:

«*Con todo, no hemos de tomar el mundo como el cuerpo de Dios ni a sus diversas partes como partes de Dios. El es un ser uniforme, carente de órganos, miembros o partes, estando aquellas criaturas suyas subordinadas a él y a su voluntad... Dios no tiene necesidad de semejantes órganos, al estar por todas partes presentes en las cosas mismas*». (*Óptica*, pag. 348).

2. La gravedad

Para los newtonianos la gravedad es una fuerza real que se deduce de los fenómenos, y, por tanto, también debe haber una causa real que produce esa fuerza, pero el reto que se plantea ya el propio Newton es evidente: ¿cómo explicar la existencia de fuerzas de atracción entre cuerpos situados a distancia si la mecánica exige que toda trasmisión de movimientos se realice por contacto?

Planteamiento de Leibniz

Al establecer Newton que los cuerpos se atraen en razón directa al producto de sus masas y en razón inversa al cuadrado de sus distancias, se puede llegar a entender que la gravedad es una propiedad de los cuerpos lo mismo que la inercia o la impenetrabilidad, y resulta difícil compatibilizar cualidades tan opuestas como la inercia y la gravedad en los cuerpos. «*Si lo que define a los cuerpos es su incapacidad para modificar por sí mismos el estado de movimiento o de reposo en el que se encuentran, resulta ininteligible que se los defina al mismo tiempo por su capacidad para modificar, no su propio estado, sino el de los demás, en virtud de ese poder de atracción*» (Ana Rioja, Introducción a «*Reflexiones sobre el Espacio, la Fuerza y la Materia*», pág 29).

Este poder fue conceptualizado por Leibniz como una cualidad oculta escolástica capaz de efectuar una acción a distancia, ya que incluso la naturaleza del medio a través del cual se ejerce la fuerza queda indeterminada; a veces Clarke habla de vacío, a veces habla de Éter, en cualquier caso es un medio invisible y no mecánico, razón suficiente para ser inexplicable y, por lo tanto, oculto también. Pero el Principio de Razón Suficiente había acabado ya con todas las cualidades ocultas inexplicables, y esta no iba a ser menos.

Pero cabe otra posibilidad, que esa fuerza no sea explicable por la naturaleza de los cuerpos, es decir que no sea una cualidad oculta, ¿Cómo dar razón de ella sino a través de un acto producido inmediatamente producido por Dios mismo?, esto es, sólo un milagro podría explicar el hecho de que los cuerpos se atraigan a distancia en al vacío y que un cuerpo gire en círculo sin escapar por la tangente.

Así resume esta cuestión Leibniz en el escrito de 1708, «*Consecuencias metafísicas del Principio de Razón*»:

«*En efecto, cada vez que los autores introducen alguna cualidad oculta primitiva atropellan este principio. Por ejemplo,... (como algunos conciben la gravedad como si las cosas pesadas fuesen atraídas por el cuerpo de la tierra o incitadas a aproximársele por alguna especie de simpatía), de tal suerte que no pueda darse una ulterior razón de la cosa basándose en la naturaleza de los cuerpos, ni resulte explicable la forma de atraer; este que así procede reconoce que ninguna razón sustenta esta verdad... Pero si postula que la cosa acontece no por una cualidad oculta de los cuerpos sino por una voluntad de Dios o por una ley por El impuesta, con esto da alguna razón, aunque natural o milagrosa*». (pág. 504).

Planteamiento de Clarke y Newton

No es sólo Clarke en sus respuestas a Leibniz el que responde a las objeciones de éste sobre la gravedad como cualidad oculta, sino el propio Newton en la cuestión 31 de la *Óptica* el que añade, en 1717, un párrafo:

«los aristotélicos dieron el nombre de cualidades ocultas no a las manifiestas, sino sólo a aquellas que suponían ocultas en los cuerpos, siendo causas desconocidas de fenómenos manifiestos, tales como serían las causas de la gravedad y de las atracciones eléctricas y magnéticas... Tales cualidades ocultas ponen una barrera al desarrollo de la filosofía natural, por lo que han sido rechazadas en los últimos años». (*Óptica*, p. 346).

Y lo añade para combatir las críticas de Leibniz.

En los *Principia*, en el escolio general, su tan famosa cita « yo no imagino hipótesis» expresaría que la gravedad no es una hipótesis o una cualidad oculta, sino que su existencia es un hecho patente.

Sobre el concepto de gravedad en Newton aclarar, como lo hace Cohen en *La Revolución Newtoniana*, que debe ser diferenciado del concepto de atracción. Según el estilo newtoniano, que Cohen observa siguiendo los *Principia*, el concepto de atracción es anterior al de gravitación; en el libro I y II de los *Principia*, donde Newton se ocupa de las Matemáticas, es donde aparece el término de atracción, pero sólo como un constructo matemático. En el libro III, donde Newton se ocupa de la Física, aparece el término gravedad, por lo que la palabra «gravedad» y «gravitar» pertenecen al lenguaje de la física terrestre y celeste. Pero esta fase tercera supone una laguna: el descubrir la causa de la gravedad y comprender de qué modo opera.

— Sobre la causa de la gravedad:

Quizás si Newton hubiese definido la gravedad como una propiedad de la materia, a la manera de Cotes en el prefacio de la segunda edición de los *Principia (1713)* (donde éste establece la gravedad como una propiedad primitiva de todos los cuerpos) la causa de la gravedad no supondría problema alguno. Pero más de una vez Newton señala la imposibilidad de considerarlo así. En un carta a Bentley Newton dice:

«Esta es una razón por la que deseo que no se me adjudique la gravedad como innata, inherente y esencial a la materia, que un cuerpo pueda actuar sobre otro a distancia a través de un vacum, sin mediación de algo más por y mediante lo cual sus acciones y fuerzas puedan entrar en contacto, todo esto me parece tan absurdo que no creo que nadie, que en cuestiones filosóficas tenga una facultad de pensar competente, pueda caer en ello [8]*».*

8. Newton to Dr. Bentley, Letter III, Cambridge, 25-2-1692/3.

Como expresa Burtt, Newton no parece defender la acción a distancia, por lo menos en su primera obra, donde siguiendo a Boyle, se le asignaba al medio etéreo la función de la propagación del movimiento a través de las distancias. Y de ahí que no se pueda considerar la gravedad como propiedad de la materia.

Sin embargo, la postura de E. Meyerson en *Identidad y Realidad*, partiendo de esta misma carta a Bentley es la de no ver esta declaración como concluyente. Meyerson juzga que Newton no dice rotundamente que la acción no la cree posible más que por el contacto de dos cuerpos, realmente Newton se contenta con declarar que un cuerpo, para obrar sobre otro, necesita un intermediario; deja en la vaguedad la naturaleza de este «algo» y especialmente no afirma que ha de ser una cosa de naturaleza material. Cree Meyerson que si Newton dejó las cosas así, fue porque juzgó preferible quitar de un libro de física lo que, en última instancia, no era más que una hipótesis teológica.

La diferencia entre los conceptos de atracción y gravedad, dada en los *Principia*, puede manifestar el hecho de que Newton evitó, mientras pudo, hacer un planteamiento físico de la cuestión, y optó de manera explícita por un planteamiento matemático. Así, en las primeras páginas de sus *Principia* encontramos la siguiente afirmación:

«Me sirvo indiferentemente de las palabras, atracción o propensión hacia el centro, pues considero estas fuerzas matemáticas y no físicas... Y cuando digo que los centros atraen, refiriéndose a sus fuerzas, no debe pensarse que he querido atribuir una fuerza real a estos centros a los que considero como puntos matemáticos [9]».

Es en la segunda edición de los *Principia*, en el escolio general, donde Newton se pronuncia públicamente sobre la posible causa de la gravedad. Y lo hace desde un punto de vista positivista [10]; al expresar que la gravedad existe realmente y que basta para explicar los fenómenos de la naturaleza. Pero, según Cohen, Newton nunca fue un verdadero positivista, dado que nunca abandonó la búsqueda de la causa de la gravedad, creyendo que dicha causa existe y puede hallarse.

En la época en la que Newton discute con Leibniz (1693) sobre la causa de la gravedad parece inclinarse a relacionarla con el éter, así escribía a Leibniz:

«Alguna materia extraordinariamente sutil parece llenar los cielos»;

o incluso va más lejos:

9. Citado por Ana Rioja en *Reflexiones sobre el espacio, la fuerza y la materia*, p. 30.

10. Burtt también nos dibuja un Newton positivista encadenado y regido por una metafísica debida al Newton metafísico.

«Pero si, mientras tanto, alguien explica la gravedad junto con todas sus leyes mediante la acción de cierta materia sutil, me cuidaré mucho de protestar [11]*».*

Y en este mismo año, en una carta a Bentley, Newton relaciona la causa de la gravedad con un agente, del cual no especifica si es material o no, pero que actúa *«constantemente según ciertas leyes».*

A lo largo de la obra de Newton puede observarse como unas veces considera la relación gravedad-éter y otras niega dicha relación. Pero en las últimas opiniones publicadas de Newton al respecto, supusieron una vuelta al éter o un medio etéreo, como queda expresado en la segunda edición inglesa de la *Óptica.*

3. El vacío

La concepción newtoniana del universo se cifra en la teoría de los átomos y el vacío, en contraposición a la teoría leibniciana del continuo infinitamente divisible. Mientras los newtonianos afirman que el vacío es empíricamente demostrable (por los experimentos de von Guerike, Torricelli, etc...), Leibniz dice que es lógicamente imposible, ya que es incongruente con los principios «del mejor mundo posible», de la «identidad de los indiscernibles» y de «razón suficiente».

Planteamiento de Leibniz

Para Leibniz sólo se da el espacio lleno y no existen posiciones intermedias vacías. Esto supone la afirmación de dos leyes distintas: la *ley de lo pleno* según la cual en el espacio o lugar universal toda situación posible está ocupada por una sustancia, y la *ley de la continuidad,* según la cual entre dos intervalos posicionales existen infinitos estados intermedios ocupados también por sustancias. Por lo tanto, en la naturaleza no hay saltos o discontinuidades. Nada se cumple de repente. Esta ley vale no solamente en transiciones de lugar a lugar sino también en las de forma a forma y en las de estado a estado. *«Este es el privilegio del continuo; la continuidad, en efecto, se halla en el tiempo, en la extensión, en las cualidades, en los movimientos, y en todo tránsito de la naturaleza, que jamás ocurre a saltos»* (*«Principios Metafísicos de la matemática»*, pág. 591, ed. Olaso).

Los cambios son continuos, y los saltos sólo aparentes, aunque —dice Leibniz— la belleza de la naturaleza los exige para que pueda haber percepciones distintas. No vemos las etapas infinitésimas del cambio, y así parece haber discontinuidad donde

11. En esta misma época, Cohen considera que « Newton abrazó con celo y entusiasmo un intento de Fatio de Duillier de explicar la gravedad mediante una hipótesis basada en la idea del movimiento rectilíneo de partículas de éter, llegando incluso a afirmar que esta era la única explicación «mecánica» de la gravedad» (Cohen, La revolución newtoniana, p. 138).

en realidad no la hay. Esta ley es complementaria con el *principio de identidad de los indiscernibles;* porque la primera enuncia que en la serie de las cosas creadas está ocupada toda posición posible, mientras que el segundo enuncia que cada posición posible es ocupada una vez solamente.

Además de este argumento fundamentado en la ley de la continuidad, podemos resumir de la siguiente forma todos los argumentos que se esgrimen contra el vacío en las cartas a Clarke:

1. Basado en el «Principio de Perfección»:

Toda perfección que Dios haya podido poner en las cosas sin suprimir otras anteriores, ha sido puesta. Partiendo de las premisas de que el espacio lleno es más perfecto que el vacío, y de que en él Dios ha podido poner alguna materia sin suprimir en nada ninguna cosa, se concluye en consecuencia que él lo ha puesto y que por lo tanto todo está lleno de materia. A esta argumentación se añade otra paralela, que afirma que cuanta más materia hay más ocasión tiene Dios de ejercer su sabiduría.

2. Basado en el «Principio de Razón suficiente»:

No hay razón para limitar la cantidad de materia: no hay un principio para determinar la proporción de materia tanto de lleno a vacío como de vacío a lleno, quizá el uno debe ser igual al otro, pero como la materia es más perfecta que el vacío, la razón exige que haya tanto de pleno cuanto merezca ser preferido: pero así no habrá vacío.

3. Basado en el «Principio de Identidad de los Indiscernibles»:

Las diversas partes del espacio vacío serían completamente similares y congruentes entre sí, de modo que diferirían solamente en número, lo cual es absurdo.

4. Por último encontramos una única *argumentación física* que intenta refutar los argumentos de Clarke basados en los experimentos de Guericke y de Torricelli, quienes supuestamente habrían conseguido el vacío bombeando el aire de un recipiente. Leibniz argumenta adhiriéndose a las opiniones de aristotélicos y cartesianos quienes no habrían admitido un verdadero vacío en el tubo o supuesto recipiente, puesto que los vidrios tienen poros sutiles que pueden ser atravesados por materias muy pequeñas, tales como los rayos de luz o los del imán. Clarke responde que no es el grosor de la materia sino la cantidad lo que hace resistencia, y que por lo tanto, debe haber más vacío donde hay menos resistencia. Pero a esto replica Leibniz que lo que hace resistencia no es la cantidad sino la dificultad que opone la materia al ceder.

Planteamiento de Clarke y Newton

— Universo lleno versus universo vacío: *contra el plenum.*

La respuestas de Clarke, en este punto, se centran en exponer el espacio vacío como vacío de cuerpos, pues Dios e incluso otras substancias no tangibles están en él. Desde una perspectiva teológica el vacío no implica una limitación de la sabiduría de Dios, pues Él no sólo crea las cosas con propiedades infinitas y eternas. Desde una perspectiva física, el vacío existe en el mundo real, pues la falta de resistencia que encuentran los cuerpos al moverse lo explicaría; y esta resistencia no viene dada por la extensión propia de la materia sino por la cantidad de materia. Para Clarke, para el cual el vacío existe independientemente de los cuerpos, la crítica de Leibniz se fundamenta en hacer un mal uso de los conceptos metafísicos y en una incomprensión total de la naturaleza del espacio vacío.

La concepción de un universo vacío, propia de los newtonianos, es una clara oposición al modelo continental y cartesiano de un *plenum*. Frente al *plenum* cartesiano, Newton propone un éter raro, el cual es prácticamente como el vacío (por lo menos, en lo que a la resistencia se refiere). Al respecto es pertinente señalar la cuestión 28 de la *Óptica* donde Newton explica el porqué no puede aceptarse físicamente el *plenum*: un espacio completamente lleno opondría al movimiento una resistencia tan fuerte que éste resultaría prácticamente imposible y habría cesado hace tiempo. Lo que admite físicamente Newton es el espacio lleno de un éter extremadamente fino, raro y tenue, cuya densidad podemos hacer tan pequeña como queramos: «*Por consiguiente, a fin de salvar los movimientos regulares y duraderos de los planetas y cometas, es necesario vaciar los cielos de toda materia, exceptuando quizás ciertos vapores o efluvios muy tenues que puedan surgir de las atmósferas de la Tierra, planetas y cometas, así como un medio etéreo extremadamente raro...* (*Óptica*, p. 316 y ss.).

Cuando Newton abandona los previos intentos de explicar mecánicamente la gravedad basándose en un éter omnipresente (en el período que va de la redacción de los *Principia* a la segunda edición inglesa de la *Óptica*) lo hace a favor de una visión de la naturaleza en términos de átomos y vacío, junto con la gravedad como un principio de actividad de carácter no material. De lo que se deduce que el universo consta de partes materiales en el vacío, que interactúan por medio de un principio de actividad extraño a la materia misma.

Carlos Solís en una nota a la *Óptica*, atribuye al carácter reservado de Newton, como motivo más notable de no poder tener certeza alguna sobre su posición acerca de la constitución de la naturaleza. Son, realmente, los comentarios de sus discípulos, a partir de 1700, los que exponen un Newton que creía que el mundo estaba casi vacío de materia. Newton no es muy explícito sobre el asunto, porque para él es una hipótesis imaginar la constitución interna de la materia. Pero, sin embargo, la lectura de la Prop. VIII (donde Newton propone un modo de hacer la materia tan escasa como se quiera) y las Cuestiones de la *Óptica* (1706) (en la que se expresa principios activos inmateriales, dependientes de la voluntad de Dios) nos muestra —según C. Solís—la imagen que Newton tenía de un universo casi sin materia (por los vacíos que las sustancias aparentemente continuas presentan) y regulado por la voluntad de Dios, que pone directamente esas fuerzas inmateriales, los *perpetuos milagros,* como critica Leibniz [12].

4. Espacio y tiempo

Es de sobra conocida la idea leibniziana del espacio como orden de coexistencia y del tiempo como orden de sucesión. En cambio Newton en su escolio a la definición octava de los *Principia* establece su teoría del espacio y el tiempo absolutos.

Planteamiento de Leibniz

Leibniz ostenta una concepción relacional del espacio y el tiempo: ambos son relativos. El espacio es un orden de coexistencias, y el tiempo es un orden de sucesiones. Nadie mejor que el propio Leibniz para aclararnos los conceptos fundamentales que entran en juego en estas definiciones, el texto que sigue está recogido de su escrito «*Principios Metafísicos de la Matemática*:

Si se postula que existen varios estados de cosas que no envuelven nada opuesto, se dice que existen simultáneamente... Si uno de estos estados no simultáneos envuelve la razón de otro, aquél se considera anterior, éste posterior... Y como mi estado anterior, debido a la conexión de todas las cosas, envuelve también el estado anterior de las otras cosas, mi estado anterior envuelve asimismo la razón del estado posterior de las otras cosas, y por lo tanto es anterior a ese estado de ellas. Y por esto, cada existente es simultáneo con, o anterior o posterior a otro existente. El tiempo es el orden de existir de los que no son simultáneos. Y por esto es el orden general de los cambios, en que no se tienen en cuenta las diversas especies de cambios.

La duración es la magnitud del tiempo. Si la magnitud del tiempo disminuye continuamente de modo uniforme, el tiempo desaparece en el momento cuya magnitud es nula.

El espacio es el orden de coexistir, esto es, el orden de existir de los entes simultáneos.

12. Carlos Solís, en una nota de la *Óptica,* nos comenta que en la edición de 1717, y una vez muerto Leibniz, Newton añade un par de páginas exponiendo la teoría de la escasez de la materia, que hasta entonces sólo había sido publicada por sus discípulos.

Los entes se juzgan más próximos o más remotos en ambos órdenes (del tiempo y del espacio), según se requieran más o menos entes adicionales para captar el orden entre ellos... La extensión es la magnitud del espacio. Erradamente se confunde de ordinario la extensión con lo extenso, y se la considera como si fuese una substancia.

Si la magnitud del espacio disminuye continuamente de modo uniforme, desaparece en el punto, cuya magnitud es nula. (*Escritos filosóficos*, ed. Olaso, pág 581-82).

Espacio, en términos de posibilidad, denota un orden de cosas que existen al mismo tiempo. Y cuando uno ve varias cosas juntas, percibe ese orden de cosas entre las mismas.

Y si además no dirigimos la atención a ninguna cosa realmente existente, sino que simplemente concebimos el orden de posibles relaciones de situación, tenemos la idea abstracta de espacio, que no es nada real.

El tiempo también es relacional; si dos acontecimientos no son simultáneos sino sucesivos, concebimos el antes y el después. Y si concebimos el orden de relaciones posibles de esa especie tenemos la idea abstracta de tiempo, que tampoco es real.

Podemos expresar eso diciendo que aunque espacio y tiempo sean fenoménicos no por ello dejan de ser fenómenos bien fundados: son ideas abstractas con alguna base o fundamento objetivo, a saber, las relaciones. El espacio es una abstracción mental, algo que sólo existe como idea. Pero las relaciones que constituyen la base de esa construcción mental son reales.

No existe, por lo tanto, entre las mónadas ninguna proximidad espacial ni ningún intervalo de tiempo absoluto, y cuando afirmamos que están englobadas en un punto o diseminadas por el espacio no es sino emplear lo que Leibniz llama «*una ficción de nuestro espíritu*», que creamos cuando queremos imaginar lo que sólo se puede concebir.

El espacio es a priori, y por eso mismo, necesario, puesto que se refiere a las esencias tanto como a las existencias, y «si no hubiera criaturas, estaría en las ideas de Dios» (a Clarke, IV,41, pág 84). Es además indivisible: en efecto, una relación no está compuesta por sus términos, y no pertenece tampoco a sus términos sino «tendríamos un accidente en dos sujetos, que tendrían una pierna en el uno y la otra en el otro» (a Clarke, V,47, pág 112). Es indivisible y consecuentemente continuo. El espacio es uniforme, pleno y no compuesto de partes: lo que confirma su idealidad, pues si fuera una sustancia, su uniformidad y la identidad de sus puntos serían contrarios al principio de lo mejor y al principio de los indiscernibles (ver Yvon Belaval, pág 223-24); ya no habría razón para que

«*Dios, guardando las mismas situaciones de los cuerpos entre ellos, haya colocados los cuerpos en el espacio así y no de otra manera*» (a Clarke, III, 5, pág 68).

Y las *«partes del espacio, uniéndose perfectamente como dos unidades abstractas, no ofrecerían nada de distinguible a la elección divina»* (a Clarke, V, 67, pág 120).

El espacio es, por lo tanto obra del entendimiento y posibilidad de relaciones que permite medir la extensión.

El orden de coexistencia que define el espacio responde al orden de sucesión que define el tiempo.

De manera que el tiempo —nos dice Yvon Belaval— mira las cosas «que son incompatibles y que sin embargo se conciben todas como existentes y eso es lo que hace que ellas sean sucesivas». En tanto que el espacio expresa la relación «Y» de compatibilidad (A «y» B), el tiempo expresa La relación «O» de incompatibilidad (A «o» B) (Leibniz, Initiation a sa philosophie, pág 224).

El tiempo, al igual que el espacio, es a priori, necesario y continuo porque consiste en relaciones indivisibles. Y de la misma manera que el espacio no es «extendido», el tiempo no «dura». ¿Cómo forma pues la sustancia creada, nuestra alma misma, el concepto de extensión y duración?

Toda sustancia creada está dotada de percepción, no sólo es un punto de vista del universo creado sino que también tiene un punto de vista sobre las demás sustancia creadas. Si la sustancia gozara de una percepción tan clara como la divina no percibiría sino una multiplicidad heterogénea y puramente cualitativa. Pero el ser limitada la sustancia y al poseer una percepción en cierto modo imperfecta, esta diferencias se borran y se confunden, trocando lo puramente cualitativo en cuantitativo.

No es de extrañar que esta concepción relacional chocase con las mantenidas al respecto por Newton y Clarke, que entendían el espacio y el tiempo como entidades absolutas. Para Newton el espacio era un infinito número de puntos, y el tiempo un infinito número de instantes. La polémica se centra por una parte sobre éste último punto, y por otra alrededor de la opinión de Clarke de que el espacio y el tiempo infinitos no son seres eternos e infinitos, sino propiedades de un ser que sí lo es, son propiedades divinas, a saber, la inmensidad y la eternidad.

Podríamos resumir la postura leibniciana de la siguiente forma: los conceptos de Espacio y tiempo absolutos funcionan como los «idola» de Francis Bacon. Si el espacio fuera un ser real e infinito en el que las cosas están situadas, Dios podría haber creado un universo de extensión finita, pero, sea finito o infinito, en este caso carece de sentido hablar de si el universo ocupa o es capaz de ocupar posiciones diferentes. Si fuera finito y girase, por así decirlo, en el espacio infinito, las dos posiciones imaginarias serían indistinguibles. No habría pues razón suficiente para que ocupara una posición más bien que la otra; esto ocurre cuando construimos la noción quimérica de espacio vacío infinito como un conjunto de puntos, ninguno de los cuales sería en modo alguno distinguible de otro cualquiera. En esta argumentación, como en tantas otras, funcionan conjuntamente el principio de razón suficiente y el de los indiscernibles.

Un argumento similar puede utilizarse contra la idea de tiempo absoluto: no habría razón suficiente para que Dios crease el mundo en el instante X mejor que en el instante Y; probándose también que no hay instantes aparte de las cosas. Porque el hecho de que no habría razón suficiente para que Dios prefiriese un instante a otro es debido a que los instantes serían indistinguibles. Y si son indistinguibles no puede haber dos de ellos.

En cuanto a la idea de Clarke de que el tiempo infinito es la eternidad de Dios, tendría como consecuencia lógica que todo lo que es en el tiempo estaría también en la esencia divina, lo mismo que si el espacio infinito es la inmensidad divina, en cuyo caso las cosas en el espacio estarían en la esencia divina. Por ejemplo, tal como se recoge en el punto 3 de la carta III, Dios habría de tener partes al igual que el espacio absoluto e infinito (aunque, por otra parte, Clarke parece no estar muy de acuerdo con la idea de que el espacio infinito tenga que tener necesariamente partes).

Por tanto, no hay entre las mónadas proximidad espacial o absoluta; decir que están concentradas en un punto, o diseminadas en el espacio, es hacer uso de ciertas ficciones de nuestra alma. El espacio pertenece al orden fenoménico, aunque no es puramente subjetivo ya que las mónadas tienen una relación ordenada de coexistencia. Y esto porque los diferentes puntos de vista de las diferentes mónadas presuponen posiciones relativas objetivas [13].

13. Sobre la complejidad del espacio en Leibniz —y por analogía valdría también para el tiempo— no queremos dejar de transcribir parte del texto de una nota a pie de página de Ortega y Gasset en su *La idea de principio en Leibniz*, pp. 28-9: «Para Leibniz, el espacio concreto en que los fenómenos nos aparecen y que llama «extensión», es un «sistema de posiciones». Estas posiciones resultan de —más bien podríamos decir que son— relaciones dinámicas entre los substratos que son «fuerza». No puede decirse, pues, que las «cosas», es decir, las fuerzas, están en el espacio si se entiende por tal un espacio previo a ellas. El espacio concreto, la extensión, surge de las fuerzas actuantes, y es manifestación de su actuar. Por ser dinámico, el sistema de posiciones cambia constantemente, es movimiento, y no puede disociarse del tiempo, que a su vez en Leibniz representa ese sistema de relaciones dinámicas en su sucesividad. La inseparación de espacio y tiempo se constituye así en Leibniz más radicalmente que en la teoría de la relatividad, que asocia espacio y tiempo sólo en cuanto medidas. El hecho de que fuerzas diversas aparezcan sucesivamente en una misma posición nos permite formarnos una concepción abstracta de esta, que se convierte así en mero «lugar». El sistema de los lugares es el espacio abstracto o geométrico, que es además un caso límite —y por ello nuevamente abstracto— del espacio concreto en cuanto que es un sistema quieto de posiciones. Leibniz dirá que es «ideal»... Falta, sin embargo, todo un lado de esa idea, que no es posible resumir tan galanamente. Me refiero al carácter puramente fenoménico que tiene el espacio en Leibniz. La realidad propiamente tal es ajena al espacio. El mundo inteligible de la mónada no es extenso. Pero de ese mundo no tenemos noticia concreta que sea, a la vez, clara. Solo tenemos una noticia confusa. Esta confusión de lo auténticamente

Planteamiento de Clarke y Newton

La importancia y dificultad de este punto está, como ponen de manifiesto Burtt y Koyré, en los conceptos científicos de espacio y tiempo absolutos en Newton, pues éstos esconden toda una serie de opiniones teológicas y, por tanto, un abandono de su empirismo. Por otra parte, hay que tener en cuenta lo tratado en el apartado dedicado al *sensorium Dei*, donde Newton habla del espacio y tiempo como parte de la presencia de Dios en el mundo.

La polémica que Newton mantiene con los relativistas de su época viene determinada por la distinción que él hace entre: espacio y tiempo absolutos, verdaderos y matemáticos, y el espacio y tiempo relativos, dados por el sentido común: «*Yo no defino el tiempo, el espacio el lugar y el movimiento como si fuesen conocidos por todos*».

Como ya hemos señalado, la crítica de Leibniz en la polémica se centra en que los newtonianos admiten un espacio y tiempo absoluto que no pueden darse por la observación y experimentación; de ahí la utilización de espacios, tiempos y movimientos relativos cuando medimos y calculamos.

La respuesta que Clarke da a la crítica de Leibniz, siguiendo el escolio de la definición VIII de los *Principia*, no es otra que la de conocer el movimiento absoluto por algunas de sus propiedades, pues éste implica el espacio y el tiempo absoluto. Newton señala dos modos de demostrar y medir los movimientos absolutos y, por tanto, el espacio y tiempo absolutos: bien por los movimientos aparentes, bien por las fuerzas, que son las causas y los efectos de los verdaderos movimientos.

Al expresar el estudio de las fuerzas como causa, Newton —según Burtt— considera el movimiento absoluto, pues el movimiento verdadero no puede producirse sin la aplicación de una fuerza, y *viceversa*. Newton creyó posible conocer la existencia de la fuerza aparte de los movimientos efectuados y con anterioridad a ellos. Se deduce que si hay una fuerza que actúe, hay aceleración de la masa afectada, o lo que es lo mismo, movimiento absoluto (el argumento es ilegítimo para nosotros; la fuerza es hipotética hasta que aparece el efecto). Una base más sólida parece tener

---

real, este *minus* de inteligibilidad, es la imaginación. El mundo fenoménico —y con él el espacio— es un mundo imaginario. No ha de entenderse esto exclusivamente por su lado negativo, por lo que tiene de noticia limitada e inadecuada de lo real. Esa deformación de lo real no es meramente subjetiva, sino que es la manera objetiva de representarse un sujeto limitado la ilimitada y auténtica realidad. Lo imaginario, aun siendo inadecuadamente real, tiene fundamento en la realidad. Y esto, que vale primero para el espacio concreto o fenoménico, vale también para el espacio «ideal». También la «idea» del puro espacio geométrico tiene su fundamento *in re*».

el argumento sobre el movimiento absoluto, cuando Newton lo explica a través de la fuerza como efecto, ejemplificado por el conocido argumento de los globos, expuesto por Newton en los *Principia.* Con el ejemplo Newton ilustra ciertos movimientos que son la causa de ciertas fuerzas (el movimiento de los globos puede medirse por la tensión de la cuerda), las cuales se expresan en fenómenos adicionales susceptibles de medir. Cuando se presentan estos fenómenos nos encontramos no con movimientos relativos sino con movimiento que pueden llamarse absolutos; porque si los globos se mueven con referencia a las estrellas fijas no podemos sino suponer que las estrellas fijas están en reposo y atribuir a los globos el movimiento, que se revela a través de la tensión de la cuerda. Por lo tanto la libertad que los relativistas suponen es ilusoria.

Epílogo orteguiano

«Leibniz vivió en combate permanente con Newton. Esta polémica ha sido una de las más excelsas gigantomaquias que en el planeta se ha dado, y es una vergüenza que aquel egregio pugilato no haya sido aún contado de manera condigna ni en su lado doctrinal ni en su lado «humano». Este último es también sobremanera interesante, porque en él vemos que Newton es, de los dos, quien ha tenido siempre «buena Prensa», mientras que Leibniz la ha tenido siempre mala, empezando por el genio del periodismo: Voltaire. El caso es tanto más escandaloso [14] cuanto que en aquella polémica, según ahora vemos, era Leibniz quien «llevaba la razón» sobre la mayor parte de las discrepancias. Y llevaba la razón en un grado que casi parece, repito, sobrehumano. Leibniz anticipaba con una clarividencia que produce escalofrío lo que en nuestro tiempo ha llegado a ser tanto la pura matemática más reciente como la más reciente física. Porque es preciso hacer constar que es *Leibniz, de todos los filósofos pasados, aquel de quien resultan hoy vigentes mayor número de tesis* [15]. Por supuesto, que hoy no es mañana.» (*La idea de principio en Leibniz* —pp. 42-3—).

14. Nota de Ortega: «Quien conoce un poco las cosas humanas, sabe que tener «buena Prensa» es de suyo, y sin más, un mal síntoma.

15. Nota de Ortega: «La comparación de Leibniz con Newton ofrece además la ocasión sin par para esclarecer de modo preciso la diferencia entre el hombre-filosófico y el hombre-científico. Como ambos son del mismo tamaño en cuanto a hombres de ciencia, es decir, en cuanto a matemáticos, podemos superponer sus figuras, y entonces vemos que todo Newton coincide con Leibniz, pero que a Leibniz le sobra todavía estatura...».

Bibliografía

Obras de Leibniz:

LEIBNIZ, G. W., *Escritos Filosóficos*, editados por Ezequiel de Olaso, Ed. Charcas, Buenos Aires, 1982.

LEIBNIZ, G. W., *Escritos de Dinámica*, estudio preliminar y notas de J. Arana, trad. J. Arana y M. Rodríguez, ed. Tecnos, Madrid, 1991.

LEIBNIZ, G. W., *La polémica Leibniz-Clarke*, ed. de Eloy Rada, Taurus ediciones, Madrid, 1980.

LEIBNIZ, G. W., *Monadología*, ed. de H. Arnau y P. Montaner, Ed. Alhambra, Madrid, 1986.

LEIBNIZ, G. W., *Teodicea, ensayos sobre la bondad de Dios, la libertad del hombre y el origen del mal*, trad. P. Azcárate, ed. Claridad, Buenos Aries, 1946.

Escritos sobre Leibniz:

BELAVAL, Y., *Leibniz. Initiation a sa philosophie.* Ed. Vrin, París, 1984 (5ª ed.).

ECHEVERRÍA, J., *Leibniz*, ed. Barcanova, Barcelona, 1981.

EULER, L., *Reflexiones sobre el espacio, la fuerza y la materia*, introducción, selección, trad. y notas de Ana Rioja, Alianza Editorial, Madrid, 1985.

ORTEGA Y GASSET, J., *La idea de principio en Leibniz*, Alianza Editorial, Madrid, 1979.

RUSSELL, B.: *Exposición crítica de la Filosofía de Leibniz*, trad. de la 2ª ed. de Hernán Rodríguez, ed. Siglo XX, Buenos Aires, 1977.

Obras de Newton:

NEWTON, I., *El sistema del mundo, introducción*, trad. y notas de Eloy Rada, Alianza Editorial, Madrid, 1986.

NEWTON, I., *Óptica, o tratado de las reflexions, refracciones, inflexiones y colores de la luz*, introducción trad. y notas de Carlos Solís, ediciones Alfaguara, Madrid, 1977.

NEWTON, I., *Principios matemáticos de la Filosofía Natural*, (2 vols.), introducción, trad. y notas de Eloy Rada, Alianza Universidad, Madrid, 1987.

Escritos sobre Newton:

BERKELEY, G.: *Tratado sobre los principios del conocimiento humano*, §§ 97-98, y 110-117, trad., prólogo y notas de Carlos Mellizo, Alianza Editorial, Madrid, 1992.

BERNARD COHEN, I.: *La revolución newtoniana y la transformación de las ideas científicas,* trad. Carlos Solís, Alianza Universidad, Madrid, 1983.

BURTT, E. A.: *Los fundamentos metafísicos de la ciencia moderna,* trad. de R. Rojo, ed. Sudamericana, Buenos Aires, 1960.

HOLTON, G.: *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas,* trad. J. Aguilar, ed. Reverté, 1981; esp. capts. 9, 15, 16 y 17.

KEARNEY, O.: «El gran anfibio: Isaac Newton», en *Orígenes de la ciencia moderna, 1500-1700,* trad. de J.J. Ferrero, ed. Guadarrama, Madrid, 1970.

KOYRÉ, A.: *Del mundo cerrado al universo infinito,* ed. siglo XXI, Madrid, 1989 (7ª ed.).

MEYERSON, E.: «Leibniz, Newton y la acción a distancia», en *Identidad y realidad,* trad. Joaquín Xirau, ed. Reus, Madrid, 1929.